

T.C.

84087

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNVERTED PENDULUMUN MATEMATİK
MODELİNİN ELDESİ VE PİD, DURUM UZAYI,
ADAPTİF, KAYAN KIPLI KONTROL
YÖNTEMLERİYLE SİMULASYONU

Mehmet GÜRDAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

Yrd.Doç.Dr. E.Murat ESİN

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

GEBZE

1999

Bu tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28/01/1999 tarih ve 99/02 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından BİLGİSAYAR MÜH. Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRI

ÜYE
(Tez Danışmanı)

: YRD. DOĞ. DR. E. MURAT ESEN

Murat ESEN

ÜYE

:

Sagip M. Başkaya

ÜYE

:

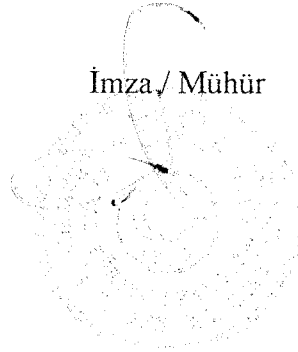
YRD. DOĞ. DR. ERTUĞRUL KARAÇUHA

Ertuğrul Karacuha

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 11/02/1999 tarih ve 99/04 sayılı kararı.

İmza/ Mühür





ÖZET

Bu tezde inverted pendulum hakkında genel tanıtım bilgileri verildikten sonra dinamiği incelenmiş ve matematiksel modeli elde edilmiştir.

Matematiksel modeli elde edilmiş olan inverted pendulum sisteminde ilk önce pid kontrolör tasarımı yapılmış ve lineer ve nonlinear çözümlerinin simülasyonları karşılaştırılmıştır.

Inverted pendulumda daha sonra ileri kontrol sistemleri uygulanmıştır. İlkönce durum geribesleme kontrolü uygulanmış ve buna ek olarak sistemin dayanıklılığını arttırmak için adaptif kontrolör eklenmiştir. Aynı şekilde sistemin simülasyon sonuçları incelenmiş ve sonuçları tartışılmıştır.

Ayrıca bu sisteme kayan kipli kontrolör eklenmiştir. Bozucu etkileri dikkate alınarak sistemin dayanıklılığı simülasyonlar sonucunda incelenmiştir.

Elde edilen simülasyon sonuçlarına göre bu kontrol yöntemleri ile sistem beklenen performansı göstermiştir.

SUMMARY

In this study, after giving the general information about inverted pendulum, its dynamics was investigated and a mathematical model was established.

Based on inverted pendulum's mathematical model, firstly pid controller was designed and linear and nonlinear solution simulations were compared.

Later on, on the inverted pendulum advanced control systems were applied. First condition feedback control was applied and in addition to that to improve system's durability an adaptive controller was added. Similarly, system simulation results were investigated and results were discussed.

Also, a sliding mode controller was added to that system. System durability was investigated using simulations, its disturbing effects.

Based on the simulation results, with these control methods system showed the expected performance.

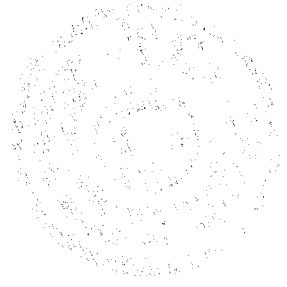
TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu seçmemde beni yönlendiren, çalışmalarım sırasında tecrübelerinden, bilgilerinden istifade ettiğim, gerekli kaynakların sağlanmasında yardımcı olan sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa Ragıp BAŞBUĞ'a, aynı ilgi ve alakayı gösteren, bizlere güvenen, yön veren, yardımlarını hep yanımda gördüğüm kıymetli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. E. Murat ESİN'e, çalışmalarımı gerçekleştirirken bana sağladıkları imkan ve huzurlu bir aile ortamı için Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü ve Bilgisayar Mühendisliği Bölümüne, tüm çalışma arkadaşlarıma, manevi katkılarından dolayı eşim Nurcan GÜRDAL'a ve emeği geçen herkese teşekkürlerimi borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	SAYFA
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
1 GİRİŞ	1
2 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ)UN DİNAMİĞİ	2
2.1 Giriş	2
2.2 Sistemin Tanımlaması	5
2.3 Kontrol Kriterleri	6
2.4 Sistemin Dinamiği	7
2.5 Sistemin Nonlineer Durum Denklemleri	10
2.6 Sistemin Lineerleştirilmesi ve Lineer Durum Denklemleri	12
3 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ)DA PID KONTROLÖR TASARIMI	16
3.1 Giriş	16
3.2 Sistemin Açık Çevrim Birim Basamak Cevabının Eldesi	16
3.3 PID Kontrol Simulasyonu	18
4 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ) DA DURUM GERİBESLEME KONTROLÖRÜ TASARIMI	21
4.1 Giriş	21
4.2 Tam Durum Kontrolü	23
4.3 Kutup Yerleştirimi	25
4.4 Durum Uzayı Kontrol Simulasyonu	27

5 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ)UN ADAPTİF KONTROLU	29
5.1 Durum Gözlemleyicisi	29
5.2 Durum Gözlemlenebilirliği	32
5.3 Gözlemleyici Kazancının Belirlenmesi	35
5.4 Adaptif Kontrol Simulasyonu	36
6 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ)DA KAYAN KIPLİ KONTROLÖR TASARIMI	39
6.1 Kayan Kipli Kontrol (Sliding Mode Control)	39
6.2 Değişken Yapılı Kontrolün Temelleri	40
6.3 Değişken Yapılı Kontrol Probleminin Yapısı	45
6.4 İnverted Pendulumda Bozucu Etkinin Hesaba Katılması	46
6.5 Kayan Kipli Kontrolör	49
6.6 Adaptif Kayan Kipli Kontrol Simulasyonu	51
SONUÇ	55
KAYNAKLAR DİZİNİ	56
ÖZGEÇMİŞ	57



SİMGELER VE KISALTMALAR

dim	boyut (dimension)
LTI	Lineer Time İnvariant
SISO	Single Input-Single Output
DYK	Değişken Yapılı Kontrol
KKK	Kayan Kipli Kontrol
M	Arabanın kütlesi
m	Pendulumun kütlesi
l	Pendulumun uzunluğu
u	Arabaya uygulanan kuvvet
g	Yerçekimi ivmesi
θ	Pendulumun dik pozisyondan açısal uzaklığı
x	Arabanın pozisyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2-1 Deneysel inverted pendulum sistemi	2
Şekil 2-2 Kapalı çevrim inverted pendulum sisteminin blok şeması	4
Şekil 2-3 Araba üzerinde inverted pendulum	5
Şekil 2-4 Güç bileşenlerinin vektörel diyagramı	8
Şekil 3-1 Inverted pendulum sisteminin açık çevrim blok diyagramı	17
Şekil 3-2 Kapalı çevrim inverted pendulum sisteminin blok diyagramı	17
Şekil 3-3 Sistemin açık çevrim blok diyagramı	18
Şekil 3-4 Kapalı çevrim sistemin pid kontrolü	18
Şekil 3-5 Inverted pendulumun açık çevrim birim basamak cevabı	19
Şekil 3-6 Kapalı çevrim sistemin simulasyon sonuçları	20
Şekil 4-1 Sistemin durum geribesleme kontrolü	22
Şekil 4-2 Sistemin durum geribesleme blok diyagramı	27
Şekil 4-3 Durum geribeslemeli Inverted Pendulum(Araba Pozisyonu)	28
Şekil 4-4 Inverted Pendulum için durumlar(durum geribeslemesi)	28
Şekil 5-1 Sistemin durum gözlemleyici modeli	30
Şekil 5-2 Sistemin blok diyagramı	36
Şekil 5-3 Durum kontrolörü & gözlemleyici (Araba Pozisyonu cevabı)	37
Şekil 5-4 Inverted Pendulum için durumlar	37
Şekil 5-5 Plant ve gözlemleyici durumları arasındaki fark	38
Şekil 6-1 Model sistemin blok diyagramı.	40
Şekil 6-2 Anahtarlama doğruları	41
Şekil 6-3 Faz portreleri	42
Şekil 6-4 Karasız iki sistemden karalı bir sistem elde etmek için yapılan bölgelere ayırma işleminde sonraki faz portreleri	43
Şekil 6-5 Adaptif kayan kipli sistemin blok diyagramı	51
Şekil 6-6 $d(t)=0$ iken araba pozisyonu çıkışı	52
Şekil 6-7 $d(t)=0$ iken sistemin hata çıkışı	52
Şekil 6-8 $d(t)=0.5$ N iken araba pozisyonu çıkışı	53
Şekil 6-9 $d(t)=0.5$ N iken pendulum pozisyonu çıkışı	53
Şekil 6-10 $d(t)=0.5$ N iken sistemin hata çıkışı	54
Şekil 6-11 $d(t)=0.5$ N iken sistemin kontrol işareti	54

1 GİRİŞ

Kontrol Mühendisliğinde, kontrol algoritmaları geliştirme veya kontrol yöntemlerini uygulamak için önce karmaşık olmayan sistemler kullanılır. Inverted pendulum problemi bu aşamalar arasında sayılabilir.

Inverted pendulum sistemi ilk bakışta zor gibi görünse de, kararsız sistemlerin çözümü ve ileri kontrol tekniklerinin uygulanabilirliği bakımında güzel bir örnektir. ayrıca bu sistemi lineerleştirerek çözmek bu problemi daha kolaylaştırır.

Inverted pendulum problemi kontrol mühendisliğinde en fazla çözülen problemlerden birisidir. Bu sisteme literatürde modern kontrol teorileri uygulaması var olup ayrıca iki eklem ve üç eklemli çözümleri de mevcuttur.

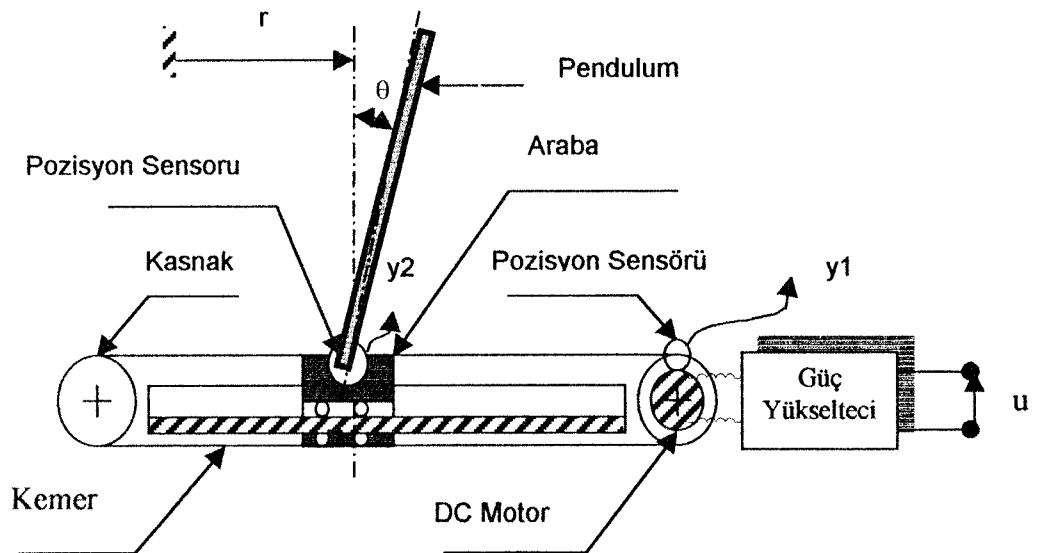
2 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ)UN DİNAMIĞI

2.1 Giriş

Kontrol teorisinin gelişiminde ve uygulamalarında ilk önce pratik problemler üzerinde tartışılır ve basit mekanizmalı pratik sistemler için kontrol yöntemleri uygulanır. Özellikle kararsız sistemlerin çözümünde tipik olarak kontrol edilebilen sistemlerden birisi inverted pendulumdur.

Inverted pendulum sistemi tanımlanırken başlıca şu kısımlara değinilebilir:

1. Sınırlı mesafede bir çizgi üzerinde giden bir araba
2. Bu arabaya menteşelenmiş olan ve planlı bir şekilde hareket eden pendulum
3. Arabanın sürücüsü olarak kullanılan DC motor



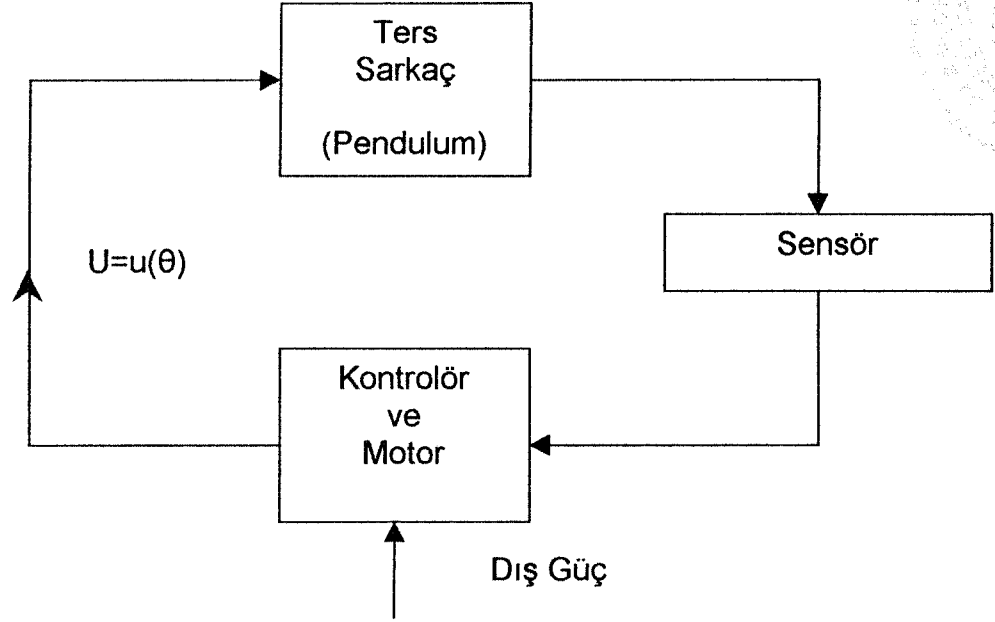
Şekil 2-1 Deneysel inverted pendulum sistemi

Burada pendulumun hareketi sınırlıdır ve arabanın hareketi ile dengede duracaktır. Kontrol bakımından ilk önemli nokta pendulumun dik pozisyonda veya ona mümkün olabildiğince yakın olmasıdır. İkinci nokta ise bu dengeleme zamanının kontrolüdür.

Burada plant (sistem) kararsızdır. Yani pendulum ve arabanın pozisyonu yardımcı kontrol işaretleri uygulanmadan kabul edilen noktalarda kalması imkansızdır. [White,1998]

Açıkça bellidir ki, durumları kontrol edebilmek için sisteme kontrol işareti uygulamak gerekir. Burada elektrik motoru arabaya monte edilmiştir ve bu motor bir dişli takımı ile u giriş gücünü uygulamak için kullanılmıştır. Görüldüğü gibi bu mühendislik açısından bakıldığında basit bir çözüm değildir.

Teknik olarak pendulumun devamlı dik pozisyonda tutulması zor gibi görünse de, geçmiş yıllarımızda yaptığımız parmak üzerinde çubuğu dik tutma olayı, bize bu işin yapılabilir olduğunu gösterir. Sistemin blok şeması şekil 2-2'de gösterilmiştir.



Şekil 2-2 Kapalı çevrim inverted pendulum sisteminin blok şeması

Burada sensör yardımıyla, pendulumun dik pozisyondan sarkma açısı belirlenir ve bu bilgi kontrolöre gelir. Kontrolör pendulumu tekrar dik pozisyona getirmek için motoru uyarır ve arabaya bir u işareti uygular.

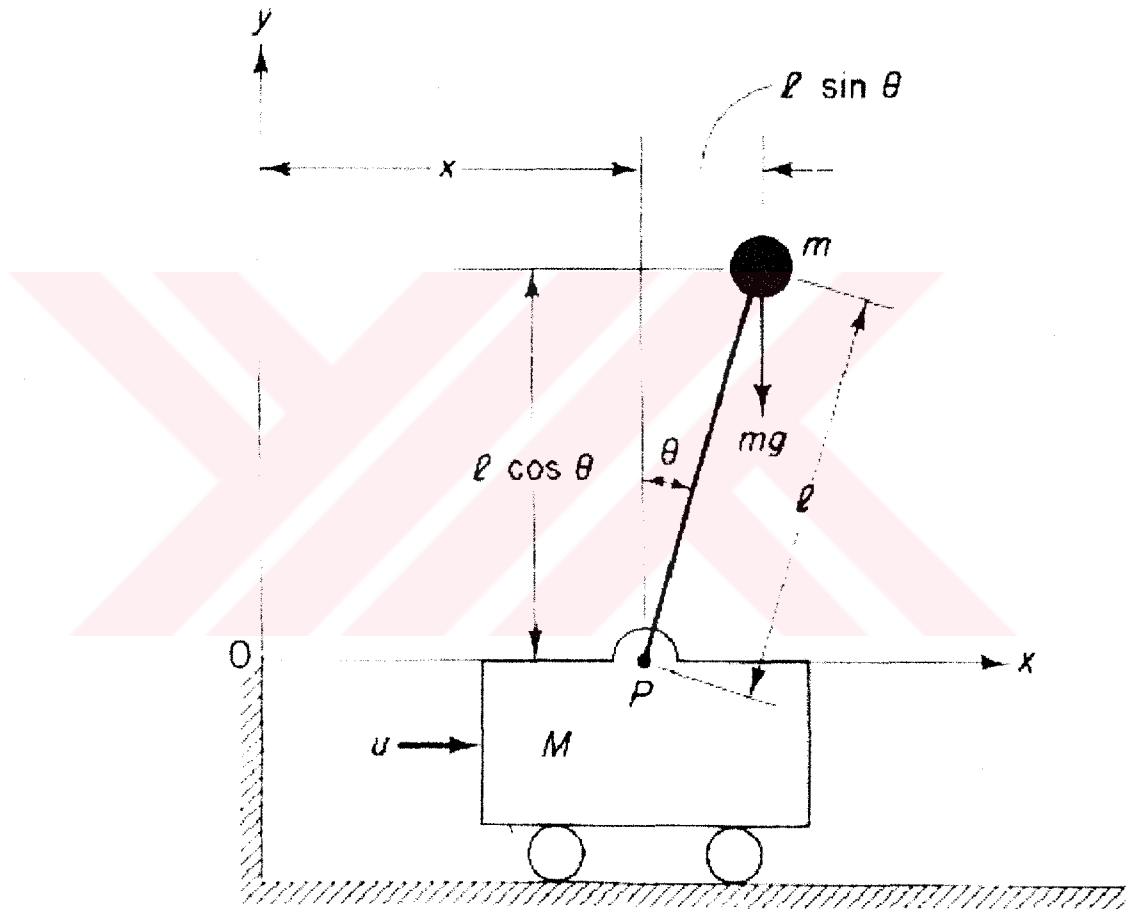
İlerde sistemin diferansiyel denklemlerinin çözümü ile ilgili detaylardan bahsedilecektir. Sistemin diferansiyel denklemlerinin çözümü kısaca ikiye ayrılır:

1. Nonlineer
2. Lineer

İlk seçenekte denklemlerin çözümü oldukça zordur. İkinci seçenekte denklemlerin genellikle zamana göre değişmeyen parametreleri vardır ve temel analitik çözümler içerirler. Bu yüzden nonlinear sistemlerin çözümünde lineerleştirme önemli bir yer tutar. Bu tezde de sistemin nonlinear diferansiyel denklemini lineerleştirilerek çözüm yapılacaktır.

2.2 Sistemin Tanımlaması

Daha önce de bahsedildiği üzere, bu tezde basit olarak araba üzerine monte edilmiş pendulumun analizi ve kontrol algoritmaları geliştirilmesi üzerinde durulacaktır. Bu sistemin genel yapısı şekil 2-3'de gösterilmiştir. Bu sistem dikey tabanlı kontrol sistemlerinin analizi konusunda en çok çözülen problemidir.



Şekil 2-3 Araba üzerinde inverted pendulum

Burada;

- M Arabanın kütlesi
- m Pendulumun kütlesi
- l Pendulumun uzunluğu

u	Arabaya uygulanan kuvvet
g	Yerçekimi ivmesi
θ	Pendulumun dik pozisyondan açısal uzaklığı
x	Arabanın pozisyonu

Burada çeşitli kontrol yöntemleri üzerinde durulacaktır. Bu sistem nonlineer bir sistem olduğu için ilk önce sistemin temel denge denklemi elde edilecektir. Sonra bu denklem standart durum formuna dönüştürülecektir.

Plantın açık çevrim durumunun kararsız olduğu açıktır. Burada klasik kontrol yaklaşımı ele alınmış ve sistemin efektif bir performans göstermeyeceği görülmüştür. Daha kararlı bir sistem elde etmek için durum geribeslemesi, adaptif ve kayan kipli kontrol yöntemleri uygulanmış ve sonuçları elde edilmiştir.

Bu yöntemlerin matematiksel modeli ve simulasyon sonuçları Matlab programıyla gerçekleştirilmiştir. Ayrıca sisteme bir rüzgar bozucusu eklenerek matematiksel model yeniden oluşturulmuş ve değişik bozucu değerlerinde sistemin performansı gözlemlenmiştir.

2.3 Kontrol Kriterleri

Inverted pendulum için sistem durumlarımız yani kontrol edilecek parametreler şunlardır; $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$. Burada θ pendulumun dikey pozisyonundan olan açısal uzaklığı, türevi ise açısal hızıdır. x , arabanın pozisyonu türevi de arabanın hızıdır. Yani bir yandan pendulumun dik pozisyonda kalmasını kontrol ederken diğer yandan arabanın pozisyonu da kontrol edilecektir. Çünkü arabanın hareket alanı sınırlıdır. Ayrıca sistemin yapılanmasında şu kriterler göz önüne alınmıştır:

- Yerleşme zamanı 1.5 saniyeden az olmalı
- Pendulumun dikeyle yaptığı açı en fazla 20° uzaklıkta olmalı

Bu kriterlere dayanarak sistemimize şu özelliklere sahip hale getirmeliyiz:

- x ve θ için yerleşme zamanı 1.5 saniyeden az olmalı
- Yükselme zamanı x için 0.5 saniyeden az olmalıdır

2.4 Sistemin Dinamiği

Arabaya monte edilen pendulum şekil 2-3 de gösterilmiştir. İlk önce çubuğun kütesinin ihmal edilecek kadar küçük olduğu kabul edilmeli ve M (araba kütesi) ve m (pendulumun kütesi) göz önüne alınmalıdır. Burada +x yönünde uygulanan $u(t)$ kuvvetiyle uç kütleyle etkiyen yerçekimi kuvvetleri vardır. Burada $x(t)$ arabanın pozisyonunu $\theta(t)$ ise referans olarak seçilen dik pozisyondan olan açısal uzaklıktır. [Mori and Nishihera,1976]

Sistem dinamiğinin eldesi için, bahsedilen güçlerin denge eşitliği bulunacaktır. Burada arabanın kütesel ivmesi ile uç kütleinin ivmelerinin toplamı sisteme uygulanan dış kuvveti verir. Bu ise şöyle yazılır:

$$M \frac{d^2}{dt^2} x + m \frac{d^2}{dt^2} x_G = u \quad 2.1$$

Burada uç kütleyle etkiyen yerçekimi kuvvetinin koordinatları x_G ve y_G olarak verilmiştir. Kabul edilen uç kütleinin yerçekimi merkezine göre yerleşimini şöyle tanımlanır:

$$x_G = x + \ell \sin \theta \quad \text{ve} \quad y_G = \ell \cos \theta \quad 2.2$$

Burada ℓ pendulumun çubuk uzunluğudur. Denklem 2.2 yi denklem 2.1 içine yazarsak

$$M \frac{d^2}{dt^2} x + m \frac{d^2}{dt^2} (x + \ell \sin \theta) = u$$

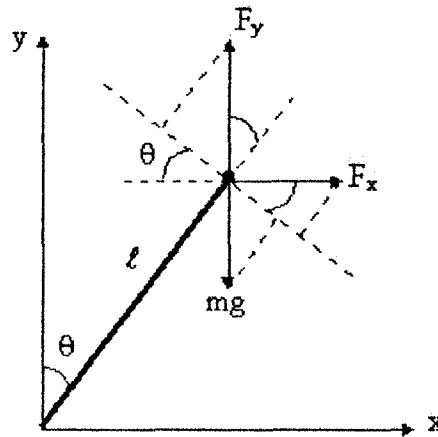
Aşağıdaki tanımları hesaba katarsak,

$$\frac{d}{dt} \cos \theta = -(\sin \theta) \dot{\theta} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2}{dt^2} \cos \theta = -(\cos \theta) \dot{\theta}^2 - (\sin \theta) \ddot{\theta} \quad 2.3$$

$$\frac{d}{dt} \sin \theta = (\cos \theta) \dot{\theta} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta = -(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + (\cos \theta) \ddot{\theta} \quad 2.4$$

$$(M + m) \ddot{x} - m \ell \sin \theta \dot{\theta}^2 + m \ell \cos \theta \ddot{\theta} = u \quad 2.5$$

elde edilir.



Şekil 2-4 Güç bileşenlerinin vektörel diyagramı

Burada aynı mantıkla sistemin tork dengesi elde edebilir. Burada tork gücün dik bileşenlerinin bir ürünüdür ve eksen noktasına olan uzaklığı ℓ 'dir. Bu durumda, dış gücün etkisiyle oluşan tork, yerçekimin etkisiyle oluşan torka eşittir. Güç bileşenleri yukarıdaki resimde tanımlanmıştır ve eşitlik şöyle yazılır.

$$(F_x \cos\theta)\ell - (F_y \sin\theta)\ell = (mg\sin\theta)\ell \quad 2.6$$

Burada F_x ve F_y güç bileşenleri denklem 2.2-2.4 den bulunur ve şöyle yazılır:

$$F_x = m \frac{d^2}{dt^2} x_G = m \left[\ddot{x} - \ell \sin\theta \dot{\theta}^2 + \ell \cos\theta \ddot{\theta} \right]$$

$$F_y = m \frac{d^2}{dt^2} y_G = -m \left[\ell \cos\theta \dot{\theta}^2 + \ell \sin\theta \ddot{\theta} \right]$$

Bu açıklamaları denklem 2.6 da yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir

$$m\ddot{x} \cos\theta - m\ell \sin\theta \cos\theta \dot{\theta}^2 + m\ell \cos^2\theta \ddot{\theta} + m\ell \sin\theta \cos\theta \dot{\theta}^2 + m\ell \sin^2\theta \ddot{\theta} = mg\sin\theta$$

veya

$$m\ddot{x} \cos\theta + m\ell \ddot{\theta} = mg\sin\theta \quad 2.7$$

Böylece sistemin tanımlanan denklemleri denklem 2.5 ve 2.7 de verilmiştir. Bu denklemlere matematiksel açıdan bakıldığında nispeten karışık ve kesin bir nonlinear sistem olduğunu görürüz. Bununla beraber bu sistemin hedefi inverted pendulumu ($\theta=0$) dik pozisyonda muhafaza etmek olduğu

için, bu denge noktasına göre lineerleştirme yapılabilir. Ama önce sistemin nonlinear denklemleri standart durum uzayı formuna dönüştürülmelidir.

2.5 Sistemin Nonlinear Durum Denklemleri

Inverted pendulumu sayısal simüle etmek için standart durum uzayı formuna dönüştürülmelidir.

$$\frac{d}{dt}\underline{z} = \underline{f}(\underline{z}, \underline{u}, t) \quad 2.8$$

Denklem 2.5 ve 2.7 yi bu forma dönüştürmek için yapılacak ilk işlem cebirsel eşitliklerde, denklemin ikinci dereceden terimini yalnız bırakmaktır. Denklem 2.7 den

$$m\ell\ddot{\theta} = mg\sin\theta - m\ddot{x}\cos\theta$$

ve bu, denklem 2.5 de yerine yazılırsa

$$(M + m)\ddot{x} - m\ell\sin\theta\ddot{\theta} + m\ell\cos\theta\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta - m\ddot{x}\cos^2\theta = u$$

veya

$$(M + m - m\cos^2\theta)\ddot{x} = u + m\ell\sin\theta\ddot{\theta} - m\ell\cos\theta\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta \quad 2.9$$

denklemini elde edilir. Benzer uygulama denklem 2.7 için yapılırsa

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\theta - \ell\ddot{\theta}}{\cos\theta}$$

ve denklem 2.5 de yerine yazılırsa

$$\frac{(M + m)(g \sin \theta - \ell \ddot{\theta})}{\cos \theta} - m \ell \sin \theta \dot{\theta}^2 + m \ell \cos \theta \ddot{\theta} = u$$

veya

$$(M + m)(g \sin \theta - \ell \ddot{\theta}) - m \ell \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 + m \ell \cos^2 \theta \ddot{\theta} = u \cos \theta$$

ve

$$(m \ell \cos^2 \theta - (M + m) \ell) \ddot{\theta} = u \cos \theta - (M + m) g \sin \theta + m \ell \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 \quad 2.10$$

elde edilir. Sonuçta denklem 2.9 ve 2.10 un ikinci dereceden olan parametreleri yalnız bırakılırsa,

$$\ddot{x} = \frac{u + m \ell (\sin \theta) \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta \sin \theta}{M + m - m \cos^2 \theta} \quad 2.11$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u \cos \theta - (M + m) g \sin \theta + m \ell (\cos \theta \sin \theta) \dot{\theta}^2}{m \ell \cos^2 \theta - (M + m) \ell} \quad 2.12$$

elde edilir. Şimdi bu denklemleri durum uzay formuna dönüştürmek için aşağıdaki dönüşümler uygulanmalıdır;

$$z_1 = \theta \quad z_2 = \dot{\theta} = \dot{z}_1 \quad z_3 = x \quad z_4 = \dot{x} = \dot{z}_3 \quad 2.13$$

ve inverted pendulum için durum uzay formu yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\underline{z} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u \cos z_1 - (M+m)g \sin z_1 + m\ell(\cos z_1 \sin z_1)z_2^2}{m\ell \cos^2 z_1 - (M+m)\ell} \\ \frac{u + m\ell(\sin z_1)z_2^2 - mg \cos z_1 \sin z_1}{M+m-m\cos^2 z_1} \end{bmatrix} \quad 2.14$$

Bu eşitlik denklem 2.8 de tanımlanan forma uygundur. Bizi pendulum açısı θ ve araba pozisyonu x ilgilendirdiği için,

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{z} \quad \text{veya} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \underline{C}\underline{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad 2.15$$

yazılabilir.

Denklem 2.14 ve 2.15 eşitlikleri nonlineer inverted pendulumun tam olarak durum uzayı formunu vermektedir. [Fogiel,1992],[Franklin,1994]

2.6 Sistemin Lineerleştirilmesi ve Lineer Durum Denklemleri

Eğer sistemi dik olarak sabit noktada tutmak istiyorsak bu 2.14 denkleminde faydalanarak yapılabilir. Burada her şey nonlineer vektör olduğu için A ve B matrisleri sıfırdır. Bu lineerleştirilmiş forma şöyle getirilebilir.

$$\frac{d}{dt}\delta\underline{z} = \underline{J}_{\underline{z}}(\underline{z}_o, \underline{u}_o)\delta\underline{z} + \underline{J}_{\underline{u}}(\underline{z}_o, \underline{u}_o)\delta\underline{u} \quad 2.16$$

Burada referans değerler belirlenirken pendulumu güç uygulanmadan sabit ve dik haldeki değerleri ele alınmıştır. Bu koşullar altında $z_0=0$ ve $u_0=0$ dır.

Nonlineer vektör fonksiyonları oldukça komplike olduğu için Jacobian matris sisteminin bileşenlerini terim terim bulunması gerekir. $J_z(z_0, u_0)$ 'in ilk sütun elementi $\partial f_1 / \partial z_1|_{z_0, u_0}$ olarak bulunur. Ayrıca ilk ve üçüncü fonksiyonlar z_1 parametresi taşımadığı için bunlar benzer şekilde sıfır olarak bulunur. İkinci terim için,

$$\frac{\partial f_2}{\partial z_1} = \frac{-u \sin z_1 - (M+m)g \cos z_1 + m\ell(-\sin^2 z_1 + \cos^2 z_1)z_2^2}{m\ell \cos^2 z_1 - (M+m)\ell} - \frac{u \cos z_1 - (M+m)g \sin z_1 + m\ell(\cos z_1 \sin z_1)z_2^2}{[m\ell \cos^2 z_1 - (M+m)\ell]^2} [2m\ell \cos z_1 \sin z_1]$$

ve

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \right|_{z_0, u_0} = \frac{(M+m)g}{M\ell}$$

Benzer şekilde dördüncü terim için

$$\frac{\partial f_4}{\partial z_1} = \frac{m\ell(\cos z_1)z_2^2 - mg(-\sin^2 z_1 + \cos^2 z_1)}{M+m-m\cos^2 z_1} - \frac{u + m\ell(\sin z_1)z_2^2 - mg\cos z_1 \sin z_1}{[M+m-m\cos^2 z_1]^2} [-2m\cos z_1 \sin z_1]$$

ve

$$\left. \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \right|_{z_0, u_0} = \frac{-mg}{M}$$

$J_{=z}(z_0, u_0)$ 'in ikinci sütunu $\partial f_i / \partial z_2 \big|_{z_0, u_0}$ formülü ile bulunur. Tekrar 2.14 denkleminde başvurulursa birinci elementin 1 üçüncü elementin ise 0 olduğunu görülür. İkinci ve dördüncü elementler için

$$\frac{\partial f_2}{\partial z_2} = \frac{m\ell(\cos z_1 \sin z_1)2z_2}{m\ell \cos^2 z_1 - (M+m)\ell} \quad \text{ve} \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \right|_{z_0, u_0} = 0$$

ve

$$\frac{\partial f_4}{\partial z_2} = \frac{m\ell(\sin z_1)2z_2}{M+m-m\cos^2 z_1} \quad \text{ve} \quad \left. \frac{\partial f_4}{\partial z_2} \right|_{z_0, u_0} = 0$$

bulunur. $J_{=z}(z_0, u_0)$ 'in üçüncü ve dördüncü sütunlarında sıfır olmayan sadece $\partial f_3 / \partial z_4 \big|_{z_0, u_0} = 1$ değeri vardır. Bütün ayırık terimler birleştirilirse,

$$J_{=z}(z_0, u_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{M\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.17

ve u için yine nonlinear terimlerin türevleri alınırsa,

$$\mathbf{J}_u(\mathbf{z}_o, \mathbf{u}_o) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial \mathbf{u} \\ \partial f_2 / \partial \mathbf{u} \\ \partial f_3 / \partial \mathbf{u} \\ \partial f_4 / \partial \mathbf{u} \end{bmatrix}_{\mathbf{z}_o, \mathbf{u}_o} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos z_1}{m\ell \cos^2 z_1 - (M+m)\ell} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{z}_o, \mathbf{u}_o} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{M\ell}{M} \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2.18$$

Şimdi bütün elde edilen formlar birleştirilirse denklem 2.16 yı elde ederiz. Bu elde edilen LTI (lineer zamanla değişmeyen) durum formu Matlab'da simule edilecektir. Denklem 2.19 un çıkış cevabı denklem 2.15 ve 2.19 da verilmiştir. Bu inverted pendulumun matematiksel modelidir. [Biran and Moshe, 1996], [White, 1998]

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{M\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{M\ell}{M} \\ 1 \end{bmatrix} \delta u \quad 2.19$$

3 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ)DA PID KONTROLÖR TASARIMI

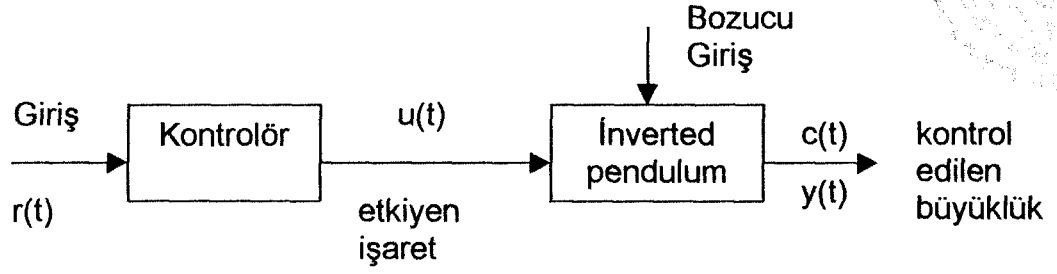
3.1 Giriş

Bu bölümde iki önemli nokta üzerinde durulacaktır:

1. Nonlineer ve lineer modellerin kararsız davranışlarının karşılaştırılmaları
2. Klasik geribesleme kontrol yönteminin gerçekleştirilmesi

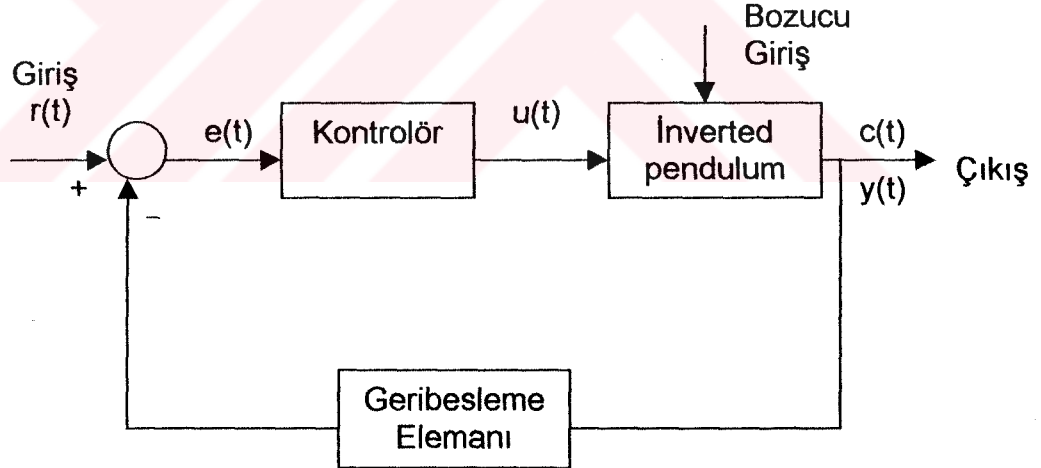
3.2 Sistemin Açık Çevrim Birim Basamak Cevabının Eldesi

Sistemin açık çevrim blok diyagramı şekil 3.1 de görülmektedir. Açık çevrim kontrol sistemlerinde kontrol işaretini, etkiyen işarete çeviren bir kontrol elemanı (kontrolör) vardır. Bu durumda lineerleştirilmiş sistem ile nonlineer sistemin birim basamak cevabını karşılaştırılmış ve sistemin simulasyon sonuçları bölümün sonunda gösterilmiştir. Burada sistemin özdeğerlerine bakılırsa, sistemin kararsız olduğu anlaşılır. Sistemin kararsız olmasının sebebi açık çevrim de sağ yarı düzlemde bir adet kökün bulunmasıdır.



Şekil 3-1 İnverted pendulum sisteminin açık çevrim blok diyagramı

Kararsız açık çevrim cevabı, inverted penduluma dayanıklı kontrol sistemlerinin uygulanmasını gerekli kılar. Bu kararsızlığı kaldırmak için sisteme bir geribesleme eklenmiştir. Kapalı çevrim blok diyagramı şekil 3-2 de görülmektedir. Uygun bir geribesleme ile açık çevrim sisteminin kökleri, kompleks koordinatların sol yarı düzlemine alınmıştır. Buradaki problem çubuk pozisyonu ve araba pozisyonunun kontrolüdür ve sadece arabaya uygulanan tek girişin olmasıdır.

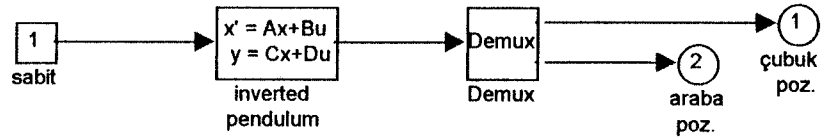


Şekil 3-2 Kapalı çevrim inverted pendulum sisteminin blok diyagramı

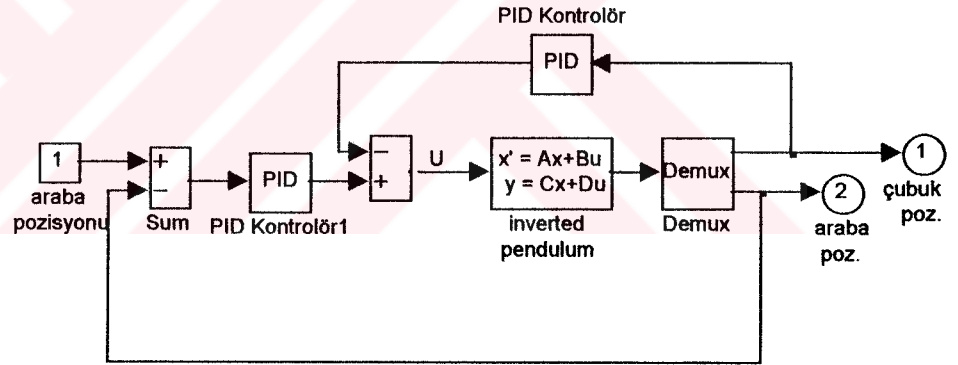
Klasik kontrol yöntemleri değişik formlarda yapılabilirler. İnverted pendulum için üç değişik yaklaşım olabilmektedir. Sistemi kontrol etmek için uygulanan bu üç yaklaşım ; çubuk pozisyonu, araba pozisyonu ve çubuk ve

araba pozisyonu geribeslemesidir. Burada çubuk ve araba pozisyonu geribeslemesi yapılmış ve pid kontrolörler ile sistem kararlı bir hale getirilmiştir. Simulasyon sonuçları aşağıda görülmektedir.

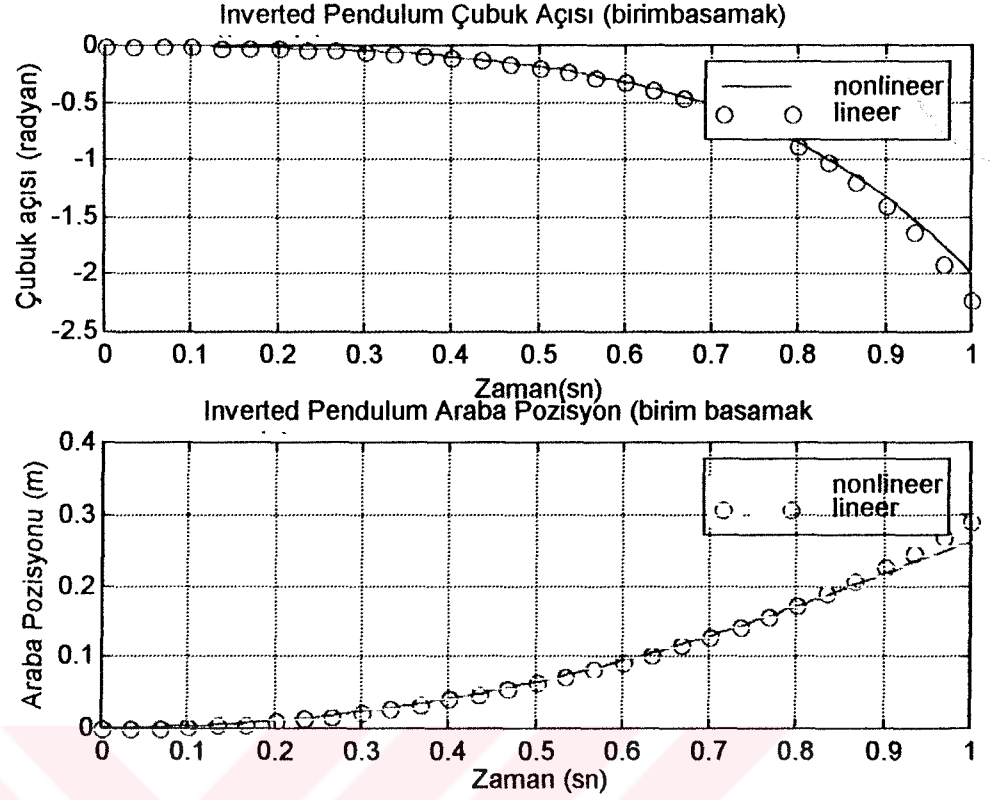
3.3 PID Kontrol Simulasyonu



Şekil 3-3 Sistemin açık çevrim blok diyagramı

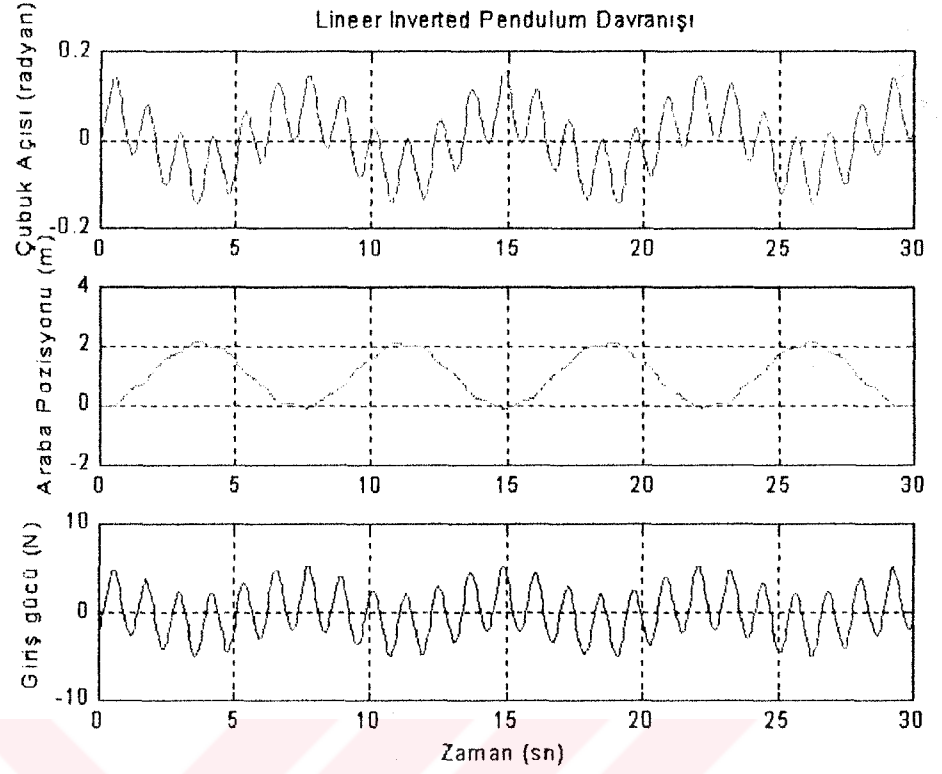


Şekil 3-4 Kapalı çevrim sistemin pid kontrolü



Şekil 3-5 Inverted pendulumun açık çevrim birim basamak cevabı

Sistem kararsız olduğu için sadece 1 saniyelik bölümü gerçekleştirilmiştir. Arabaya birim basamak uygulandığında, $u(t)$, arabanın pozisyonu artar ve pendulum saat yönünde düşmeye başlar. Burada simülasyonların sonlarına doğru lineer ve nonlinear model arasındaki farkın arttığı görülür. Lineer model $z_0=0$ noktasında lineerleştirilmesine rağmen, referans noktadan küçük sapmalar göstermesi hesaba katılabilir bir olaydır.



Şekil 3-6 Kapalı çevrim sistemin simulasyon sonuçları

Sistemde çubuk geribeslemesi için oransal kazanç sabiti -50, araba pozisyonu geribeslemesi için oransal kazanç sabiti -2'dir. Bununla birlikte sistemin performansı tatmin edici değildir. Buna karşın sistemin sınırlı bir cevabı vardır ve sistem marjinal kararlıdır.

4 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ) DA DURUM GERİBESLEME KONTROLÖRÜ TASARIMI

4.1 Giriş

Klasik kontrol yöntemlerinin gösterdikleri düşük performansdan dolayı burada, durum geribesleme metodunu uygulayacağız. Bu metod da klasik kontrolör dizaynlarının aksine, çıkış ve hatayı kontrol etmek yerine sistemin durumların kontrol edilir.

Klasik kontrol yöntemlerinin birinci dezavantajı yalnızca tek değişkenli sistemlere uygulanabilmesidir. Oysa ki N. dereceden sistemlerde açık çevrim durum matrisinin N adet özdeğeri, açık çevrim transfer fonksiyonunun N adet kutbu vardır. Bu özdeğer şu denklem ile bulunur.

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \quad \text{veya} \quad \det(s \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$$

Eğer iyi bir kontrolör dizaynı yapılmış bir sistem isteniyorsa, N adet kutbun uygun noktalara getirilmesi gerekir. N. dereceden sistemin kontrol değişkenleri, önceden belirlenmiş olan yerlere yerleştirilebilir.

Bu mantıktan hareketle çıkışın geribeslemesi yerine bütün durum vektörlerini, x , geribesleyip K_s matris kazancıyla çarpabiliriz. Burada K_s durum geribesleme kazancıdır.

Bu durumda inverted pendulum sisteminin girişi,

$$u(t) = r_d(t) - \underline{K}_s^T \underline{x}(t)$$

4.1

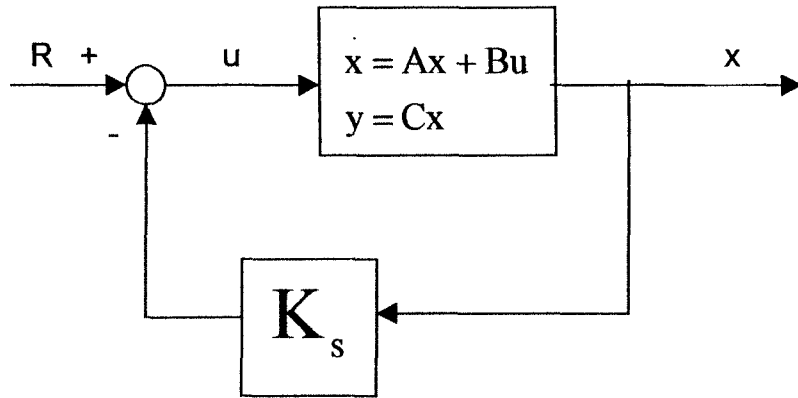
olur. Burada $\underline{K}_s$, N satır boyutunda bir matristir.

$$\underline{K}_s^T \underline{x} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

Kapalı çevrim sisteminin durum uzay formunu yukarıdaki $u(t)$ eşitliği ile yazarsak,

$$\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} r_d - \underline{b} \underline{K}_s^T \underline{x} = (\underline{A} - \underline{b} \underline{K}_s^T) \underline{x} + \underline{b} r_d \quad \text{ve} \quad y = \underline{c}^T \underline{x} \quad 4.2$$

olur. Bu sistemin blok diyagramı şekilde görülmektedir. Bu blok diyagram bir önceki blok diyagramdan oldukça farklıdır. Burada kazanç geribesleme çevrimindedir ve skaler bir kazanç yerine vektörel bir kazanç vardır. Bunlara ek olarak plantın iki çıkışı vardır; çıkış cevabı $y(t)$ ve durum vektörü $x(t)$. Sistemin blok şeması şekil 4-1 de görülmektedir.



Şekil 4-1 Sistemin durum geribesleme kontrolü

Bu durum kontrolü uygulanmış sistemin geçici cevabı $(A - bK_f^T)$ nin özdeğerleridir. Burada önemli olan nokta, değiştirilebilen geribesleme kazançları ile kutuplar istenilen noktaya yerleştirilebilir ve geçiş cevabı önceden istenilen noktaya ulaşabilir. Bu yüzden eğer sistem tam durum kontrolü yapılabilir ise kazanç matrisinin N elemanı istenilen noktalara yerleştirilebilir demektir. [Başbuğ,1995],[Chen,1998]

4.2 Tam Durum Kontrolü

Lineer zamanla değişmeyen bir sistemde,

$$\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \quad \text{ve} \quad y = \underline{c}^T \underline{x} \quad 4.3$$

dir. Eğer $t_0 < t < t_f$ aralığında $u(t)$ nin zorlamasız ve istenilen şekilde elde edilmesi mümkün ise bu sisteme kontrol edilebilir sistem denir. Eğer bütün durumlar kontrol edilebilir ise bu sistem tam durum kontrolü yapılabilir sistemdir denir.

Kayıp olmadığını düşünerek $x(t_f)=0$ ve $t_0=0$ olduğunu kabul edelim ve

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{b} u(\tau) d\tau$$

ifadesinin tam durum kontrolünü yapılabilirliğini tanımlamaya çalışalım

$$\underline{x}(t_f) = 0 = e^{\underline{A}t_f} \underline{x}(0) + \int_0^{t_f} e^{\underline{A}(t_f-\tau)} \underline{b} u(\tau) d\tau$$

veya

$$\underline{\underline{x}}(0) = - \int_0^t e^{-\underline{\underline{A}}\tau} \underline{\underline{b}} u(\tau) d\tau$$

Şimdi Sylvester'in interpolasyon formülü uygulanırsa,

$$e^{\underline{\underline{A}}\tau} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(\tau) \underline{\underline{A}}^k \quad 4.4$$

ve

$$\underline{\underline{x}}(0) = - \sum_{k=0}^{N-1} \underline{\underline{A}}^k \underline{\underline{b}} \int_0^t \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = - \sum_{k=0}^{N-1} \underline{\underline{A}}^k \underline{\underline{b}} \beta_k$$

elde ederiz veya

$$\underline{\underline{x}}(0) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{b}} & \underline{\underline{A}}\underline{\underline{b}} & \underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{b}} & \cdots & \underline{\underline{A}}^{N-1}\underline{\underline{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{bmatrix}$$

Eğer vektörler $\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{A}}\underline{\underline{b}}, \dots$ lineer ise bu sistem istenilen kontrolü sağlayacak bir sistemdir veya

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{b}} & \underline{\underline{A}}\underline{\underline{b}} & \underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{b}} & \cdots & \underline{\underline{A}}^{N-1}\underline{\underline{b}} \end{bmatrix} \quad 4.5$$

rankı N ise. Bu matrise kontrol edilebilirlik matrisi denir. Bu durumda inverted pendulum sisteminin kontrol edilebilir olup olmadığını kontrol edelim.

Sistemin durum denklemi;

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u$$

4 adet kontrol edilecek durum olduğu için, plantın kontrol edilebilirlik matrisi,

$$M = [b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b]$$

olur. Bu durumda M'yi çözersek,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0.4905 \\ 5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix}$$

M nin rankı ise 4 tür. Böylece rank(M)=N olduğu için sistem kontrol edilebilir bir sistemdir.

4.3 Kutup Yerleştirimi

Durum geribeslemesi kontrolünü yerine getirebilmek için en iyi çözüm kutup yerleştirimi tekniğini kullanmaktır. Temel düşüncesi N adet kutbun istenilen yerini belirlemek ve bu kutupları yerleştirmek için durum kazanç matrislerinin, N adet elemanını bulmaktır. Burada sistem denkleminin çözümü kazanç matrisinde istenilen elemanların olmasıyla mümkündür.

Bu çözümün prosedürü ise şöyledir.

1. Kontrol edilebilir matrisin rankı (N) bulunur.
2. Kapalı çevrim sistemin istenilen kutupları belirlenir.
3. Bu kutuplar ile istenilen karakteristik denklem oluşturulur.

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_N) = s^N + \alpha_1 s^{N-1} + \cdots + \alpha_N = 0$$

4. Son olarak kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi, $\det(sI - (A - bK_s^T)) = 0$ çözülür ve istenilen karakteristik denklem ile eşitlenerek, K_s^T matrisinin N adet bilinmeyen elementi bulunur.

Burada kapalı çevrim kutuplarımız sol yarı düzlemde ve $-5.0 \pm 10.0j$, -5 ve -6 dır. Kutup yerleştirimi için seçiminiz keyfi olabilir fakat belirtilen $-5.0 \pm 10.0j$ gibi akla uygun bir seçim olmalıdır. Bu durumda sistemin dinamik özellikleri;

Kutup yerleştirimi,

$$\mu_{1,2} = -5.0 \pm 10j = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

burada

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$|\mu| = \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} = \omega_n$$

Doğal frekans,

$$\omega_n = \sqrt{(5.0)^2 + (10.0)^2} = 11.18$$

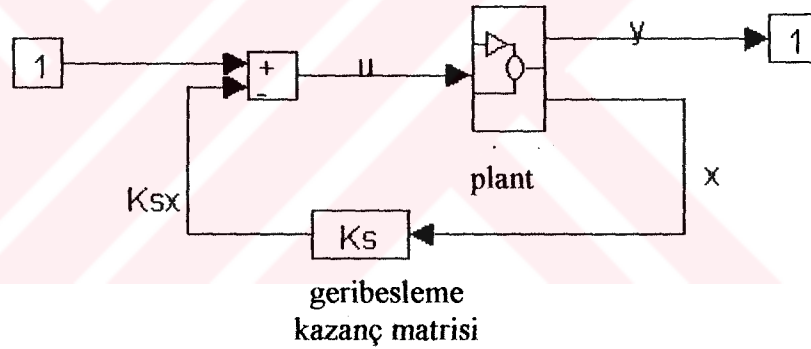
$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{5.0}{11.18} = 0.447$$

Maksimum aşım, yükselme zamanı ve yerleşme zamanı,

$$t_r = \frac{1.8}{11.18} \approx 0.16 \text{ sn} \quad t_s = \frac{4.6}{5.0} = 0.92 \text{ sn}$$

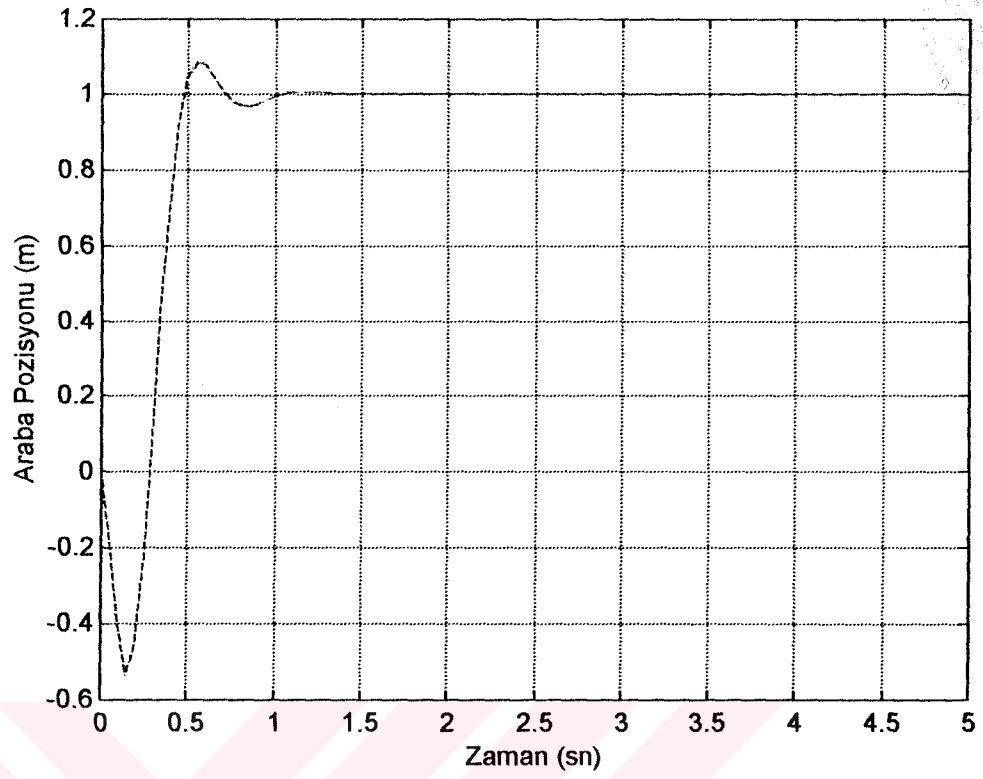
Böylece 1 sn civarında bir yerleşme zamanı ve %20 civarında bir aşım istenilen geribesleme kazancı belirlemek için kullanılmıştır.

4.4 Durum Uzayı Kontrol Simulasyonu

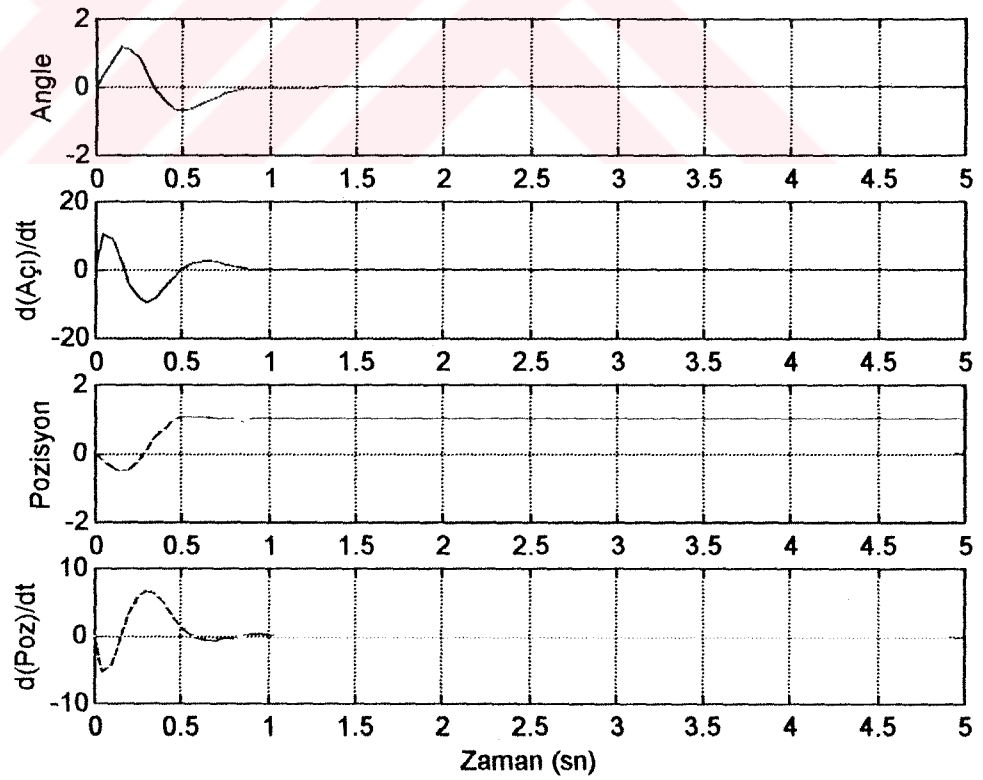


Şekil 4-2 Sistemin durum geribesleme blok diyagramı

Sistemin cevabı umulduğu gibidir. Arabanın ilk negatif hareketi çubuğun dik halde saat yönündeki hareketi için gereklidir. Kısa bir süre sonra araba +x yönünde hareket etmeye başlar ve sonunda referans olarak $x=1\text{m}$ 'de yerleşir. Burada aşım ve yerleşme zamanı istenilen düzeydedir. $x(t)$ dışındaki tüm durumlar sıfıra geri döner.



Şekil 4-3 Durum geribeslemeli Inverted Pendulum(Araba Pozisyonu)



Şekil 4-4 Inverted Pendulum için durumlar(durum geribeslemesi)

5 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ)UN ADAPTİF KONTROLU

5.1 Durum Gözlemleyicisi

Durum geribesleme kontrolündeki problem durum vektörlerinin her elementi geribesleme yolunda kullanıldığında, gerçek sistemlerde bazı durumların kolayca ölçülemeyişidir. Bazı durumlarda sadece birkaç durum fiziksel değerden elde edilebilir. Durum gözlemleyicisi olmadan bunları telafi etmek mümkün değildir.

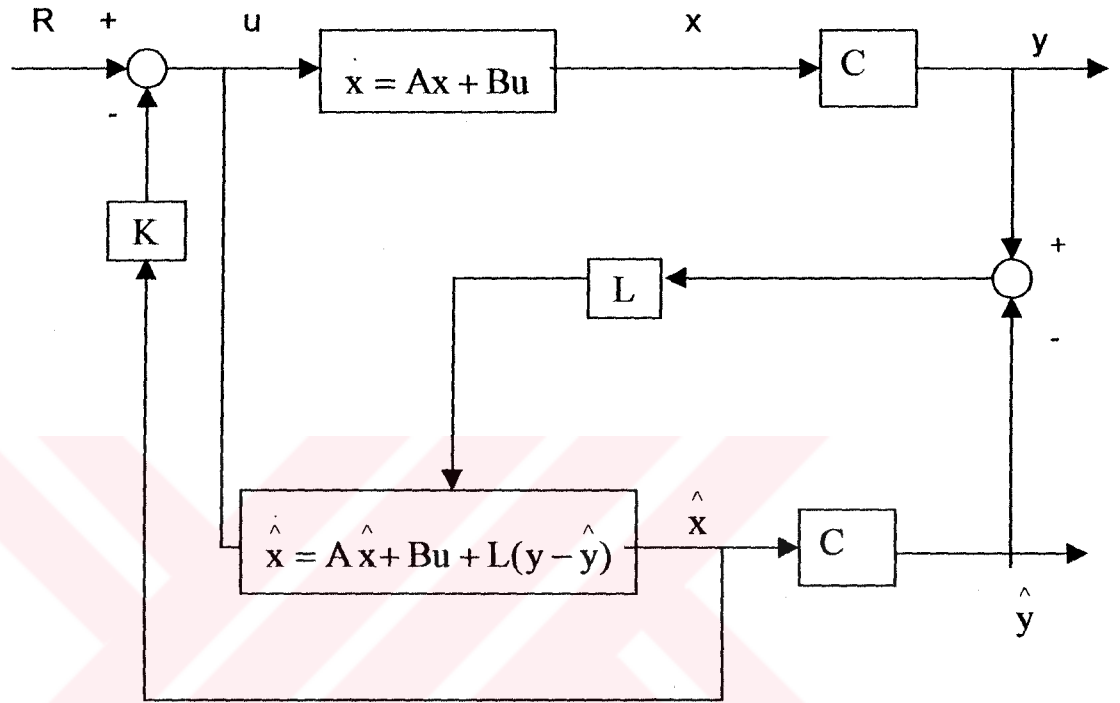
Burada tek yol sistemin matematiksel simülasyonunu kullanarak ölçülemeyen durumları tahmin etmektir. Bu yaklaşımla sistem modeline, durum tahmini yapan durum gözlemleyicisi eklemeye ihtiyacımız vardır. Böylece ölçülebilen bazı durumları tahmin yöntemi ile hesaplayarak geliştirmiş oluruz.

Daha iyi anlamak için bir sistem dinamiğini ele alalım. Burada sadece sistemin çıkışı ölçülen bir niceliktir ve bu durum gözlemleyiciye gelir ve buradan durum tahmini işlemi gerçekleştirilir.

Burada $\hat{x}(t)$ herhangi bir t anındaki $x(t)$ durumunun tahmin edilerek yeniden sunulmuş değeridir. Şekilde durum gözlemleyicisi görülmektedir. $u(t)$ ve $y(t)$ giriş parametreleridir. Çıkış ise zamana karşı tahmin edilmiş durum vektörüdür.

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = \underline{A} \hat{x} + \underline{b}u + \underline{L}(y - \underline{c}^T \hat{x}) = (\underline{A} - \underline{Lc}^T) \hat{x} + \underline{b}u + \underline{L}y$$

L sistemin durum geçiş matris karakteristięi üzerinde belirlenmiş olan kazanç matrisidir. Buna durum gözlemleyici kazanç matrisi denir.



şekil 5-1 Sistemin durum gözlemleyici modeli

Bu dizayn problemi durum geribesleme kontrolündeki yapıya benzerdir. Burada durum tahmincisinin özdeğerleri olarak seçilen L, kapalı çevrim sisteminin dinamiklerine göre daha hızlı karşılaştırma yapar ve daha dayanıklıdır. Durum gözlemleyicinin özdeğerlerini,

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c}^T)) = 0$$

5.2

şeklinde hesaplarız. Eğer sistemde durum geribesleme kontrolörü ile durum gzlemleyicisini birleştirirsek şekil 5-1 deki sistemi elde ederiz. Bu sistem için plant girişini yazılırsa

$$u(t) = r_d(t) - \underline{K}_f^T \hat{\underline{x}}(t)$$

Şimdi lineerleştirilmiş plant ile durum gözlemleyicisi aynı durum uzay matrisinde karakterize edilirse,

$$\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \quad \text{ve} \quad y = \underline{c}^T \underline{x} \quad 5.4$$

denklem 5.3 ü burada yerine yazılırsa plant dinamiği şöyle olur:

$$\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} r_d - \underline{b} \underline{K}_f^T \hat{\underline{x}} \quad 5.5$$

Aynı şekilde durum gözlemleyicisi için denklem 5.3, 5.1 de yerine yazılırsa gözlemleyici dinamiğini elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \hat{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{L} \underline{c}^T) \hat{\underline{x}} + \underline{b} r_d - \underline{b} \underline{K}_f^T \hat{\underline{x}} + \underline{L} \underline{c}^T \underline{x}$$

veya

$$\frac{d}{dt} \hat{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{b} \underline{K}_f^T - \underline{L} \underline{c}^T) \hat{\underline{x}} + \underline{b} r_d + \underline{L} \underline{c}^T \underline{x} \quad 5.6$$

Hata vektörünü bulmak için , $e = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$, formülü elde edilmelidir. Bu yüzden denklem 5.5 ile 5.6 nın farkı alınırsa hata dinamiğini bulunur.

$$\frac{d}{dt} \underline{e} = (\underline{A} - \underline{L} \underline{c}^T) \underline{e} \quad 5.7$$

Bu ifadeye göre durum matrisinin özdeğerlerinde negatif kısımlar var ise güçlü olamayan kararlı bir sistemi temsil eder. Bu durumda büyük t ler için $e(t)$ sifıra dolayısıyla $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ ye yaklaşır.

Hata vektörünü $(A - Lc^T)$ nin özdeğerleri belirlediği için L 'nin N adet elemanı istenilen geçiş cevabını vermek için değişmiş olabilir. Eğer sistem tam durum gözlemlenebilirliğe sahip ise kazanç matrisinin N elemanı, $(A - Lc^T)$ nin N özdeğeri için istenilen noktaları vermek için belirli olmalıdır. [Yoo and Ham,1998]

5.2 Durum Gözlemlenebilirliği

$t_0 \leq t \leq t_f$ sonlu zaman aralığında her durum $y(t)$ 'nin gözlemlenmesinden dolayı belirli ise bu sistem tam durum gözlemlenebilir bir sistemdir. Şimdi yine sistemimizi ele alalım. Bu sistemin zaman domeni çözümü şöyle yazılabilir.

$$y(t) = \underline{c}^T e^{At} \underline{x}(0) + \underline{c}^T \int_0^t e^{A(t-\tau)} \underline{b} u(\tau) d\tau \quad 5.8$$

Eğer $u(t)=0$ kabul edersek bu ifadeyi şu şekilde indirgeyebiliriz.

$$y(t) = \underline{c}^T e^{At} \underline{x}(0) \quad 5.9$$

Burada $\underline{c}^T e^{At}$ biliniyor ve $y(t)$ ölçülebilir. Bu nedenle gözlemlenebilirlik ifadesi, birkaç zaman periyodu üzerinde $y(t)$ 'nin gözlemlenebilmesi için $x(0)$ 'ın belirlenebilmesiyle ilgilidir. Böylece zamana bağlı işlemlerde birkaç ölçüm yapıldığı ve zamana bağlı integral alındığında bütün bilgileri elde etmek mümkün olduğu için sadece ilk durumu bulmak $x(0)$, yeterli olacaktır.

Denklem 5.9 un her iki tarafı bilinen katsayı matrisinin transpozu ile çarpılırsa,

$$\left(\underline{c}^T \underline{e}^{At}\right)^T \underline{y} = \left(\underline{c}^T \underline{e}^{At}\right)^T \underline{c}^T \underline{e}^{At} \underline{x}(0)$$

transpozu alınmış matris düzenlenirse

$$\left(\underline{c}^T \underline{e}^{At}\right)^T = \left(\underline{e}^{At}\right)^T \underline{c}^{TT} = \underline{e}^{AT} \underline{c}$$

ve yeniden denkleme 4-9 a eklenirse şu kontrol edilebilir ifadeler elde edilir:

$$\underline{e}^{AT} \underline{c} \underline{y} = \underline{e}^{AT} \underline{c} \underline{c}^T \underline{e}^{At} \underline{x}(0)$$

Her iki taraf gözlemlene zamanına göre integral alınır ve şu şekilde düzenlenirse,

$$\underline{Q} = \underline{W} \underline{x}(0) \quad 5.10$$

elde edilir. Burada,

$$\underline{Q} = \int_0^t \underline{e}^{AT\tau} \underline{c} \underline{y}(\tau) d\tau \quad \text{ve} \quad \underline{W} = \int_0^t \underline{e}^{AT\tau} \underline{c} \underline{c}^T \underline{e}^{A\tau} d\tau \quad 5.11$$

sonuçta $\underline{x}(0)$ için denklem 5.10 çözülürse,

$$\underline{x}(0) = \underline{W}^{-1} \underline{Q} \quad 5.12$$

Eğer $\underline{W}$ singular değilse, $\underline{y}(t)$ nin gözlemlenmesiyle bulunabilir ve sisteme tam durum gözlemlenebilir sistem denir.

Gözlemlenebilirlik testi final formuna eklenirse, Sylvester'in enterpolasyon formülü ile aşağıdaki eksponansiyel matris elde edilir.

$$\underline{c}^T e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(t) \underline{c}^T \underline{A}^k = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{N-1}] \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{A} \\ \underline{c}^T \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A}^{N-1} \end{bmatrix}$$

ve

$$e^{\underline{A}^T t} \underline{c} = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k(t) \underline{A}^{T^k} \underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{A}^T \underline{c} & \underline{A}^{T^2} \underline{c} & \dots & \underline{A}^{T^{N-1}} \underline{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{bmatrix}$$

Şunu ifade edelim,

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{A} \\ \underline{c}^T \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A}^{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \underline{\underline{H}}^T = \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{A}^T \underline{c} & \underline{A}^{T^2} \underline{c} & \dots & \underline{A}^{T^{N-1}} \underline{c} \end{bmatrix}$$

5.13

$\underline{\underline{H}}^T$ (bazen $\underline{\underline{H}}$ gözlemlenebilirlik matrisi şeklinde de ifade edilebilir. $\underline{\underline{H}}^T$ nin rankı N ise, W katsayı matrisi singular olmayacaktır ve sistem tam durum gözlemlenebilir bir sistemdir.

Şimdi sistemimizin gözlemlenebilirliğini inceleyelim.

$$H^T = \begin{bmatrix} c & A^T c & A^{T^2} c & A^{T^3} c \end{bmatrix}$$

bu denlem çözülürse,

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 20.601 & -0.4905 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20.601 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank(H)=4 olduğundan bu sistem gözlemlenebilir bir sistemdir.

5.3 Gözlemleyici Kazancının Belirlenmesi

Gözlemleyici matrisinin elemanlarını bulmak için izlenilen prosedür kutup yerleştirimi metodundaki gibidir. Bu nedenle durum tahmincisinin hata dinamiği için bir kutup yerleştirimi belirlenir. Bu seçim bir dereceye kadar keyfidir ama bütün dinamikler plant dinamiğiyle hızlı karşılaştırmış olmalıdır. Eğer sistem tam durum gözlemlenebilir ise $(A-Lc^T)$ nin N adet özdeğerleri, L gözlemleyici kazanç matrisinin N elemanının belirlenmesine müsaade etmelidir.

Prosedür şöyle özetlenebilir;

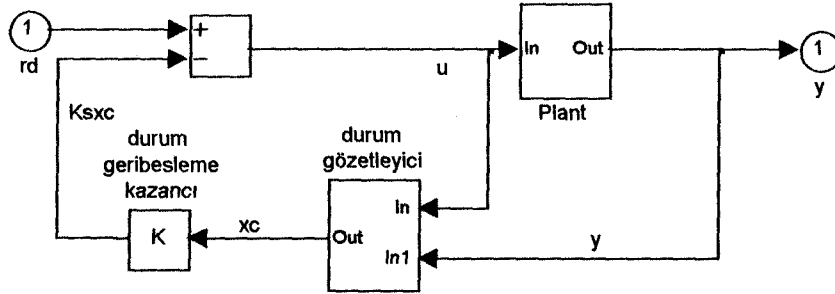
1. Gözlemlenebilir matrisinin rankının N olduğunu kontrol et.
2. $\hat{e} = x - \hat{x}$ hata vektörü için istenilen kutup yerleşimlerini belirle.
3. Bu kutuplarla istenilen karakteristik denklemi oluştur.

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_N) = s^N + \alpha_1 s^{N-1} + \cdots + \alpha_N = 0$$

4. $\det(sI - (\underline{A} - \underline{L}\underline{c}^T)) = 0$ ile verilen durum hata vektörü için karakteristik denklem oluştur ve istenilen karakteristik denklemin

katsayıları ile eşitle. Bu durumda L'nin N bilinmeyen elemanı için N denklem oluşur.

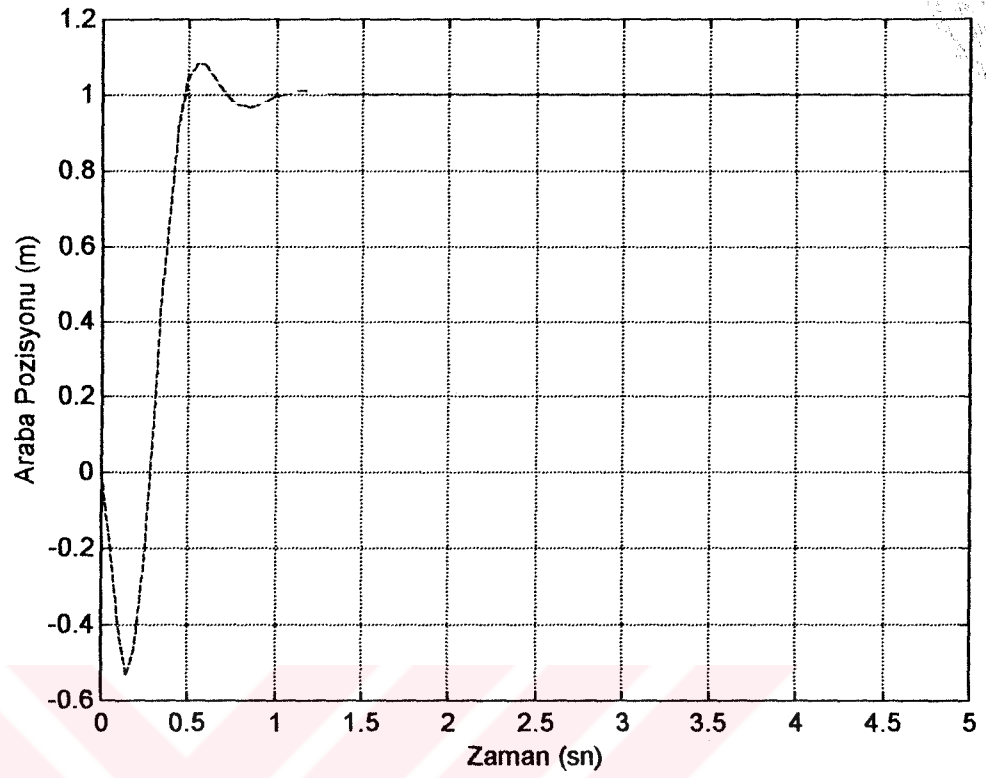
5.4 Adaptif Kontrol Simulasyonu



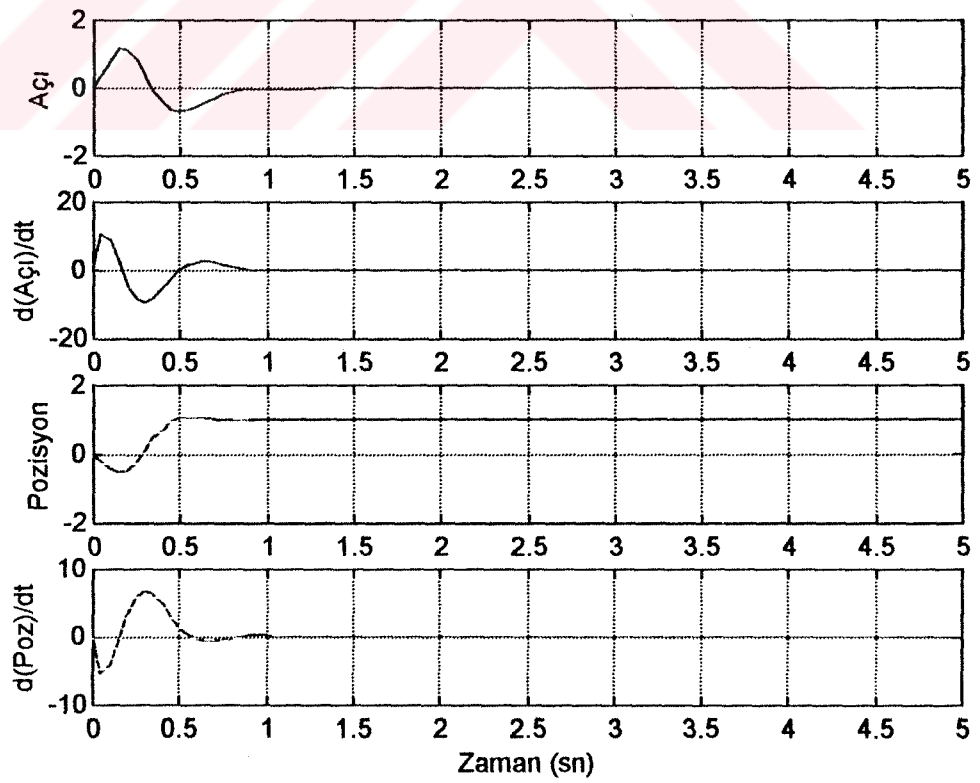
Şekil 5-2 Sistemin blok diyagramı

Bu işlemler inverted pendulum için uygulanmıştır. Burada gözlemleyici kutupları plant kutuplarından iki kat daha hızlı olarak dizayn edilmiştir. Durum geribeslemeli ve gözlemleyicili sistemin simulasyon sonuçları aşağıdaki şekillerde görülmektedir.

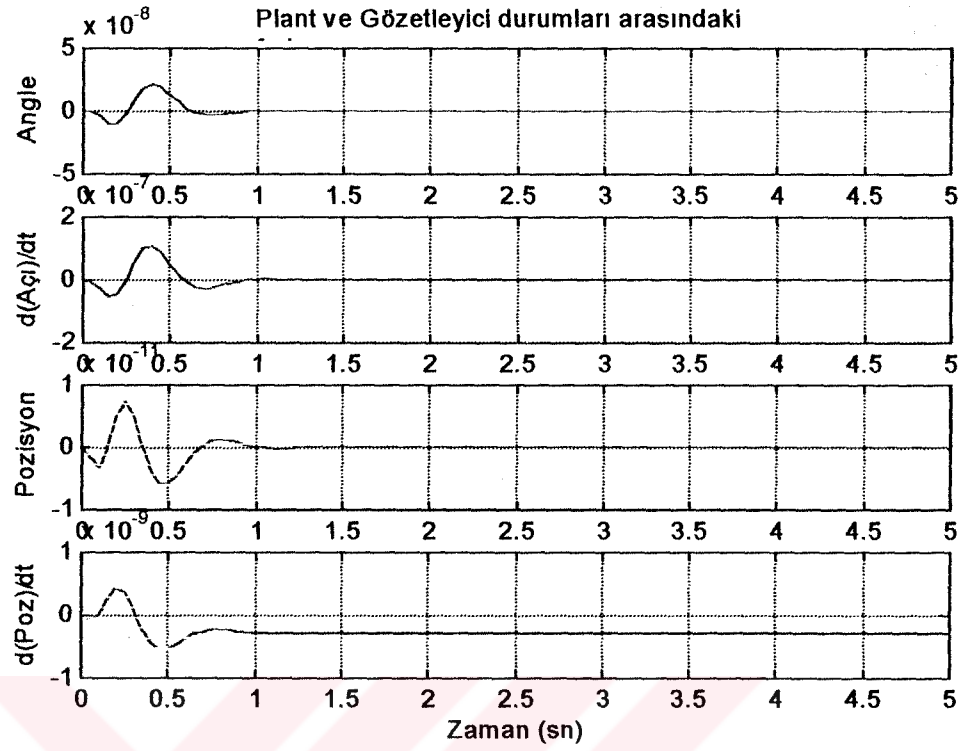
Şekil 5-3 arabanın pozisyonu, şekil 5-4 ise bütün durumların cevaplarını göstermektedir. Araba pozisyonunu incelersek, sistemin küçük bir aşım yapmasına karşın, yaklaşık 1 sn içerisinde istenilen seviyeye geldiğini görürüz. Aynı şekilde pendulum da yaklaşık 1 sn içerisinde referans noktasına yerleşmiştir. Bu sonuçlara göre sistem istenilen performansı yakalamıştır.



Şekil 5-3 Durum kontrolörü & gözlemleyici (Araba Pozisyonu cevabı)

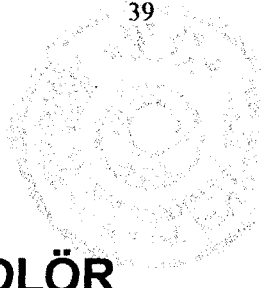


Şekil 5-4 Inverted Pendulum için durumlar (Durum geribesleme/gözlemleyici)



Şekil 5-5 Plant ve gözlemleyici durumları arasındaki fark

Burada şekil 5-5 plant ile gözlemleyici arasındaki farkı göstermektedir. Buna göre gözlemleyici yaklaşık olarak 1 sn sonra plantın durumlarını doğru tahmin etmeye başlamıştır. Sistem çok küçük farklılıklar dışında plant ile gözlemleyici arasındaki farkı minimuma indirmiştir.



6 İNVERTED PENDULUM (TERS SARKAÇ)DA KAYAN KİPLİ KONTROLÖR TASARIMI

6.1 Kayan Kipli Kontrol (Sliding Mode Control)

Kayan Kipli Kontrol (Sliding Mode Control) ile Değişken Yapılı Kontrol (Variable Structure Control), 1950'lerin başında Rusya` da Emelyonov ve birkaç arkadaşı tarafından ortaya atılmıştır. Bunların bu ilk ilginç çalışmasında, sistem ikinci dereceden faz değişkeni biçiminde göz önüne alınmıştır. Bundan sonra, Değişken Yapılı Kontrol genel bir tasarım yöntemi olarak, geniş bir alanda uygulanmaya başlamıştır. Bu alanlardan bazıları şunlardır.

- Nonlineer sistemler
- Çok girişli çok çıkışlı (ÇGÇÇ/ MIMO) sistemler
- Ayrik zamanlı sistemler
- Büyük ölçekli sonlu boyutlu sistemler
- Skotastik sistemler

Ayrıca Değişken Yapılı Kontrol sistem kararlılığından başka, diğer pek çok kontrol sistemlerinde büyük ölçüde etkin olarak yaygınlaşmıştır. Değişken Yapılı Kontrol'un en belirgin özelliği, sistemleri dayanıklı (robust) kılma özelliğidir. Burada dayanıklılık yada değişmezlik (invariant) in anlamı sistem dış bozuculara (external disturbance) ve parametrik belirsizliklere (parametric uncertainly) karşı tümüyle duyarsızlık (insensitve) anlamına gelmektedir. Bugün Değişken yapıli kontrolün geniş bir alanda mühendislik sistemlerine uygulanmasına başlanmıştır.

6.2 Değişken Yapılı Kontrolün Temelleri

Değişken yapı kontrolün temel fikrini göstermek için ikinci dereceden bir sistem ele alınsın.

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = 2y - x + u$$

$$u = -\varphi x$$

6.1a

Burada

$$\varphi = 4, \quad s(x, y) > 0$$

$$\varphi = -4, \quad s(x, y) < 0$$

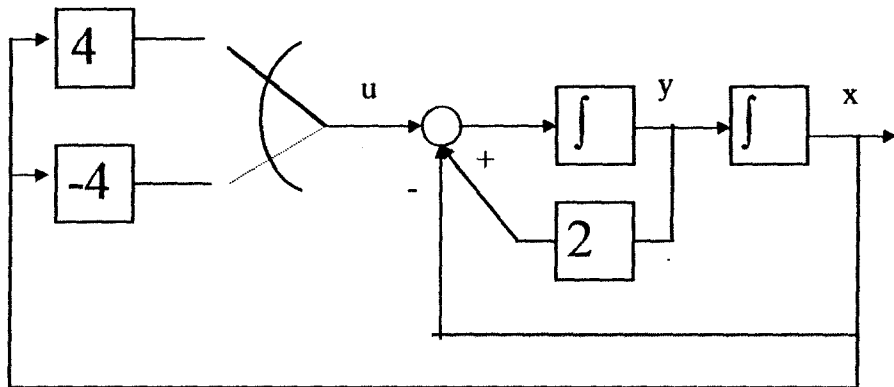
6.1b

ve

$$s(x, y) = x\sigma, \quad \sigma = 5x + y$$

6.1c

kabul edilsin.



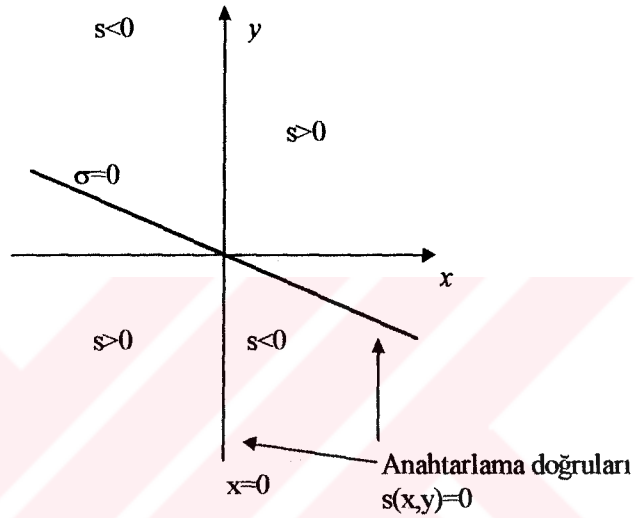
Şekil 6-1 Model sistemin blok diyagramı.

Bu sistemdeki $s(x,y)$ değişkeni şu iki fonksiyonun çarpımından oluşur.

$$x=0, \sigma = 5x+y=0$$

6.2

Bu fonksiyonlar $x - y$ faz düzlemini ikiye bölen doğrulardır.



Şekil 6-2 Anahtarlama doğruları

Burada $s(x,y)$ farklı bölgelerde farklı işaretlere sahiptir. Şekil 6.2 deki doğru denkleminde anahtarlama doğruları ve $s(x,y)$ fonksiyonuna da anahtarlama fonksiyonu denir. Bu doğruları $s(x,y)=0$ faz düzlemindeki noktaların bir kümesi olarak tanımlamakta mümkündür. Bu noktaların oluşturduğu kümeye anahtarlama yüzeyi (switching surface) denir.

Geribesleme kazancı φ , $s(x,y)$ fonksiyonunun işaretine göre anahtarlansak seçilir. Böylece 6.1a,b denklemi ile verilen sistem, iki farklı matematiksel model ile faz düzleminin iki farklı bölgesinde analitik olarak tanımlanır.

I. Bölgede:

$$s(x,y) = x\sigma > 0$$

model ise,

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = 2y - x - 4x = 2y - 5x$$

6.3

II. Bölgede:

$$(x,y) = x\sigma < 0$$

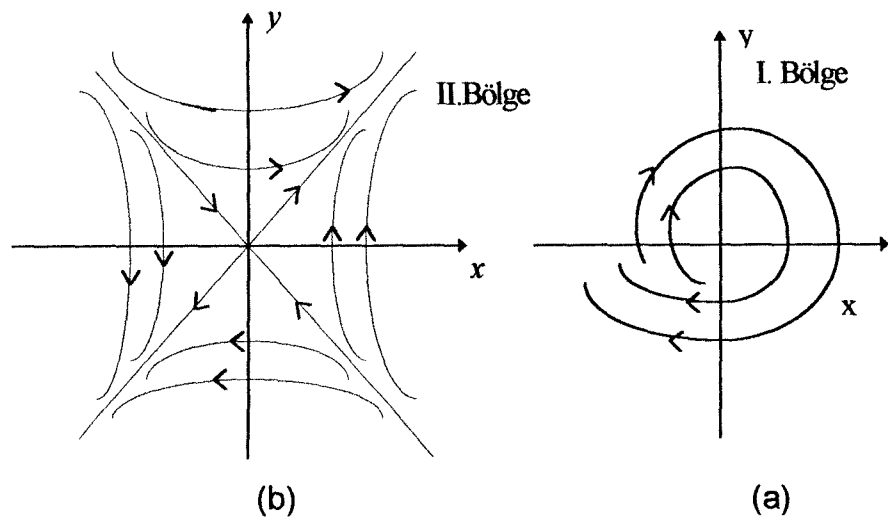
model ise ,

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = 2y - x + 4x = 2y + 3x$$

6.4

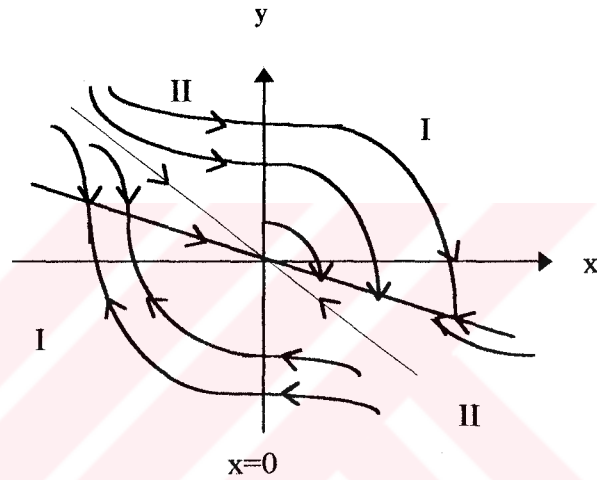
Denklem 6.3 ve 6.4 denklemleri için faz düzlemi yörüngeleri (faz portreleri) şöyledir.



Şekil 6-3 Faz portreleri

6.3 sisteminin denge noktası , orijinde *kararsız bir odak (unstable focus)* tır. 6.4 sisteminin denge noktası ise orijinde *eyer (semer)*dir. Bu da kararsız bir sistemdir.

Denklem 6.1a ve 6.1b deki sistemin faz portreleri; faz düzleminin I. bölgesinde denklem 6.2 için çizilmiştir ve II. bölgede ise denklem 6.3 için çizilmiştir. Bu iki sistemi bir arada gösterirsek tüm sistemin faz portresini elde ederiz. $s(x,y)=0$ daki sistem yörüngeleri tanımlanmak zorundadır.



Şekil 6-4 Kararsız iki sistemden karalı bir sistem elde etmek için yapılan bölgelere ayırma işleminde sonraki faz portreleri

$x = 0$ doğrusu üzerinde I. ve II. bölgenin faz yörüngeleri hiçbir belirsizlik olmaksızın birlikte birleşirler. Örneğin ;

$$\sigma = 5x+y= 0.5x + x=0 \quad (6.5)$$

doğrusu üzerinde olabilir. Bu bir dinamik denklemi göstermektedir. Bu, şekil 6.4. de gösterilen $\sigma = 0$ anahtarlama doğrusu boyunca bir faz portresi yörüngesidir.

Sistemin tam faz portresi, kararsız olan sistemlerdeki uygun kararlı olabilecek kısımların seçilmesiyle birleştirilerek kararlı bir sistem elde edilir. Bu işlemi kolaylaştıran etken anahtarlama yüzeyidir. Sistem anahtarlama yüzeyi üzerinde kararlıdır ve bu noktaların oluşturduğu $\sigma = 0$ olan özel yörüngeye kayma yüzeyi denir ve bu işlemede kayan kip yada kayma kipi denir.

Böylece bu sistemin faz yörüngesi genellikle iki kısımdan oluşur ve buda sistemin modunun (kipinin) olduğunu gösterir. İlk kısım erişim kipi (reaching mode)dir. Buna kayma olmayan kip (nonsliding mode) de denir. Burada durumlar faz düzleminin herhangi bir yerinden başlar sonlu bir zamanda anahtarlama doğrusuna yada yüzeyine erişir. İkinci kısım 6.5 diferansiyel denkleminde verildiği gibi, faz düzleminin orijinine doğru asimptotik olarak giden yörüngelerdir ki buna kayma kipi denir. [Başbuğ,1994],[Young and Chen,1990]

Bu örnekte 4 temel unsur gözlemlenebilir ;

Faz düzleminin orijini sistemin denge durumunu gösterir. Kayma kipi ise, sistemin geçici hali süresince sistemin davranışını temsil eder. Diğer bir deyişle; $\sigma = 0$ ile tanımlanan doğru kayma kipinin olduğu süre içinde geçici hal cevabını tanımlar.

Kayma kipi süresince denklem 6.5 dinamiğinin yörüngeleri orijinal (asıl) modelden daha düşük derecelidir.

Kayma kipi süresince, sistem dinamikleri tek başına $\sigma=0$ doğrusunun tanımladığı parametrelerle yürütülür.

Kayma kipi bir yörüngedir. Bu yörünge denklem 6.3 ve 6.4 ile tanımlanan her iki yapının her ikisinde bir mirası değildir.

Kontrol işlemi boyunca, kontrol sistemi denklem 6.1a,b nin yapısı 6.3 yapısından bir diğer 6.4 yapısına doğru değişir. Böylece buna Değişken Yapılı Kontrol denir. Ancak şu unutulmamalıdır ki bir Değişken Yapılı Sistem , Kayan Kipli Kontrol olmaksızın da düzenlenebilir.

6.3 Değişken Yapılı Kontrol Problem inin Yapısı

Durum uzayında bir kontrol sistemi verilmiş olsun.

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)u \quad 6.6$$

Burada $\dim x = n$, $\dim u = m$ dir. m adet anahtarlama fonksiyonu $s(x)$ vektör formunda gösterilir. Bir Değişken Yapılı Kontrol şöyle bulunabilir ;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u^+(x, t) \dots\dots\dots s(x) > 0 \\ u(x, t) &= u^-(x, t) \dots\dots\dots s(x) < 0 \end{aligned} \quad 6.7$$

Bu erişme kipleri erişme şartlarını sağlar. Yani, sonlu zamanda $s(x)=0$ anahtarlama yüzeyine erişir.

Bu işlemin fiziksel anlamı şöyle açıklanabilir ;

Verilen sistemden daha düşük dereceli , istenen sistem dinamiklerini göstermek yada temsil etmek üzere bir anahtarlama yüzeyi $s(x) = 0$ tasarlanır.

Değişken yapılı bir kontrol kuralı $u(x,t)$, sonlu zamanda, sistem durumlarının anahtarlama yüzeyi dışındaki herhangi bir yerden, sistemin durumlarını erişim yüzeyine sürmek ya da götürmek için tasarlanır.

Anahtarlama yüzeyinde istenen sistem dinamiğini sağlayan kayma kipi oluşur. Bu yolla tüm Değişken Yapılı Sistemler global asimptotik kararlı olurlar.

6.4 İnverted Pendulumda Bozucu Etkinin Hesaba Katılması

Kayan kipli kontrolör tasarımından önce inverted pendulum rüzgar efektinden dolayı oluşan bozucu etkisi hesaba katılacak ve simulasyon sonuçları incelenecektir. Pendulumu etkileyen yatay rüzgar gücünü F_w olarak ifade edelim. Bu ek güç bileşeni, ile orijinal güç dengesini tekrar oluşturalım

$$M \frac{d^2}{dt^2} x + m \frac{d^2}{dt^2} x_G = u + F_w \quad 6.8$$

Bu denklem düzenlenirse

$$(M + m) \ddot{x} - m \ell \sin \theta \ddot{\theta} + m \ell \cos \theta \dot{\theta}^2 = u + F_w \quad 6.9$$

elde edilir. Benzer şekilde rüzgarın neden olduğu saat yönündeki tork $(F_w \cos \theta) \ell$, tork denge denkleminde yerine yazılırsa,

$$(F_x \cos \theta) \ell - (F_y \sin \theta) \ell = (mg \sin \theta) \ell + (F_w \cos \theta) \ell \quad 6.10$$

elde edilir. Bu denklemi tekrar düzenirse

$$M \ddot{x} \cos \theta + m \ell \ddot{\theta} = mg \sin \theta + F_w \cos \theta \quad 6.11$$

elde edilir. Denklem 6.9 ve 6.10 yatay rüzgar etkisini içine alan yeni sistemin dinamik denklemlerini ifade eder. Bu iki nonlineer denklemi durum uzay formuna dönüştürmek için şu işlemleri gerçekleştirelim.

Birinci tork denge ifadesinden $m\ell\ddot{\theta}$ yı çekip güç denge denklemindeki yerine koyalım

$$m\ell\ddot{\theta} = mg\sin\theta + F_w\cos\theta - m\ddot{x}\cos\theta$$

ve

$$[M + m - m\cos^2\theta]\ddot{x} = u + m\ell\sin\theta\ddot{\theta} - mg\sin\theta\cos\theta + F_w\sin^2\theta$$

elde edilir. Burada son terime şu yazılmıştır.

$$F_w\sin^2\theta = F_w - F_w\cos^2\theta$$

İkinci tork denge denkleminde $\ddot{x}$ i çekip güç denge formülüne koyarsak,

$$\ddot{x} = \frac{mg\sin\theta + F_w\cos\theta - m\ell\ddot{\theta}}{m\cos\theta}$$

ve

$$(M + m)\frac{mg\sin\theta + F_w\cos\theta - m\ell\ddot{\theta}}{m\cos\theta} - m\ell\sin\theta\ddot{\theta} + m\ell\cos\theta\ddot{\theta} = u - F_w$$

her iki tarafı da $\cos\theta$ ile çarpalım,

$$\begin{aligned} [m\ell \cos^2 \theta - (M+m)\ell] \ddot{\theta} = \\ u \cos \theta - (M+m)g \sin \theta + m\ell \cos \theta \sin^2 \theta - \left(\frac{M+m}{m} \right) F_w \cos \theta + F_w \cos \theta \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bütün bu elemetleri durum vektörü formuna dönüştürürsek,

$$\frac{d}{dt} \underline{z} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{u \cos z_1 - (M+m)g \sin z_1 + m\ell (\cos z_1 \sin^2 z_1) z_2^2 - \frac{M}{m} F_w \cos z_1}{m\ell \cos^2 z_1 - (M+m)\ell} \\ z_4 \\ \frac{u + m\ell (\sin z_1) z_2^2 - mg \cos z_1 \sin z_1 + F_w \sin^2 z_1}{M+m-m\cos^2 z_1} \end{bmatrix} \quad 6.12$$

Bu ifadeye dikkat edersek rüzgarsız olan durum uzayına çok benzediği görülür. Sadece burada ek olarak F_w gücü iki denkleme de eklenmiştir.

Lineerleştirilme işlemleri de daha önce açıklandığı üzere yapılabilir. Jacobien matrisi $\underline{z}_0 = \underline{0}$ ve $\underline{u}_0 = 0$ referans noktasında değerlendirilirse,

$$\frac{d}{dt} \delta \underline{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{M+m}{M\ell} \right) g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{Mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \underline{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \delta u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta F_w \quad 6.13$$

elde ederiz. Bu matrissel gösterilimde, arabaya uygulanan kuvvet ve yatay rüzgar kuvveti inverted pendulumun açık çevrim lineer modeli içindir. Bu iki giriş uygulama rahatlığı için ayrı ayrı yazılmıştır. Bu formatta LTI sistemi şöyle yazılabilir

6.5 Kayan Kipli Kontrolör

Kayan kipli kontrolör iki kısımdan oluşmaktadır. Bunlardan birincisi eşdeğer kontrol olarak adlandırılan ortalama bileşen ve diğeri yüksek frekanslı bileşenlerden oluşur.

Kayma yüzeyi;

$$s = \{x : \sigma(x, t) = 0\} \quad 6.14$$

seçilsin. Burada,

$$\sigma = G(x_{\text{ref}} - x) = Ge \quad 6.15$$

dir. x_{ref} referans veya istenen durum vektörüdür. Bu denklem şu biçimde de yazılabilir;

$$\sigma = \phi(t) - \varphi(x) \quad 6.16$$

Burada, $\phi(t) = Gx_{\text{ref}}$ ve $\varphi(x) = Gx$ dir. Ayrıca $G = \partial\phi(x) / \partial t$ türevine eşittir. Yukarıdaki denklemin türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse bu çözüme eşdeğer kontrol denir. Diğer bir değişle kayma fonksiyonun türevini sıfır yapan kontrole eşdeğer kontrol denir. Bu denklemin türevi;

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

olur. Bu denklemde dx/dt yerine eşiti yazılırsa;

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\phi}{dt} - G(f(x, t) - Bu + d(t))$$

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{u=u_{eq}} = \frac{d\phi}{dt} - G(f(x,t) - Bu_{eq} + d(t)) = 0$$

burada denklem $d(t)$ bozucuyu temsil etmektedir. Sonuç olarak eşdeğer kontrol u_{eq} ;

$$u_{eq} = -(GB)^{-1} \left[Gf(x,t) + Gd(t) - \frac{d\phi}{dt} \right] \quad 6.17$$

bulunur.

Ayrık zaman gerçeklemlerinde çatırtı kaçınılmaz bir durumdur. Burada çatırtıdan kaçınmak için sisteme ideal röle kontrolü eklenmiştir. Bu durumda

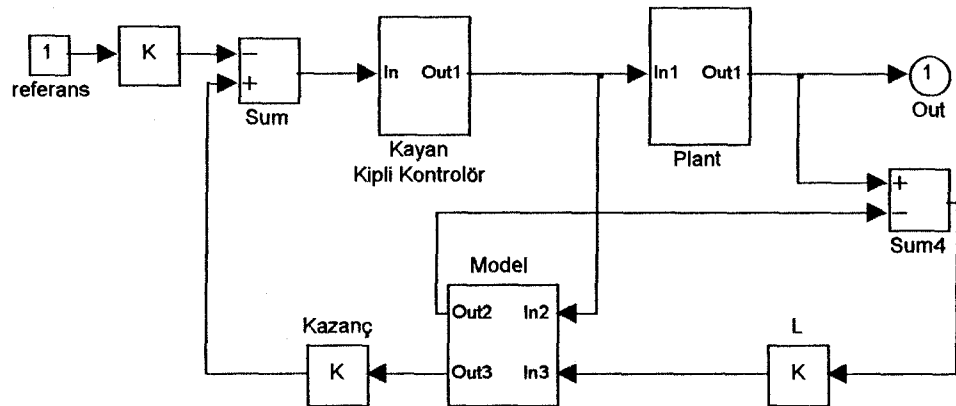
$$u = u_{eq} + \Delta u$$

$$u = -(GB)^{-1} \left[Gf(x,t) + Gd(t) - \frac{d\phi}{dt} \right] + h \cdot \text{sgn}(s) \cdot \eta$$

Kontrol işaretini elde ederiz. Burada h şunu ifade eder.

$$h = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases}$$

6.6 Adaptif Kayan Kipli Kontrol Simulasyonu



Şekil 6-5 Adaptif kayan kipli sistemin blok diyagramı

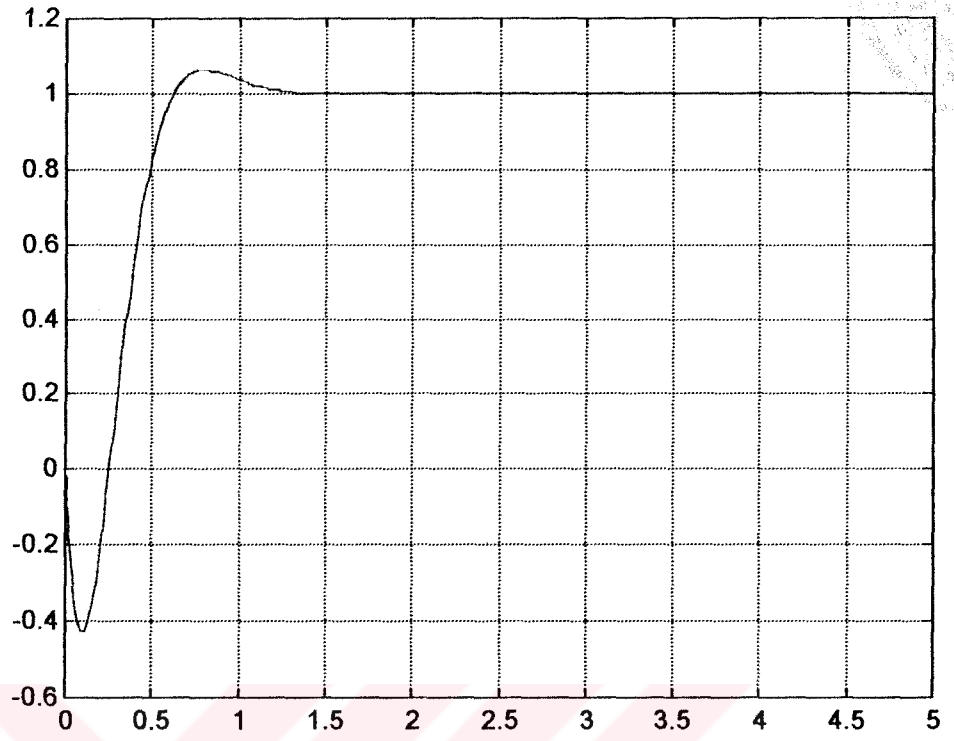
Sistem parametrelerimiz şunlardır:

$$G=10$$

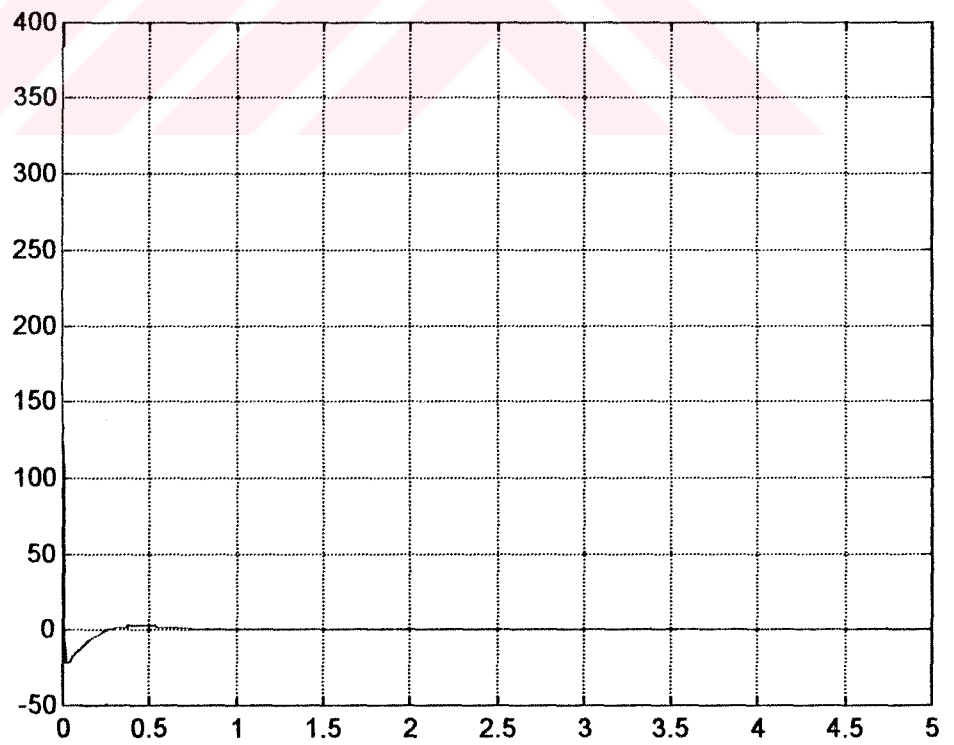
$$d(t)=0.5 \text{ N}$$

$$\eta=0.03$$

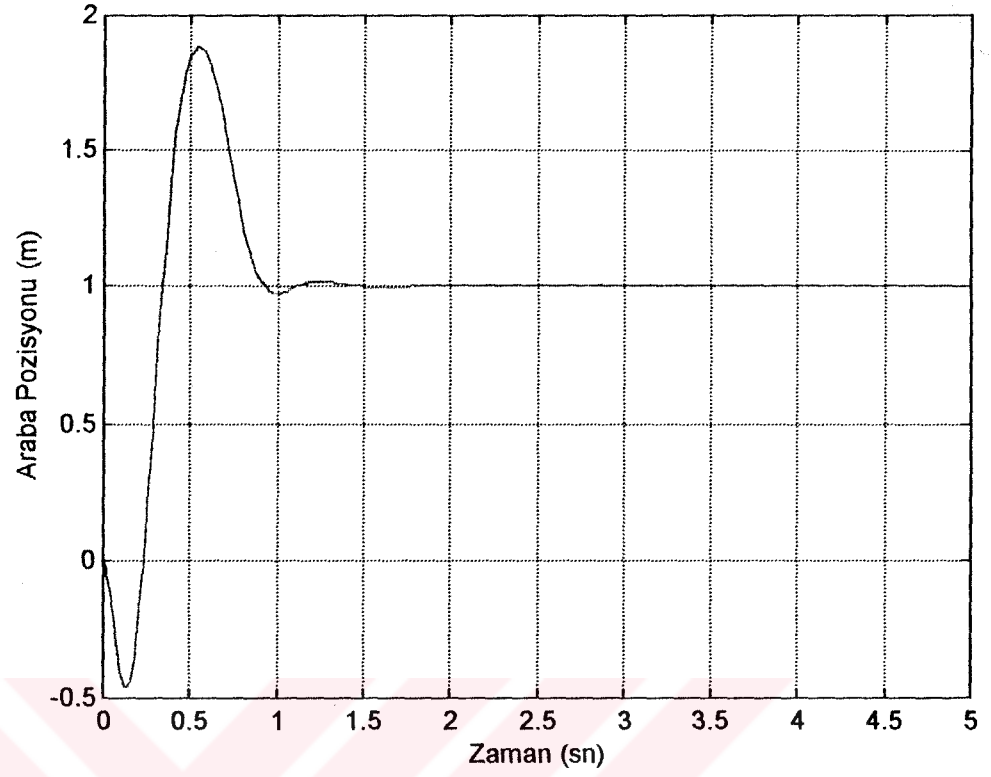
Burada G kazanç sabitidir . $d(t)$ ise bozucu kuvvettir. Bozucu olduğu durumda, sistemin istenilen kararlılığı elde edilmiştir. Simulasyon sonuçları aşağıda görülmektedir.



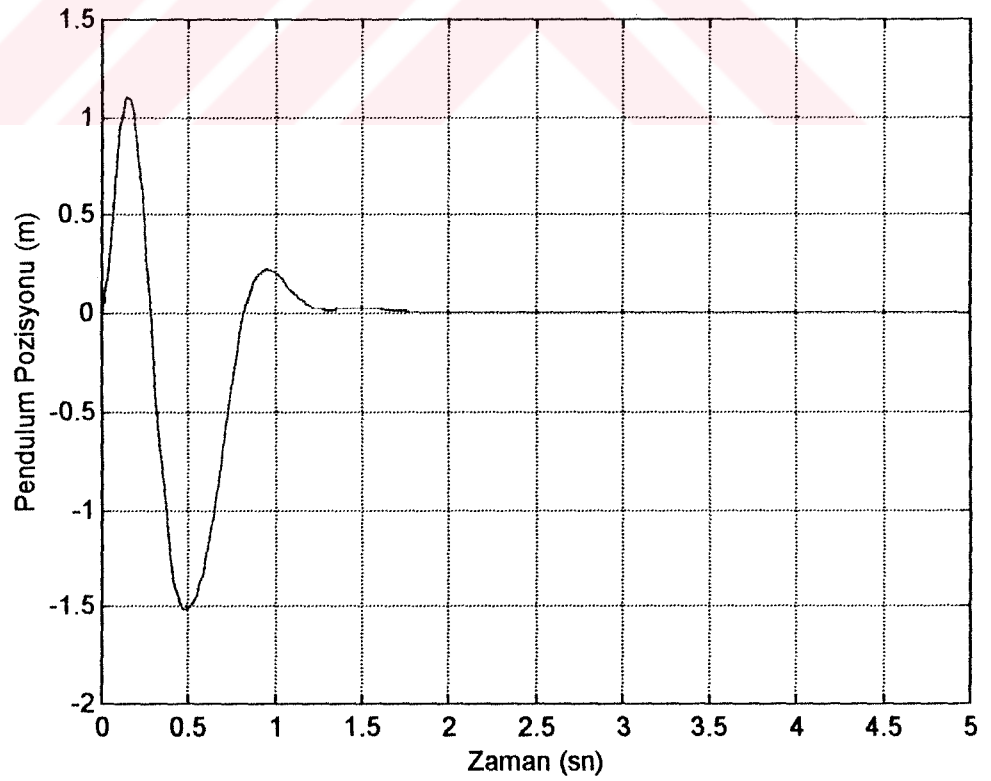
Şekil 6-6 $d(t)=0$ iken araba pozisyonu çıkışı



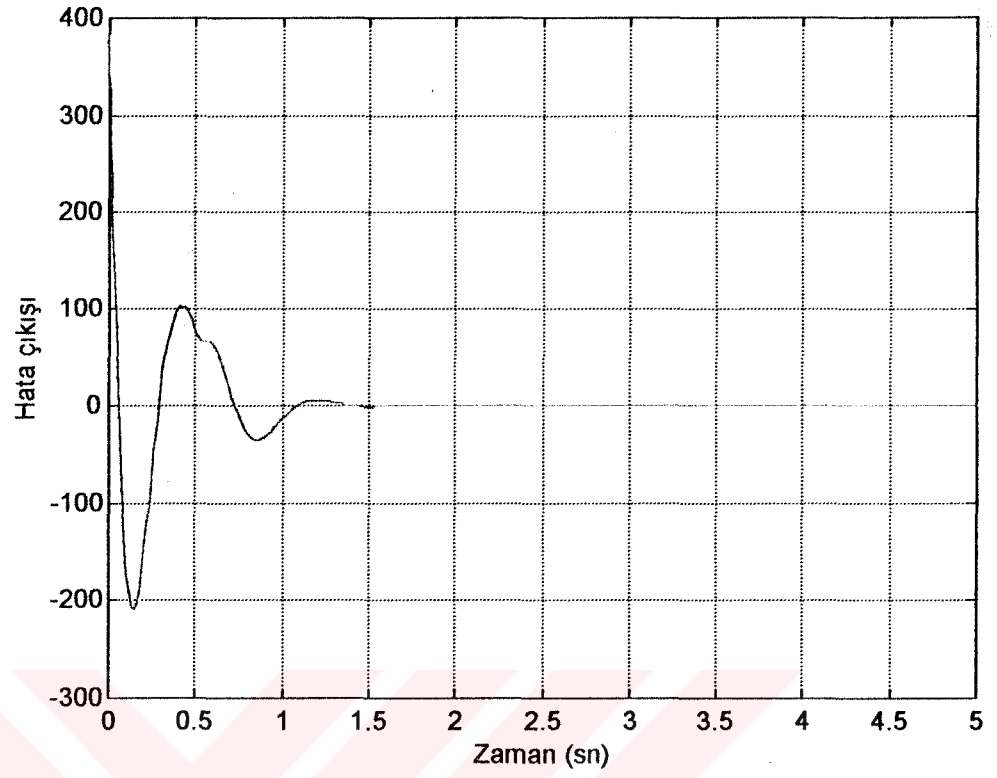
Şekil 6-7 $d(t)=0$ iken sistemin hata çıkışı



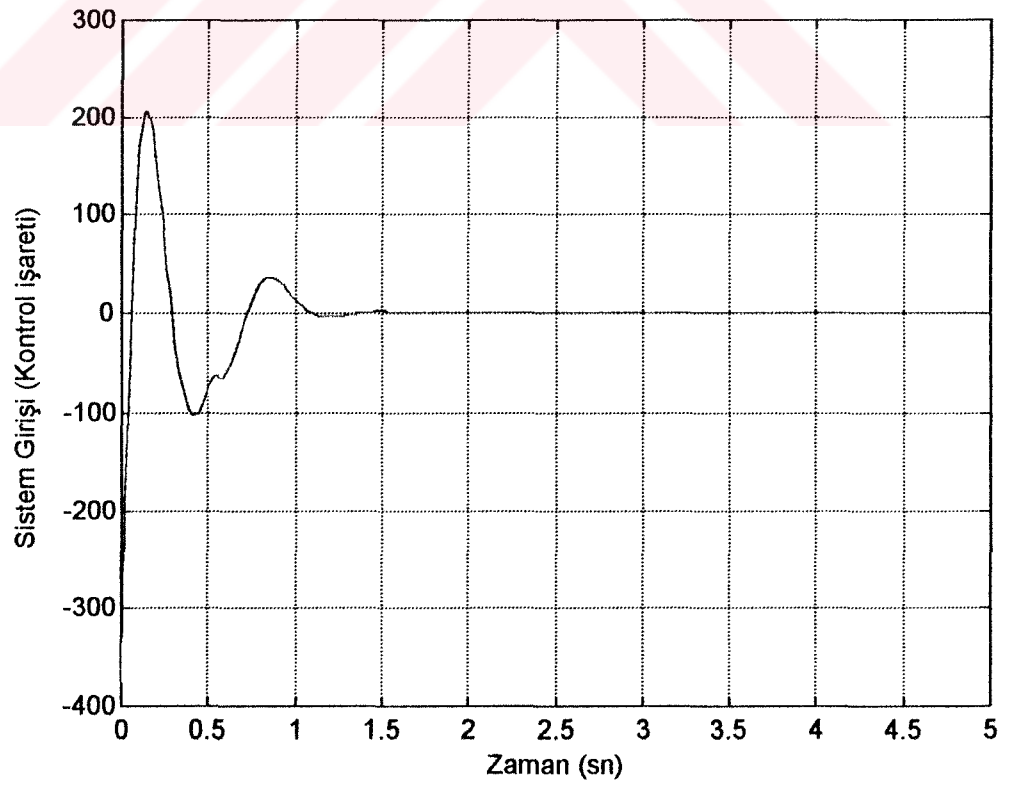
Şekil 6-8 $d(t)=0.5$ N iken araba pozisyonu çıkışı



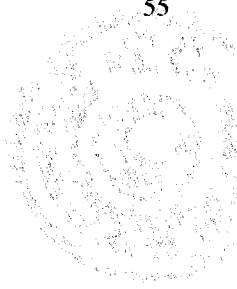
Şekil 6-9 $d(t)=0.5$ N iken pendulum pozisyonu çıkışı



Şekil 6-10 $d(t)=0.5$ N iken sistemin hata çıkışı



Şekil 6-11 $d(t)=0.5$ N iken sistemin kontrol işareti



SONUÇ

Bu tezimde, inverted pendulum sistemine sırasıyla pid, adaptif ve kayan kipli kontrol (sliding mode control) yöntemlerini uyguladım. Bu uygulamalar sonucunda, sistemin istenilen kararlılık ve dayanıklılık seviyesini elde ettim.

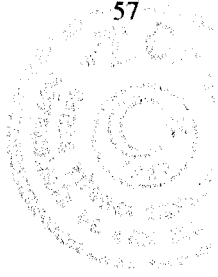
Tasarladığım Pid kontrolör sonucunda sistemin performansı tatmin edici değildi. Buna karşın sistemin sınırlı bir cevabı vardı ve sistem marjinal kararlıydı.

Daha sonra sistemin adaptif kayan kipli kontrolünü yaptım. Ayrıca sisteme bozucu ekledim. Bu durumda sistemin istenilen kararlılığı ve dayanıklılığı elde edildi.

Bu konuyla ilgilenenlerin tezimden faydalanacağını umuyorum.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1. Franklin, G.F., Powell, J.D., ve Emami-Naeini, A., Feedback Control of Dynamics Systems, MA, 1994.
2. Mori, Shozo, Nishihara, Hiroyoshi, FURUTA, Katsuhisa, Control of unstable mechanical System, Control of Pendulum, Int. Journal of Control Vol.23, No. 5, 1976.
3. Eltohamy, K. G., Kuo, C. Y., Real Time stabilisation of a Triple Link Inverted Pendulum using Single Control Input, IEE Proc.-Cont. Theory Appl., Vol. 144, No. 5, 1997.
4. Control Tutorial for Matlab an Inverted Pendulum, University of Michigan.
5. Ogata, Modern Control Engineering, 1993.
6. White, J. R., System Dynamics, Lecture Notes, April 1998
7. Slotine, J.J.E., Sliding Mode Controller for Nonlinear Systems, Int. Journal of Control Vol. 40, No.2, 1984
8. Başbuğ, Ragıp Mustafa, Bulanık Adaptif Kayan Kipli Robot Kontrolü, Doktora Tezi, 1995, ITU.
9. Başbuğ, R.M., Sabanovic A., et al. , Kalıcı Miknatıslı DA Motorunun Kayan Kipli Kontrolü, 1. Havacılık Sempozyumu, ITU, 1994
10. Chen, Chaio-Shiung, CHEN, Wen-Liang, Robust Adaptive Sliding-Mode Control Fuzzy Modeling for an Inverted-Pendulum System, IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 45, No. 2, 1998.
11. Yoo, Byungkook, Ham, Woonchul, Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control of Nonlinear System, IEEE Trans Fuzzy Sys., Vol. 6, No. 2, 1998.
12. Yeung, K.S., Chen, Y. P., Sliding Mode Controller Design of a Single-link Flexible Manipulator under Gravity, , Int. Journal of Control Vol. 52, No. 1, 1990.
13. Fogiel, M, The Automatic Control Systems, Rea, 1975.
14. Biran, A., Moshe, B., Matlab for Engineers, Addison-Nesley, 1996.



ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Gürdal 20.04.1974 tarihinde Yeşilyurt-Malatya'da doğdu. İlköğrenimine 1980 yılında Divriği İstiklal İlkokulunda başladı. Orta öğrenimini Divriği Lisesinde tamamladıktan sonra 1988 yılında Divriği Endüstri Meslek Lisesinde Elektrik Bölümüne girdi. Lise öğrenimini Sivas teknik lisesinde devam ettirerek 1992 yılında İstanbul Sultanahmet Teknik Lisesi elektrik bölümünden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümüne girerek 1996 yılında eğitimini başarıyla tamamladı. Aynı yıl Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsünde yüksek lisans kazanarak yüksek öğrenimine ve bu kurumda araştırma görevliliğine başladı. Halen yüksek lisans eğitimi devam etmektedir.



T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ