

T.C
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN TERS
PROBLEMLERE DÖNÜŞÜM
OPERATÖRLERİNİN BAZI UYGULAMAMLARI

İBRAHİM TEKİN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2011

T.C
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN TERS
PROBLEMLERE DÖNÜŞÜM
OPERATÖRLERİNİN BAZI UYGULAMAMLARI

İBRAHİM TEKİN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. MANSUR İSMAİLOV

GEBZE
2011



YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 17.06.2011 tarih ve 2011/20... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 12/08/2011 tarihinde tez savunma sınavı yapılan İbrahim TEKİN'in tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV

ÜYE

: Prof. Dr. Faik MİKAILZADE

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZ BAŞLIĞI: DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEMLERE DÖNÜŞÜM OPERATÖRLERİNİN BAZI UYGULAMALARI

YAZAR ADI: İBRAHİM TEKİN

Tezin başlıca amacı bu ters problemlerin Sturm-Liouville denklemi için dönüşüm operatörü (belli bir sınır koşullarını sağlayan pertürlü edilmemiş diferansiyel denklemin çözümünü pertürlü edilmiş denklemin çözümüne dönüştüren operatör) ile literatürde mevcut olan bağıllığı ortaya çıkarmak ve ileride benzer bağıllığı birinci mertebeden hiperbolik sistem için ters problemlerin çözümüne uygulamaktır.

Tezde ilk olarak dönüşüm operatörü yöntemiyle Sturm-Liouville operatörü spektral fonksiyonuna göre sonlu aralıkta tek şekilde belirlenmiş, daha sonra bu sonuç kullanılarak çözümünün $x=0$ üzerindeki izi bilinerekten $[0,1]$ aralığında bir boyutlu dalga denklemi için başlangıç sınır değer probleminden denklemin katsayısının tek şekilde belirlenmesi gösterilmiştir. Son olarak çözümünün $x=0$ ve $x=1$ üzerindeki izleri bilinerekten $[0,1]$ aralığında aynı denklemin katsayısı ile beraber başlangıç verileri ve sınır koşullarındaki sabitler de belirlenmiştir.

SUMMARY

THESIS TITLE: SOME APPLICATIONS OF TRANSFORMATION OPERATORS TO THE INVERSE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

THESIS AUTHOR: IBRAHIM TEKIN

This thesis introduces the dependence of the inverse problems with a transformation operator (which transforms the solution of nonperturbed differential equation to the solution of perturbed differential equation) for the Sturm-Liouville equation. This relationship is studied for the future motivation as a solution of the inverse problems for the first order hyperbolic system.

In this thesis, firstly, the Sturm-Liouville operator is determined from its spectral function in a finite interval by using transformation operator method. Then, this result is applied to determining the coefficient of the one dimensional wave equation uniquely in the interval $[0,1]$ from the trace of the solution of initial boundary value problem for that equation at $x=0$. Finally, the coefficient of the same equation, together with the initial data and the parametres in the bounday conditions are determined uniquely in the interval $[0,1]$ from the traces of its solution at $x=0$ and $x=1$.

TEŞEKKÜR

Öncelikle değerli vaktini bana ayıran, sabırla desteğini ve emeğini benden esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez jürimde bulunan Prof. Dr. Faik MİKAILZADE'ye ve Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a teşekkür ederim.

Bütün öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili anne ve babama çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
1.GİRİŞ	1
2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN SONLU ARALIKTA TERS PROBLEM, DÖNÜŞÜM OPERATÖRÜ YÖNTEMİ	3
2.1. Sturm-Liouville Operatörünün Bazı Spektral Özellikleri	3
2.2.Dönüşüm Operatörü	9
2.3. Spektral Fonksiyona Göre Ters Problem	17
3. SONLU ARALIKTA $L_q u = 0$ DENKLEMİ İÇİN TERS PROBLEMLER	21
3.1. Sonlu Aralıkta Katsayının Bulunması Ters Problemi	21
3.2. Sonlu Aralıkta Katsayı ve Başlangıç Verilerinin Bulunması Ters Problemi	34
4. SONUÇLAR	47
KAYNAKLAR	48
EK-I	49
ÖZGEÇMİŞ	53

1 GİRİŞ

Diferansiyel denklemler için ters problem denildiğinde bu diferansiyel denklemin katsayılarının, denklemin çözümlerinin bu veya başka karakteristikleriyle belirlenmesi anlaşılır. Böyle karakteristikler, spektrum, spektral fonksiyon, saçılım verileri v.s. olabilir.

Ters problem en iyi Sturm-Liouville operatörü için öğrenilmiştir. Sturm-Liouville operatörü için spektral teoride dönüşüm operatörü önemli bir yer tutmaktadır. Dönüşüm operatörü denildiğinde belli bir sınır koşullarına sahip olan pertürb edilmemiş denklemin çözümünü pertürb edilmiş denklemin çözümüne dönüştüren operatör anlaşılmaktadır. Dönüşüm operatörünü ters problemin çözümüne ilk kez V.A. Marchenko uygulamıştır. O, sınırlı aralıkta verilmiş Sturm-Liouville operatörünün kendi spektral fonksiyonu ile tek olarak belirlenebilir olduğunu ispatlamıştır.(bkz:[3]-[9]) Daha sonra dönüşüm operatörü yöntemi I. M. Gelfand ve B.M. Levitan tarafından geliştirilmiş ve Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyona göre belirlenmesi için gerek ve yeter koşul belirlenmiştir. (bkz:[6]-[7])

Sturm-Liouville operatörleri için sözü geçen ters problem ve bu ters problemin çözüm yöntemi olan dönüşüm operatörü yöntemi matematiksel fiziğin bir çok ters probleminin çözümüne ışık tutmaktadır. Örneğin matematiksel fizikte, hem matematiksel hem de uygulama bakımından önem arz eden

$$L_q u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x) \right) u = 0 \quad (*)$$

hiperbolik denklemi için ters problem, Sturm-Liouville operatörü için spektral fonksiyona göre ters probleme indirgenerek çözülebilir. (*) denklemi için ters problem denildiğinde çözüm hakkında bazı bilgileri bilerekten denklemin katsayısının yani $q(x)$ fonksiyonunun belirlenmesi anlaşılır.

Tezde (*) denklemi için aşağıdaki iki problem öğrenilir:

- 1) Çözümün $x = 0$ doğrusu üzerindeki izi biliniyorsa $[0, 1]$ aralığında (*) denklemi için başlangıç-sınır değer probleminden denklemin katsayısını belirlemek;
- 2) Çözümün $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları üzerindeki izleri biliniyorsa $[0, 1]$ aralığında (*) denklemi için başlangıç-sınır değer probleminden denklemin kat-

sayısını, başlangıç verilerini ve ayrıca sınır koşullarından sabit parametreleri belirlemek.

Birinci bölümde, ilk olarak Sturm-Liouville operatörü için dönüşüm operatörü, sonra ise spektral fonksiyona göre Sturm-Liouville operatörünün tek türlü belirlenmesi ispatlanmıştır.

İkinci bölümde ise x 'e göre sonlu $[0, 1]$ aralığında $L_q u = 0$ denklemi için evvela $u(0, t)$ 'ye göre katsayının belirlenmesi daha sonra ise $u(0, t)$ ve $u(1, t)$ 'lere göre katsayı ve başlangıç verilerinin belirlenmesi problemi incelenmiştir. Her iki problemin, Sturm-Liouville operatörünün spektral özellikleri ile bağlantısı öğrenilmiştir.

Bu tür hiperbolik tipli ters problemlere birçok fiziksel problemin matematiksel modellemesi gibi bakılabilir. Örneğin, başlangıç konumu $u(0, t) = 0$, başlangıç hızı $u_t(0, t) = \delta(x)$ olan uçları serbest telin titreşiminin belli bir konumdaki durumu bilinirse onun hareketine etki eden dış etken tek türlü belirlenebilir.

2 Sturm-Liouville Operatörü için Sonlu Aralıkta

Ters Problem, Dönüşüm Operatörü Yöntemi

Bu bölümde sonlu aralıkta Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonlarının sonsuzlukta asimtotik davranışları belirlenecektir ve özfonksiyonlar cinsinden ayrışım teoremi ifade edilecektir. (bkz:[1]-[9]-[10]) Bu problem için dönüşüm operatörü tanımlanacaktır. (bkz:[3]) Daha sonra spektral fonksiyona göre problemin tekliği ispatlanacaktır. (bkz:[2])

2.1 Sturm-Liouville Operatörünün Bazı Spektral

Özellikleri

$$l_q y : \begin{cases} (-d^2/dx^2 + q(x))y \\ (y' - hy)_{x=a} = 0, \quad (y' + Hy)_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

operatörünü göz önüne alalım. Burada $q(x) \in C[a, b]$ ve a, b, h, H sonlu sayılardır. Bu operatör Sturm-Liouville probleminin özünü oluşturur.

Tanım 2.1.1: $l_q y = \lambda y$ denkleminin trivial olmayan çözümünü temin eden λ değerlerine bu diferansiyel operatörün *özdeğerleri*, bu özdeğerler karşı gelen aşikar olmayan $y(x, \lambda)$ çözümlerine de *özfonksiyonları* denir.

λ_n özdeğerlerine karşı gelen özfonksiyonlar $y_n(x) = y(x, \lambda_n)$ ile işaretlensin ve bilindiği gibi $\|y_n\|$ normları

$$\|y_n\|^2 = \int_a^b y_n^2(x) dx$$

ile tanımlıdır. $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$, $l_q y = \lambda y$ denklemini ve sınır koşullarını sağlayan iki çözüm olsun. Yani

$$\varphi'(a, \lambda) - h\varphi(a, \lambda) = 0, \quad \psi'(b, \lambda) + H\psi(b, \lambda) = 0.$$

ψ ve φ fonksiyonlarının Wronskian determinantını

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle = \psi(x, \lambda)\varphi'(x, \lambda) - \psi'(x, \lambda)\varphi(x, \lambda)$$

ile işaretleyelim. Bilindiği gibi $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu x değişkenine bağlı değildir ve

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonuna l_q operatörünün *karakteristik fonksiyonu* denir. $\Delta(\lambda)$, λ 'ya göre tam fonksiyondur ve en fazla sayılabilir kadar $\{\lambda_n\}$ sıfırı mevcuttur. Şimdi karakteristik fonksiyonun sıfırları ile $l_q y = \lambda y$ denkleminin özdeğerleri arasındaki ilişki hakkında aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.1.1: Karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}$ sıfırları, $l_q y = \lambda y$ sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakışiktır. Ayrıca $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları özfonksiyonlar ise, öyle $\{\beta_n\}$ dizisi bulunur ki

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n), \quad \beta_n \neq 0$$

sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir eşitlik dahil edelim;

$$\alpha_n := \int_a^b \varphi^2(x, \lambda_n) dx.$$

$\{\alpha_n\}$ sayılarına *ağırlık sayıları*, $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ sayılarına ise l_q operatörünün *spektral verisi* denir.

Lemma 2.1.1: Aşağıdaki ilişki doğrudur;

$$\beta_n \alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda).$$

Burada β_n önceki teoremdaki gibi tanımlıdır ve $\dot{\Delta}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda_n} \Delta(\lambda)$ 'dır.

Teorem 2.1.2: l_q operatörünün farklı özdeğerlere karşı gelen özfonksiyonları ortogonaldır.

İspat: λ_n ve λ_k birbirinden farklı özdeğerler ve bu özdeğerlere karşı gelen özfonksiyonlar sırası ile $y_n(x)$ ve $y_k(x)$ olsun. Kısmi integrasyon uygulamakla

$$\int_a^b l_q y_n(x) y_k(x) dx = \int_a^b y_n(x) l_q y_k(x) dx$$

kolayca alınır. Sonuncuda $l_q y_n(x) = \lambda_n y_n(x)$ ve $l_q y_k(x) = \lambda_k y_k(x)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\lambda_n \int_a^b y_n(x) y_k(x) dx = \lambda_k \int_a^b y_n(x) y_k(x) dx$$

esitliği elde edilir. $\lambda_n \neq \lambda_k$ olduğundan

$$\int_a^b y_n(x)y_k(x)dx = 0$$

alınır. Yani l_q operatörünün farklı özdeğerlerine karşı gelen özfonksiyonları ortogonaldır.

Teorem 2.1.3: l_q operatörünün $\{\lambda_n\}$ özdeğerleri reeldir.

Lemma 2.1.2: $|\rho| \rightarrow \infty$ için aşağıdaki asimtotik formüller $x \in [a, b]$ 'ye göre düzgün olarak sağlanır;

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos \rho x + O\left(\frac{1}{|\rho|} \exp(|\tau| x)\right) = O(\exp(|\tau| x)), \\ \varphi'(x, \lambda) &= -\rho \sin \rho x + O(\exp(|\tau| x)) = O(|\rho| \exp(|\tau| x)), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \cos \rho(b-x) + O\left(\frac{1}{|\rho|} \exp(|\tau| (b-x))\right) = O(\exp(|\tau| (b-x))), \\ \psi(x, \lambda) &= \rho \sin \rho(b-x) + O(\exp(|\tau| (b-x))) = O(|\rho| \exp(|\tau| (b-x))). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

Burada $\lambda = \rho^2$, $\tau = \text{Im } \rho$ 'dir ve O Landau sembolüdür.

İspat: Gösterelim ki

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x + h \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_a^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) \varphi(t, \lambda) dt \quad (2.1.4)$$

denklemini sağlar. Gerçekten

$$y(x, \lambda) = \cos \rho x + h \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_a^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) y(t, \lambda) dt$$

Volterra integral denklemdir ve tek çözümü mevcuttur. Diğer yandan bu integral denklemini sağlayan bir $y(x, \lambda)$ fonksiyonu var ise bu denklemini diferansiyellemek ile

$$y''(x, \lambda) + \rho^2 y(x, \lambda) = q(x) y(x, \lambda), \quad y(a, \lambda) = 1, \quad y'(b, \lambda) = h$$

kolayca alınır. O halde $y(x, \lambda) \equiv \varphi(x, \lambda)$ 'dır ve (2.1.4) denklemini doğrudur. (2.1.4) denklemini x 'e göre diferansiyellenirse

$$\varphi'(x, \lambda) = -\rho \sin \rho x + h \cos \rho x + \int_a^x \cos \rho(x-t) q(t) \varphi(t, \lambda) dt \quad (2.1.5)$$

elde edilir. $\mu(\lambda) = \max_{a \leq x \leq b} (|\varphi(x, \lambda)| \exp(-|\tau|x))$ işaretleyelim. $|\sin \rho x| \leq |\exp(|\tau|x)|$ ve $|\cos \rho x| \leq |\exp(|\tau|x)|$ olduğundan $|\rho| \geq 1$ ve $x \in [a, b]$ için aşağıdaki işlemler doğrudur;

$$|\varphi(x, \lambda) \exp(-|\tau|x)| = \left| \cos \rho x + h \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_a^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) \varphi(t, \lambda) dt \right| \exp(-|\tau|x),$$

$$\begin{aligned} |\varphi(x, \lambda)| \exp(-|\tau|x) &\leq |\cos \rho x \exp(-|\tau|x)| + \left| h \frac{\sin \rho x}{\rho} \exp(-|\tau|x) \right| \\ &\quad + \int_a^x \left| \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) \varphi(t, \lambda) \exp(-|\tau|x) \right| dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varphi(x, \lambda)| \exp(-|\tau|x) &\leq 1 + \frac{h}{|\rho|} + \int_a^x \frac{1}{|\rho|} q(t) \mu(\lambda) dt, \\ &= 1 + \frac{1}{|\rho|} [h + \mu(\lambda) \int_a^x q(t) dt], \\ &\leq C_1 + \frac{C_2}{|\rho|} \mu(\lambda). \end{aligned}$$

Buradan $\mu(\lambda) \leq C_1 + \frac{C_2}{|\rho|} \mu(\lambda)$ alınır. Yeterince büyük $|\rho|$ değeri için $\mu(\lambda) = O(1)$, yani $\varphi(x, \lambda) = O(\exp(|\tau|x))$ 'dir. Sonuncu (2.1.4) ve (2.1.5) eşitliklerinin sağ tarafında göz önüne alınırsa (2.1.2) elde edilir. Benzer yol ile (2.1.3) eşitlikleride elde edilebilir. ■

Şimdi l_q operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarının mevcudluğu ve asimtotik davranışları hakkında aşağıdaki teorem verilebilir. (bkz:[1])

Teorem 2.1.4: $l_q y = \lambda y$ sınır değer probleminin sayılabilir kadar $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ özdeğeri mevcuttur ve $n \geq 0$ için aşağıdaki asimtotik formüller doğrudur;

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{b-a} n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.1.6)$$

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos(\lambda_n(x-a)) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.1.7)$$

İspat: (2.1.2) ile belirli $\varphi(x, \lambda)$ asimtotik formüllerini (2.1.4) ve (2.1.5) eşitliklerinin sağ tarafında gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos \rho x + h \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_a^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) [\cos \rho x + O\left(\frac{1}{|\rho|} \exp(|\tau|x)\right)] dt \\ &= \cos \rho x + h \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_a^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) \cos \rho x dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) O\left(\frac{1}{|\rho|} \exp(|\tau|x)\right) dt \\
\varphi(x, \lambda) &= \cos \rho x + h \frac{\sin \rho x}{\rho} + \frac{1}{2\rho} \int_a^x \{\sin \rho(x-2t) + \sin \rho x\} q(t) dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\right) \\
&= \cos \rho x + \left(h + \frac{1}{2} \int_a^x q(t) dt\right) \frac{\sin \rho x}{\rho} + \frac{1}{2} \int_a^x q(t) \sin \rho(x-2t) dt \\
&+ O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\right)
\end{aligned}$$

Sonuncuda $q_1(x) = h + \frac{1}{2} \int_a^x q(t) dt$ işaretlenirse $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu için ve benzer işlemler yapılarak $\varphi'(x, \lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\left. \begin{aligned}
\varphi(x, \lambda) &= \cos \rho x + q_1(x) \frac{\sin \rho x}{\rho} + \frac{1}{2} \int_a^x q(t) \sin \rho(x-2t) dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\right), \\
\varphi'(x, \lambda) &= -\rho \sin \rho x + q_1(x) \cos \rho x + \frac{1}{2} \int_a^x q(t) \cos \rho(x-2t) dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho}\right).
\end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

(2.1.8) eşitliklerine göre $\Delta(\lambda) = \varphi'(b, \lambda) + H\varphi(b, \lambda)$ 'dir. O halde (2.1.8)'den

$$\Delta(\lambda) = -\rho \sin \rho b + \omega \cos \rho b + \kappa(\rho) \quad (2.1.9)$$

alınır. Burada $\omega = q_1(x) + H$ ve $\kappa(\rho) = \frac{1}{2} \int_a^b q(t) \cos \rho(b-2t) dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|b)}{\rho}\right)$ 'dir.

$G_\delta = \{\rho : |\rho - k| \geq \delta, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\delta > 0$ işaretleyelim ve gösterelim ki yeteri kadar büyük $\rho^* = \rho^*(\delta)$ için

$$|\sin \rho b| \geq C_\delta \exp(|\tau|b), \quad \rho \in G_\delta, \quad (2.1.10)$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta \rho \exp(|\tau|b), \quad \rho \in G_\delta, |\rho| \geq \rho^* \quad (2.1.11)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$\rho = \sigma + i\tau$ olsun. $D_\delta = \{\rho : \sigma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \tau \geq 0, |\rho| \geq \delta\}$ bölgesi için (2.1.10) eşitsizliğinin ispatlanması yeterlidir. $\theta(\rho) = |\sin \rho b| \exp(-|\tau|b)$ işaretleyelim ve $\rho \in D_\delta$ olsun. $\tau \leq 1$ için $\theta(\rho) \geq C_\delta$ 'dir. $\sin \rho b = \frac{e^{i\rho b} - e^{-i\rho b}}{2i}$ olduğu için $\tau \geq 1$ için $\theta(\rho) = |1 - \exp(2i\sigma b) \exp(-2\tau b)| / 2 \geq 1/4$ alınır. O halde (2.1.10) doğrudur. Buna ek olarak (2.1.9) kullanılarak $\rho \in G_\delta$ için

$$\Delta(\lambda) = -\rho \sin \rho b \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$$

elde edilir ve buradan (2.1.11) eşitsizliğinin de doğruluğu alınır.

$\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = (n + 1/2)^2 \pi^2\}$ işaretleyelim. (2.1.9) eşitliğini $\Delta(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$ toplamı şeklinde yazılabilir. Burada $f(\lambda) = -\rho \sin \rho b$ ve $|g(\lambda)| \leq C \exp(|\tau| b)$ 'dir. (2.1.10) eşitsizliğine göre yeteri kadar büyük n , ($n \geq n^*$) için $|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$, $\lambda \in \Gamma_n$ alınır. O halde Rouché teoremine göre $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları $f(\lambda) = -\rho \sin \rho b$ fonksiyonunun Γ_n bölgesindeki sıfırları kadardır ve $(n + 1)$ tanedir. Yani $|\lambda| < [(n + 1)\pi]^2$ çemberinde l_q operatörünün tam olarak $(n + 1)$ özdeğeri vardır ve bu özdeğerler $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ 'dir. Şimdi Rouché teoremi

$$\gamma_n(\delta) = \{\rho : |\rho - \pi n / (b - a)| \leq \delta\}$$

çemberine uygulanırsa yeteri kadar büyük n için $\gamma_n(\delta)$ 'da $\Delta(\rho^2)$ fonksiyonunun tam olarak bir sıfırı vardır ve bu sıfır $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$ 'dir. $\delta > 0$ keyfi olduğundan

$$\rho_n = \frac{\pi n}{b - a} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.1.12)$$

alınır. (2.1.6) asimtotik formülü (2.1.8) denklemlerinde göz önüne alınırsa

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, \rho_n) &= \cos \rho_n x + q_1(x) \frac{\sin \rho_n x}{\rho_n} + \frac{1}{2} \int_a^x q(t) \sin \rho_n(x - 2t) dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho_n^2}\right), \\ \varphi'(x, \rho_n) &= -\rho_n \sin \rho_n x + q_1(x) \cos \rho_n x + \frac{1}{2} \int_a^x q(t) \cos \rho_n(x - 2t) dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho_n}\right). \end{aligned} \right\}$$

eşitlileri elde edilir. Sonuncu iki eşitlikten

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos(\lambda_n(x - a)) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimtotik formülü elde edilir. ■

Bilindiği gibi $y_n(x) = y(x, \lambda_n) = \varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonları ortogonaldirler ve $L_2[a, b]$ uzayında tam sistem oluştururlar. (bkz:[5]) O halde aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2.1.4: (i) $\{y_n(x)\}_{n>0}$ özfonksiyonlar sistemi $L_2[a, b]$ uzayında tam sistem oluşturur,

(ii) $f(x) \in L_2[a, b]$ fonksiyonu için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad f_n = \frac{(f, y_n)}{\|y_n\|^2}$$

sağlanır.

(iii) $f(x) \in L_2[a, b]$ için, sonuncu seri göre $L_2[a, b]$ 'de yakınsaktır

ve

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \|y_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, y_n)}{\|y_n\|^2}$$

Parseval eşitliği eşitliği sağlanır.

2.2 Dönüşüm Operatörü

Varsayalım ki

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q_j(x) \quad , j = 1, 2$$

$x \geq 0$ için $D(A_j) = \{y \in C[a, \infty) : y'_j(a) - h_j y_j(a) = 0\}$, $j = 1, 2$ bölgelerinde tanımlı iki diferansiyel operatör olsun. Burada $q_j(x)$, $j = 1, 2$ sürekli kompleks fonksiyonlar, h_j ise kompleks sayılardır. Burada amaç aşağıdaki gibi bir F operatörü kurmaktır;

$$A_2 F y = F A_1 y, \quad \forall y \in D(A_1), \quad (2.2.1)$$

$$F : D(A_1) \rightarrow D(A_2). \quad (2.2.2)$$

(2.2.1) ve (2.2.2) koşullarını sağlayan F operatörünü

$$(Fy)(x) = y(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)dt \quad (2.2.3)$$

formunda arayalım. Burada $K(x, t)$ fonksiyonu, K volterra operatörünün bilinmeyen pürüzsüz çekirdeğidir. $E + K$ operatörünün sınırlı tersi mevcut olduğu için

$$(F^{-1}y)(x) = y(x) + \int_a^x L(x, t)y(t)dt$$

yazılabilir. O halde (2.2.1) eşitliği $A_1 = F^{-1}A_2F$ şeklinde tekrar yazılabilir. Demek ki A_1 ve A_2 operatörleri benzerdir. (2.2.1) ve (2.2.2) koşullarını sağlayan operatöre *dönüşüm operatörü* denir.

Şimdi $K(x, t)$ fonksiyonunu araştıralım. $y \in D(A_1)$ için $Fy \in D(A_2)$ olduğundan ve

$$\partial Fy(x) = \partial y(x) + K(x, x)y(x) + \int_a^x \partial_x K(x, t)y(t)dt \quad (2.2.4)$$

olduğundan , (2.2.3) ve (2.2.4) eşitliklerinde $x = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(\partial Fy - h_2 Fy)(a) = \partial y(a) + (K(a, a) - h_2)y(a) = (h_1 - h_2 + K(a, a))y(a)$$

elde edilir. Böylece

$$K(a, a) = h_2 - h_1 \quad (2.2.5)$$

ise (2.2.2) koşulu sağlanır. Şimdi (2.2.4) formülünü bir kez daha diferansiyellersek

$$(Fy)'' = y''(x) + K(x, x)y'(x) + y(x)\frac{dK(x, x)}{dx} + \partial_x K|_{t=x} y(x) + \int_a^x \partial_x^2 K(x, t)y(t)dt$$

eşitliği elde edilir. Sonuncu eşitlikten

$$\begin{aligned} A_2 Fy &= -y'' - K(x, x)y'(x) - y\frac{dK(x, x)}{dx} - \partial_x K|_{t=x} y(x) + q_2(x)y \\ &\quad + \int_a^x (-K_{xx} + q_2 K)y(t)dt \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan yukarıdaki eşitliği kısmi integrasyon yardımı ile $FA_1 y$ ifadesine dönüştürürsek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$\begin{aligned} FA_1 y &= -y'' + q_1(x)y + \int_a^x (-y_{tt}(t) + q_1(t)y(t))K(x, t)dt, \\ &= -y'' + q_1 y - Ky_t|_a^x + \int_a^x [K_t(x, t)y_t(t) + q_1(t)y(t)K(x, t)]dt, \\ &= -y'' + q_1 y - K(x, x)y'(x) + K(x, a)y(a) + K_t(x, x)y(x) \\ &\quad - K_t(x, a)y(a) + \int_a^x (-K_{xx} + q_1 K)y(t)dt. \end{aligned}$$

Elde edilen bu ifade (2.2.6) ile eşitlenirse keyfi $y \in D(A_1)$ fonksiyonu için

$$K_{xx} - q_2(x)K = K_{tt} - q_1(t)K, \quad x \geq t \geq a, \quad (2.2.7)$$

$$2\frac{dK(x, x)}{dx} = q_2(x) - q_1(x), \quad x \geq a \quad (2.2.8)$$

$$(K_t - h_1 K)_{t=a} = 0 \quad x \geq a \quad (2.2.9)$$

alınır. (2.2.8) formülü elde edilirken $\frac{dK(x, x)}{dx} = (K_x + K_t)_{t=x}$ kullanıldı. $y'(a) = h_1 y(a)$ sınır koşulu da (2.2.9) sonucuna ulaşırken kullanıldı. (2.2.8) koşulu x 'e

göre, a 'dan x 'e kadar integrallenirse ve (2.2.5) eşitliği göz önüne alınırsa

$$K(x, x) = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \int_a^x (q_2(s) - q_1(s)) ds \quad (2.2.10)$$

elde edilir. Açıktır ki (2.2.10) koşulu (2.2.5) ve (2.2.8) koşullarına denktir.

(2.2.7), (2.2.9) ve (2.2.10) probleminin çözümünün mevcutluğunu ispatlayalım. Varsayalım ki $q_j \in C^1[a, \infty)$ 'dur. Aşağıdaki değişken dönüşümlerini yapalım;

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t, \quad K(x, t) = v(\xi, \eta).$$

O halde

$$\begin{aligned} K_x &= v_\xi + v_\eta, & K_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \\ K_t &= v_\xi - v_\eta, & K_{tt} &= v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

türevleri yerine yazılırsa (2.2.7) denklemi

$$v_{\xi\eta} = \frac{1}{4} p(\xi, \eta) v(\xi, \eta) \quad (2.2.11)$$

formu elde edilir. Burada $p(\xi, \eta) = q_2(x) - q_1(t)$ 'dir. Sınır koşulları da aşağıdaki gibi dönüşür;

$$K(x, x) = v(2x, 0) = v(\xi, 0) = h_2 - h_1 \quad (2.2.12)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_a^{\xi/2} p(s, 0) ds,$$

$$K_t(x, a) - h_1 K(x, a) = v_\xi(\xi, \xi) - v_\eta(\xi, \xi) - h_1 v(\xi, \xi) = 0. \quad (2.2.13)$$

(2.2.11) denklemi η değişkenine göre a 'dan η 'ya kadar integrallenirse ve (2.2.12)'den $v_{\xi,0} = 1/4 p(\xi/2, 0)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$v_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \int_a^\eta p(\xi, \alpha) v(\xi, \alpha) d\alpha + \frac{1}{4} p(\xi/2, 0) \quad (2.2.14)$$

elde edilir. Şimdi sonuncu eşitlik ξ 'ye göre η 'dan ξ 'ye kadar integrallenirse aşağı-

daki sonuç alınır;

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} d\beta \int_a^{\eta} p(\beta, \alpha) v(\beta, \alpha) d\alpha + \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} p(\beta/2, 0) d\beta + v(\eta, \eta). \quad (2.2.15)$$

$v(\eta, \eta)$ fonksiyonunu bulmak için (2.2.13) koşulunu tekrar yazalım;

$$2v_{\xi}(\eta, \eta) e^{h_1 \eta} = (h_1 v(\eta, \eta) + v_{\xi}(\eta, \eta) + v_{\eta}(\eta, \eta)) e^{h_1 \eta} = (e^{h_1 \eta} v(\eta, \eta))'_{\eta}. \quad (2.2.16)$$

Diğer yandan (2.2.14)'ten

$$2v_{\eta}(\eta, \eta) e^{h_1 \eta} = \frac{1}{2} \int_a^{\eta} e^{h_1 \eta} p(\eta, \alpha) v(\eta, \alpha) d\alpha + \frac{1}{2} p(\eta/2, 0) e^{h_1 \eta} \quad (2.2.17)$$

alınır. (2.2.17) eşitliği, η 'ya göre a 'dan η 'ya kadar integrallenirse ve (2.2.16) göz önünde bulundurulursa

$$v(\eta, \eta) e^{h_1 \eta} - v(0, 0) = \frac{1}{2} \int_a^{\eta} d\beta \int_a^{\eta} e^{h_1 \beta} p(\beta, \alpha) v(\beta, \alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_a^{\eta} p(\beta/2, 0) e^{h_1 \beta} d\beta$$

elde edilir. Sonuçta $v(0, 0) = h_2 - h_1$ olduğundan

$$v(\eta, \eta) = e^{h_1 \eta} (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \int_a^{\eta} d\beta \int_a^{\eta} e^{-h_1(\eta-\beta)} p(\beta, \alpha) v(\beta, \alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_a^{\eta} p(\beta/2, 0) e^{-h_1(\eta-\beta)} d\beta \quad (2.2.18)$$

alınır.

(2.2.15) ve (2.2.18) formüllerinden alınır ki v fonksiyonu aşağıdaki integral deklemin çözümüdür;

$$v = Qv + f. \quad (2.2.19)$$

Burada sağ taraftaki f fonksiyonu

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} p(\beta/2) d\beta + e^{-h_1 \eta} (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \int_a^{\eta} p(\beta/2, 0) e^{-h_1(\eta-\beta)} d\beta \quad (2.2.20)$$

formülü ile tanımlıdır ve Q operatörü aşağıdaki gibi davranır;

$$(Qv)(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} d\beta \int_a^{\eta} p(\beta, \alpha) v(\beta, \alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_a^{\eta} d\beta \int_a^{\eta} e^{-h_1(\eta-\beta)} p(\beta, \alpha) v(\beta, \alpha) d\alpha. \quad (2.2.21)$$

Eğer $T > x > t > a$ bölgesinde $K(x, t)$ fonksiyonu bulunmak istenirse o halde

$$\Omega = \{(\xi, \eta) \mid 2T > \xi + \eta, \quad \xi > \eta > a\}$$

bölgesinde $v(\xi, \eta)$ fonksiyonunun bulunması gereklidir. $C(\overline{\Omega})$ uzayında (2.2.19) denkleminin çözümünü aşağıda dahil edilen denk normlar kümesinde arayalım.

$$\|v\|_s = \sup_{\Omega} e^{-s\eta} |v(\xi, \eta)|, \quad s \geq 0$$

Yeteri kadar büyük s_0 için

$$\|Qv\|_s \leq 1/2 \|v\|_s, \quad s \geq s_0, \quad v \in C(\overline{\Omega}) \quad (2.2.22)$$

sağlanır. Bu nedenle (2.2.19) denleminin tek $v \in C(\overline{\Omega})$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm ardışık yaklaşımlar metodu ile elde edilebilir. $\|v\|_s$ normunun ve Q operatörünün tanımından, $|p(\xi, \eta)| \leq c$ için

$$\begin{aligned} e^{-s\eta} |Qv(\xi, \eta)| &\leq \frac{1}{4}c \int_{\eta}^{\eta} d\beta \int_a^{\eta} e^{-s(\eta-\alpha)} e^{-s\alpha} |v(\beta, \alpha)| d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}c \int_a^{\eta} d\beta \int_a^{\eta} e^{-s(\eta-\alpha)} e^{-s\alpha} |v(\beta, \alpha)| d\alpha \\ &\leq \left\{ \frac{1}{4}c \int_{\eta}^{\eta} d\beta \int_a^{\eta} e^{-s(\eta-\alpha)} d\alpha + \frac{1}{2}c \int_{\eta}^{\eta} d\beta \int_a^{\eta} e^{-s(\eta-\alpha)} d\alpha \right\} \|v\|_s \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int_a^{\eta} e^{-s(\eta-\alpha)} d\alpha = s^{-1}(1 - e^{-s(\eta+a)}) \leq s^{-1}$$

olduğundan parantez içindeki ifade $s^{-1}(cT/2 + cT/2) = s^{-1}cT$ değerinden büyük değildir. Buradan

$$\|Qv\|_s \leq cTs^{-1} \|v\|_s$$

alınır.

$s > s_0$ için $s_0 = 2cT$ alınırsa (2.2.22) elde edilir. Keyfi T sayısı için $x > t > a$ bölgesinde $K(x, t)$ sürekli fonksiyonunun mevcudluğu ispatlandı. (2.2.20) ve (2.2.21) formüllerinden $v \in C(\overline{\Omega})$ ve $p \in C^1(\overline{\Omega})$ için $Qv + f \in C^2(\overline{\Omega})$ olduğu alınır. Bu nedenle (2.2.19) denkleminde v ve $K(x, t)$ fonksiyonlarının C^2 sınıfına dahil olduğuna ulaşılır. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.2.1: $q_j \in C^1[a, \infty)$ olsun. O halde (2.2.3) formülü ile belirli $F = E + K$ operatörü A_1 ve A_2 operatörlerini birbirine bağlar, yani $Fy \in D(A_2)$ ve $A_2Fy = FA_1y$, $\forall y \in D(A_1)$ 'dir. Burada $K(x, t)$ çekirdeği C^2 sınıfındandır ve (2.2.7), (2.2.9) ve (2.2.10) ile sağlanır.

Sonuç 2.2.1: Varsayalım ki $A = -\partial^2 + q(x)$, $\partial^2 = -\partial^2/\partial x^2$, $D(A) = \{y \in C^2[a, T] : y(a) = \alpha, y'(a) = 0\}$ ve $a \in C^1[0, T]$ olsun. O halde A operatörü $D(A)$ bölgesindeki $-\partial$ operatörü ile benzerdir.

Bu sonucu ispatlamak için teorem 2.2.1'de $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ ve $h_1 = h_2 = 0$ alınması ve $(Fy)(0) = y(0) = \alpha$ işaretlenmesi yeterlidir. Spektral fonksiyonunu kullanarak Sturm-Liouville operatörünü sağlatma problemini göz önüne almadan önce bazı gerekli özellikleri hatırlatalım. Basitlik için sonlu aralıkta bakalım. Varsayalım ki $y(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür;

$$Ay = -y''(x) + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, \pi), \quad (2.2.23)$$

$$y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = h. \quad (2.2.24)$$

Bu durumda $y(x, \lambda)$ fonksiyonu açık olarak

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad (2.2.25)$$

sınır koşulunu da sağlar.

O halde

$$Ay = \lambda y, \quad (2.2.26)$$

$$u'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2.2.27)$$

sınır değer probleminden özdeğer ve özfonksiyonları bulmak yerine

$$\kappa(\lambda) = y'(\pi, \lambda) + Hy(\pi, \lambda) = 0 \quad (2.2.28)$$

karakteristik fonksiyonunun köklerini bulmak gereklidir. (2.2.26) ve (2.2.27) sınır değer probleminin spektrumu bu kökler ile sağlanır. Varsayalım ki $a \in C^1[0, \pi]$ reel fonksiyon ve h, H reel sayıları olsun. $y_0(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$ fonksiyonu $q(x) = 0$ ve $h = 0$ olmakla (2.2.23)-(2.2.24) probleminin çözümüdür. O halde teorem

2.2.1'e göre A operatörünü (2.2.25) sınır koşulu ile aşağıdaki gibi bir A_0 operatörüne dönüştüren (2.2.3) formunda bir F operatörü vardır;

$$A_0 = -\partial^2, \quad D(A_0) = \{u \in C^2 : y'(0) = 0\}.$$

Özel halde, $Af y_0 = F A_0 y_0 = F \lambda y_0 = \lambda F y_0$ 'dır ve $F y_0$ fonksiyonu (2.2.25) sınır koşulunu sağlar. (2.2.3)'ten $(F y_0)(0) = y_0(0) = 1$ 'dir. O halde $F y_0$, (2.2.23)-(2.2.24) Cauchy probleminin çözümüdür. Çözümün tekliğinden $y(x, \lambda) = F y_0$ alınır yani daha açık olarak;

$$y(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x K(x, t) \cos(\sqrt{\lambda}t) dt. \quad (2.2.29)$$

(2.2.28) ve (2.2.29) formüllerinden $\kappa(\lambda)$ 'nın tam fonksiyon olduğu alınır. h, H ve $q(x)$ reel olduğundan, (2.2.27) sınır koşulu ile A operatörü öz eşleniktir ve alttan yarı süreklidir. O halde $\kappa(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları reeldir ve $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ şeklindedir. $L_2(0, \pi)$ 'de ortonormal baza göre uygun özfonksiyonlar

$$y_n(x) = y(x, \lambda_n) / \|y(x, \lambda_n)\|_{L_2(0, \pi)} \quad (2.2.30)$$

şeklinde ifade edilir.

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \|y(\cdot, \lambda_n)\|^{-2} \quad (2.2.31)$$

olsun. A operatörüne uygun Fourier dönüşümü

$$\Phi : f \in L_2(0, \pi) \rightarrow \hat{f}(\lambda) = \int_0^\pi f(x) y(x, \lambda) dx = (f, y(\cdot, \lambda))$$

şeklindedir. $y_n(x)$ fonksiyonları ortonormal baz olduğundan her $f \in L_2(0, \pi)$ için Parseval eşitliği sağlanır:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(\lambda_n)|^2 \|y(\cdot, \lambda_n)\|^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda). \quad (2.2.32)$$

Açıktır ki $\Phi f = \hat{f}$ dönüşümü $L_2(0, \pi)$ uzayını $L_2(R; d\rho(\lambda))$ uzayına örten dönüştürür.

(2.2.31) formülü ile belirli $\rho(\lambda)$ fonksiyonuna A operatörünün *spektral fonksiyonu* denir ve bu fonksiyon A operatörünün $\{\lambda_n\}$ spektrumu ve $\|y(\cdot, \lambda_n)\|^2$ norm-

ları ile tek türlü belirlidir. Şimdi spektral fonksiyonun h, H . sayıları ve $q(x)$ fonksiyonunu tek türlü belirmesi hakkında aşağıdaki teorem ifade ve ispar edilebilir. (bkz:[3])

Teorem 2.2.2: Varsayalım ki $\rho_j(\lambda)$, $j = 1, 2$ aşağıdaki sınır değer probleminin iki spektral fonsiyonudur;

$$l_j y_j = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q_j(x) \right) y_j = \lambda y_j, \quad x \in [a, b],$$

$$y_j'(a) - h_j y_j(a) = 0, \quad y_j'(b) + H_j y_j(b) = 0.$$

Burada h_j, H_j reel sayılardır ve $q_j(x) \in C^1[a, b]$ reel değerli fonksiyonlardır. Eğer $\rho_2(\lambda) = c\rho_1(\lambda)$, $c > 0$ ise $c = 1$, $h_1 = h_2$, $H_1 = H_2$ ve $q_1(x) = q_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$ 'dir.

İspat: Teorem 2.2.1'den $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ fonksiyonları y F operatörü kullanılarak $y_2 = Fy_1$ ilişkisi ile bağlıdır. Burada $F = E + K$ operatörü (2.2.3) formülü ile tanımlıdır. Keyfi $f \in L_2[a, b]$ fonksiyonu için

$$\widehat{f}_j = (f, y_j(\cdot, \lambda))$$

işaretleyelim. O halde diğer taraftan Parseval eşitliği ve $\rho_2(\lambda) = c\rho_1(\lambda)$ ilişkisi kullanılarak

$$\|f\|^2 = \int \left| \widehat{f}_2(\lambda) \right|^2 d\rho_2(\lambda) = c \int \left| \widehat{f}_2(\lambda) \right|^2 d\rho_1(\lambda) \quad (2.2.33)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\widehat{f}_2(\lambda) = (f, Fy_1) = (F^*f, y_1)$ sağlanır. Bu nedenle $\widehat{f}_2(\lambda) = F^*\widehat{f}_1(\lambda)$ 'dir, yani

$$\|F^*f\|^2 = \int \left| \widehat{f}_2(\lambda) \right|^2 d\rho_1(\lambda). \quad (2.2.34)$$

(2.2.33) ve (2.2.34) formülleri göz önüne alınırsa

$$\|c^{1/2}F^*f\| = \|f\|$$

eşitliği alınır. Yani $c^{1/2}F^* = c^{1/2}E + c^{1/2}K^*$ birim operatördür. Demek ki K^* normal operatördür ve $\|(K^*)^n\|^{1/n} = \|K^*\|$ 'dir. Diğer taraftan F operatörünün

tanımından K^* operatörünün

$$(K^*f)(x) = \int_x^b K(t, x)f(t)dt$$

Volterra operatörü olduğu alınır ve $n \rightarrow \infty$ için $\|(K^*)^n\|^{1/n} \rightarrow 0$ 'dır. Demek $K^* = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow F = E \Rightarrow c = 1$ ve her x ve λ için $y_1(x, \lambda) = y_2(x, \lambda)$ sağlanır. O halde $h_1 = h_2$, $H_1 = H_2$ ve $q_1(x) = q_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$ olduğu sonuncudan alınır. ■

2.3 Spektral Fonksiyona Göre Ters Problem

$[a, b]$ aralığında Sturm-Liouville ters probleminin özünü oluşturan aşağıdaki l_q diferansiyel operatörünü göz önüne alalım:

$$l_q y : \begin{cases} (-d^2/dx^2 + q(x))y \\ (y' - hy)_{x=a} = 0, \quad (y' + Hy)_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Burada $l_q y = \lambda y$ problemi için λ spektral parametre, $q(x) \in C[a, b]$ ve a, b, h, H sonlu numaralardır. Bilindiği gibi

$$l_q y = \lambda y \quad (2.3.2)$$

denkleminin trivial olmayan çözümünü temin eden λ değerlerine bu diferansiyel operatörün *özdeğerleri*, bu özdeğerlere karşı gelen aşikar olmayan $y(x, \lambda)$ çözümlerine de *özfunksiyonları* denir. Burada amaç bu diferansiyel operatörün λ_n özdeğerleri bilindiği zaman $q(x)$ fonksiyonunu bulmaktır. λ_n özdeğerlerine karşı gelen özfunksiyonlar $y_n(x) = y(x, \lambda_n)$ ile işaretlensin ve $\|y_n\|$ normları

$$\|y_n\|^2 = \int_a^b y_n^2(x)dx$$

ile tanımlıdır.

Bazen ters Sturm-Liouville problemi, l_q operatörünün $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu cinsinden ifade edilir. Bunu daha açık ifade etmek için aşağıdaki Cauchy

probleminin çözümü olan $y(x, \lambda)$ fonksiyonu incelenmelidir.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [a, b], \quad y(a, \lambda) = 1, \quad y'(a, \lambda) = h \quad (2.3.3)$$

Keyfi $g(x) \in L_2[a, b]$ fonksiyonu için

$$\tilde{g}(\lambda) = \int_a^b g(x)y(x, \lambda)dx, \quad \lambda \in (-\infty, \infty) \quad (2.3.4)$$

işaretleyelim. Bilindiği gibi $\tilde{g}(\lambda)$ fonksiyonuna $g(x)$ fonksiyonunun Fourier görüntüsü denir. $y(x, \lambda_n) = y_n(x)$ olduğundan $g(x)$ fonksiyonu, $\tilde{g}(\lambda_n)$ değerleri kullanılarak aşağıdaki gibi Fourier serisi şeklinde ifade edilebilir:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}(\lambda_n)}{\|y_n\|^2} y(x, \lambda_n) \quad (2.3.5)$$

Sonuncu eşitlikten, (2.3.4) denklemine denk olan

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\lambda)y(x, \lambda)d\rho(\lambda) \quad (2.3.6)$$

denklemini alınır. Burada $\rho(\lambda)$ fonksiyonu l_q operatörünün spektral fonksiyonudur ve

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\|y_n\|^2} \theta(\lambda - \lambda_n) \quad (2.3.7)$$

parçalı sürekli fonksiyonu şeklinde tanımlıdır. $\rho(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda = \lambda_n$ noktalarında sonlu süreksizliğe sahiptir ve her bir basamak $\|y_n\|^{-2}$ kadardır. O halde spektral fonksiyon, hem özdeğerler ve hemde özfonksiyonların normlarının bilgilerini içerir. Demek ki ters Sturm-Liouville problemi, spektral fonksiyonu verildiğinde l_q operatörü bulunarak formüle edilebilir.

Bunun için şimdi aşağıdaki denklemi verilen koşullarda inceleyelim:

$$L_q u = 0, \quad (x, t) \in D = \{(x, t) : a < x < b, t > 0\}, \quad (2.3.8)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \delta(x - a), \quad (2.3.9)$$

$$(u_x - hu)_{x=a} = 0, \quad (u_x + Hu)_{x=b} = 0. \quad (2.3.10)$$

Ayrıca

$$u(a, t) = f(t), \quad t \in (0, 2(b-a)) \quad (2.3.11)$$

olsun ve burada amaç $q(x) \in C(a, b)$ fonksiyonunu bulmaktır.

Şimdi bu problem için değişkenlere ayırma metodunu, yani Fourier metodunu kullanalım. (2.3.8)-(2.3.10) probleminin çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x)$$

şeklinde yazalım. Burada $y_n(x)$ fonksiyonları l_q ($y_n(a) = 1, y'_n(a) = h$) operatörünün özfonksiyonlarıdır. O halde (2.3.8) denklemi ve (2.3.9) başlangıç koşulundan $T_n(t)$ fonksiyonu için aşağıdaki problem alınır:

$$T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0,$$

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = \|y_n\|^{-2}.$$

Sonuncu denklem çözülürse $T_n(t) = A \cos \sqrt{\lambda_n} t + B \sin \sqrt{\lambda_n} t$, $A, B \in R$ elde edilir. Bu eşitlikte (4.9) koşulu göz önüne alınırsa A ve B katsayıları kolayca bulunur. O halde çözüm aşağıdaki şekildedir;

$$T_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} \|y_n\|^2} \sin \sqrt{\lambda_n} t.$$

Elde edilen $T_n(t)$ fonksiyonu $u(x, t)$ seri çözümünde yerine yazılırsa (2.3.8)-(2.3.10) probleminin çözümü elde edilir ve bu çözüm

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n} \|y_n\|^2} y_n(x) \text{ 'dir.}$$

$\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu kullanılarak $u(x, t)$ çözümü

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} y(x, \lambda) d\rho(\lambda) \quad (2.3.12)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Sonuncuda $x = a$ yerine yazılırsa $f(t)$ fonksiyonu ile

$\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu arasında

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} d\rho(\lambda) \quad (2.3.13)$$

ilişkisi elde edilir. Gerçekten

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} y(a, \lambda) d\rho(\lambda), \quad y_n(a) = y(a, \lambda) = 1 \text{ olduğundan} \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} d\rho(\lambda) \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

$\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu biliniyorsa ve (2.3.13) eşitliği kullanılırsa, $t \in (0, 2(b - a))$ için $f(t)$ fonksiyonu bulunabilir ve (2.3.8)-(2.3.11) ters problemi çözülebilir. O halde l_q operatörü de bulunabilir. Benzer olarak $t \in (0, 2(b - a))$ için $f(t)$ fonksiyonu biliniyorsa tek şekilde L_q elde edilir ve buradan l_q operatörü de bulunabilir. Bu nedenle $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun, $f(t)$ fonksiyonu ile tek şekilde belirlenmesi, $\rho(\lambda)$ ve $f(t)$, $t \in (0, 2(b - a))$ fonksiyonları arasında birebir dönüşüm olduğunu gösterir.

3 Sonlu Aralıkta $L_q u = 0$ Denklemi için Ters

Problemler

3.1 Sonlu Aralıkta Katsayının Bulunması Ters Problemi

Bu alt bölümde $u(0, t) = f(t)$ bilgisine göre $L_q u = 0$ denkleminin katsayısının belirlenmesi ters problemi incelenecektir. İlk olarak karakteristikler yöntemi ile problem integral denkleme indirgenecektir ve buradan ters problemin çözümü için gerek ve yeter koşul elde edilecektir. Daha sonra $f(t)$ fonksiyonun spektral karakterizasyonu belirlenecektir. (bkz:[2])

x değişkenine göre sınırlı $D = \{(x, t) : 0 < x < l, t > 0\}$ bölgesinde aşağıdaki diferansiyel denklemi göz önüne alalım:

$$L_q u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x) \right) u = 0 \quad (3.1.1)$$

Ayrıca

$$(u_x - hu)_{x=0} = g_1(t), \quad (u_x + Hu)_{x=l} = g_2(t), \quad t \geq 0 \quad (3.1.2)$$

bu denklemin sınır koşulları,

$$(u)_{t=0} = \phi(x), \quad (u_t)_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.1.3)$$

ise başlangıç koşulları olsun. Burada h ve H sonlu reel değerli parametrelerdir.

$q(x) \in C(0, 1)$ varsayımı altında

$$u(0, t) = f(t), \quad t \geq 0 \quad (3.1.4)$$

koşulunu kullanarak L_q operatörünün bulunması problemini inceleyelim.

(3.1.1)-(3.1.2) probleminin verisi singüler genelleşmiş fonksiyonlar olduğunda $g_1(t)$, $g_2(t)$ ve $\phi(x)$, $\psi(x)$ regüler fonksiyonlarının durumunu gözardı ederek aşağıdaki uygulama bakımından ilginç iki problem gözönüne alınabilir, yani:

$$g_1 = g_2 = \phi = 0, \quad \psi(x) = \delta(x); \quad (3.1.5)$$

$$g_2 = \phi = \psi = 0, \quad g_1(t) = -\delta(t). \quad (3.1.6)$$

Burada $\delta(x)$, delta fonksiyonudur ve keyfi sürekli $\psi(x)$ finite fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \delta(x) dx = \psi(0)$$

eşitliğini sağlar. (bkz:[11])

Not edelim ki birinci örnekte (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çözümü, $x_0 \rightarrow 0$ 'da $\psi(x) = \delta(x - x_0)$ fonksiyonuna uygun olarak (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çözümlerinin (genelleşmiş fonksiyonlara göre) limitidir. Benzer olarak ikinci örnekte $t_o \rightarrow 0$ için $g_1(t) = \delta(t - t_o)$ fonksiyonuna uygun olarak (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çözümlerinin limitidir. İleride bu iki çözüm beraber incelenecektir.

Ters problemin analizinden önce, (3.1.1)-(3.1.3) direkt probleminin çözümü için D bölgesinin içerisinde bu problemi integral denkleme indirgemeye dayalı olan mümkün metotlardan birisini göz önüne alalım.

İlk olarak (3.1.2)-(3.1.3) koşulları altında aşağıdaki denklem için bir ek problemi inceleyelim:

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x, t) \quad (x, t) \in D \quad (3.1.7)$$

D bölgesinin, x ekseninin $(0, l)$ kesiti ve bu kesitin uç noktalarından geçen karakteristikler ile sınırlı kısmında (3.1.2)-(3.1.3) koşulları altında (3.1.7) denkleminin çözümünü d'Alambert formülü ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x - t) + \phi(x + t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{-(x,t)} \int F(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3.1.8)$$

$$(x, t) \in D_0 = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq |x - \frac{1}{2}|\}$$

D/D_0 bölgesinde problemin çözümü sınır koşullarına bağlıdır. Şimdi (3.1.3) başlangıç koşulu ve (3.1.7) denklemini kullanılarak bu gösterilebilir. Önce D böl-

gesinin sağ ve sol sınırlarında u ve u_x fonksiyonları bulunup sonra bölgenin içerisindeki çözüm elde edilebilir. $x = 0, x = l$ 'de u ve u_x fonksiyonlarını bulmak için $(\partial/\partial t) + (\partial/\partial x)$ operatörünün D bölgesinin sağ sınırından, $(0, l)$ kesitini ayıran ve x ekseninin $(0, l)$ kesitinden geçen karakteristikler yığınına gözönüne alalım. Dalga operatörünü

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

çarpımı şeklinde yazarak (3.1.7) eşitliğini D bölgesindeki yığındaki sabitlenmiş karakteristikler üzere integralledikten sonra (3.1.3) verisini kullanırsak

$$(u_t - u_x)_{x=l} = \psi(l-t) - \phi'(l-t) + \sqrt{2} \int_0^t F(\tau - t + l, \tau) d\tau, \quad t \in (0, l)$$

eşitliği elde edilir. Gerçekten (3.1.7) eşitliğini D bölgesinde sabitlenmiş

$$L = \{(\xi, \tau) : \xi = \tau - (x - t), 0 \leq \tau \leq l + t - x\}$$

karakteristiği üzere integralleyelim. O halde aşağıdaki işlemler doğrudur:

$$(u_t - u_x) \Big|_{(x-t,0)}^{(l,l+t-x)} = \sqrt{2} \int_0^{t-x-l} F(\tau - t + x, \tau) d\tau$$

$$(u_t - u_x) \Big|_{(l,l+t-x)} - (u_t - u_x) \Big|_{(x-t,0)} = \sqrt{2} \int_0^{t-x-l} F(\tau - t + x, \tau) d\tau$$

$(u_t - u_x) \Big|_{(x-t,0)} = u_t(x-t, 0) - u_x(x-t, 0) = \psi(x-t) - \phi'(x-t)$ yerine yazılırsa;

$$(u_t - u_x) \Big|_{(l,l+t-x)} = \psi(x-t) - \phi'(x-t) + \sqrt{2} \int_0^{t-x-l} F(\tau - t + x, \tau) d\tau$$

$$(u_t - u_x) \Big|_{x=l} = \psi(l-t) - \phi'(l-t) + \sqrt{2} \int_0^t F(\tau - t + l, \tau) d\tau$$

Sonuncu eşitliği ve (3.1.2) sınır koşulunu $x = l$ 'de göz önüne alırsak

$$(u_t + Hu)_{x=l} = g_2(t) + \psi(l-t) - \phi'(l-t) + \sqrt{2} \int_0^t F(\tau - t + l, \tau) d\tau, \quad t \in (0, l)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem çözülürse kolayca

$$\begin{aligned} u(l, t) &= \phi(l - t) + \int_0^t e^{H(\tau-t)} [g_2(\tau) + \psi(l - \tau) \\ &\quad + H\phi(l - \tau) + \int_0^\tau F(\tau_1 - \tau + x, \tau_1) d\tau_1] d\tau \\ &\equiv f_2(t) \end{aligned}$$

denklemini alınıp. Bu denklemini (3.1.2) sınır koşulunda göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} u_x(l, t) + Hu(l, t) &= g_2(t) \\ u_x(l, t) &= g_2(t) - Hu(l, t) \\ u_x(l, t) &= g_2(t) - Hf_2(t) \equiv \chi_2(t), \quad t \in (0, l) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Şimdi (3.1.3) verisi kullanılarak, $t \in (0, l)$ ve $x = l$ için u ve u_x değerlerinin elde edildiği gibi $t \in (0, 2l)$ ve $x = 0$ içinde u ve u_x değerleri de elde edilebilir. Bunun için $(\partial/\partial t) - (\partial/\partial x)$ diferansiyel operatörünün $x = 0$ ve t -ekseninin $(0, 2l)$ kesitinden geçen karakteristikler yığınına gözönüne alalım ve dalga operatörünü aşağıdaki gibi yazalım;

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

(3.1.7) denklemini sabitlenmiş karakteristikler yığını üzere D bölgesinin sınırındaki bir noktadan diğerine integrallersek $x = 0$, $t \in (0, 2l)$ noktalarındaki $u_t + u_x$ fonksiyonu bulunabilir ve (3.1.2) sınır koşulunun $x = 0$ 'daki hali gözönüne alınırsa $u(0, t)$ ve $u_x(0, t)$ fonksiyonlarının $t \in (0, 2l)$ için hesaplanması mümkün olur. Gerçekten daha önceki işlemlere benzer olarak

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) u = F(x, t)$$

denklemini

$$L = \{(\xi, \tau) : -\xi = \tau - (x + t), 0 \leq \tau \leq t + x\}$$

karakteristiği üzere integralleyelim.

$$(u_t + u_x) \mid_{(0,x+t)}^{(x+t,0)} = \sqrt{2} \int_0^{x+t} F(t+x-\tau, \tau) d\tau$$

$$(u_t + u_x) \mid_{(0,x+t)} - (u_t + u_x) \mid_{(x+t,0)} = \sqrt{2} \int_0^{x+t} F(t+x-\tau, \tau) d\tau$$

$(u_t + u_x) \mid_{(x+t,0)} = u_t(x+t, 0) + u_x(x+t, 0) = \psi(x+t) + \phi'(x+t)$ yerine yazılırsa;

$$(u_t + u_x) \mid_{(0,x+t)} = \psi(x+t) + \phi'(x+t) + \sqrt{2} \int_0^{t-x-l} F(t+x-\tau, \tau) d\tau$$

$$(u_t + u_x) \mid_{x=0} = \psi(t) - \phi'(t) + \sqrt{2} \int_0^t F(t-\tau, \tau) d\tau$$

Şimdi (3.1.2) sınır koşulunun $x = 0$ 'daki değerini yerine yazarsak

$$(u_t + hu)_{x=0} = -g_1(t) + \psi(t) + \phi'(t) + \sqrt{2} \int_0^t F(t-\tau, \tau) d\tau, \quad t \in (0, l)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem çözülürse $u(0, t)$ fonksiyonunun aşağıdaki ifade-sine ulaşılır:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \phi(t) + \int_0^t e^{h(\tau-t)} [-g_1(\tau) + \psi(\tau) \\ &\quad - h\phi(\tau) + \int_0^\tau F(\tau-\tau_1, \tau_1) d\tau_1] d\tau \\ &\equiv f_1(t) \end{aligned}$$

Sonuncuda (3.1.2) sınır koşulu göz önüne alınırsa

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = g_1(t)$$

$$u_x(0, t) = g_1(t) + hu(0, t)$$

$$u_x(0, t) = g_1(t) + hf_1(t) \equiv \chi_1(t), \quad t \in (0, l)$$

elde edilir. Elde edilen bu değerler kullanılarak önce $x = l$, $t \in (l, 3l)$ noktalarındaki u ve u_x fonksiyonları, sonra $x = 0$, $t \in (2l, 4l)$ noktalarındaki u ve u_x fonksiyonları hesaplanabilir ve böyle devam eder. Bu nedenle her $t > 0$ için

sadece

$$\begin{aligned} u(0, t) &= f_1(t), & u_x(0, t) &= \chi_1(t) \\ u(l, t) &= f_2(t), & u_x(l, t) &= \chi_2(t) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

D bölgesinin içerisinde $u(x, t)$ çözümünün elde edilmesi için (3.1.7) denklemi ilk olarak $(\partial/\partial t) - (\partial/\partial x)$ operatörünün karakteristikleri sınıfı üzere ve daha sonra diğer karakteristikler sınıfı üzere integre edilmelidir. Gerçekten (3.1.7) denklemi ilk olarak

$$L = \{(\xi, \tau) : -\xi = \tau - (x + t), 0 \leq \tau \leq t + x\}$$

karakteristiği üzere integrallenirse aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} (u_t + u_x) \Big|_{(x,t)}^{(x+t,0)} &= \sqrt{2} \int_0^t F(t + x - \tau, \tau) d\tau, & x + t \leq l; \\ (u_t + u_x) \Big|_{(x,t)}^{(l, x+t-l)} &= \sqrt{2} \int_{x+t-l}^t F(t + x - \tau, \tau) d\tau, & x + t > l \end{aligned}$$

Bu iki denklemde uygun sınır koşulları göz önüne alınırsa ve $u_t + u_x = G(x, t)$ işaretlenirse $x + t \leq l$ ve $x + t > l$ için

$$G(x, t) = \begin{cases} f_2(x + t - l) + \chi_2(x + t - l) + \sqrt{2} \int_{x+t-l}^t F(t + x - \tau, \tau) d\tau, & x + t > l, \\ \psi(x + t) + \phi'(x + t) + \sqrt{2} \int_0^t F(t + x - \tau, \tau) d\tau, & x + t \leq l \end{cases}$$

alınır. Benzer şekilde sonuncu eşitlikler diğer karakteristik üzere integre edilirse aşağıdaki çözüme ulaşılır;

$$u(x, t) = \begin{cases} f_1(t - x) + \sqrt{2} \int_{t-x}^t G(\tau - t + x, \tau) d\tau, & t - x > 0, \\ \phi(x - t) + \sqrt{2} \int_0^t G(\tau - t + x, \tau) d\tau, & x - t \leq 0. \end{cases}$$

(3.1.1)-(3.1.3) problemi için yukarıdaki algoritma kullanılırsa ve F yerine $-qu$ yazılırsa, $u(x, t)$ fonksiyonu için integrallenme bölgesi $(0, t)$ aralığını içeren ve τ 'ya bağlı bir integral denklem elde edilir. Bunun için bu integral denklem, Volterra tipli denklemlerin özelliğini sağlar. Yani keyfi t için tek olarak çözülebilir ve bu çözüme standart ardışık yaklaşımlar metodunu uygulamakla kolayca ulaşılır.

Şimdi (3.1.1)-(3.1.3) problemini $f(t) = u(0, t)$ fonksiyonu için gerekli koşulları elde etmek amacı ile (3.1.5) veya (3.1.6) koşulları altında daha detaylı olarak inceleyelim. İleride $t \in (0, 2l)$ için $f(t)$ fonksiyonu öyle belirlenecektir ki $(0, l)$ aralığında $q(x)$ fonksiyonu tek şekilde bulunur. Bunun için (3.1.1)-(3.1.3) direkt probleminin çözümünü $D_1 \cup D_2$ bölgesinde inceleyelim. Burada D_1 ve D_2 bölgeleri aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < x\}, \\ D_2 &= \{(x, t) : 0 < x < l, x < t < 2l - x\}. \end{aligned}$$

İlk olarak (3.1.5) ve (3.1.6) koşulları altında

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in D_1 \quad (3.1.10)$$

olduğunu gösterelim. Gerçekten $D_0 \subset D_1$ bölgesinde (3.1.8) d'Alembert formülü ile

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int \int_{-(x,t)} q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D_0$$

düzgün integral denkleminde ulaşılır. Buradan $u(x, t) = 0, (x, t) \in D_0$ alınır. (3.1.9) formülü kullanılırsa

$$u(l, t) = -\sqrt{2} \int_0^t e^{H(\tau-t)} \int_{l-\tau/2}^l q(\xi) u(\xi, \tau - l + \xi) d\xi d\tau \quad (3.1.11)$$

eşitliği elde edilir. (3.1.1) denklemi $dx/dt = 1$ karakteristiği üzere integrallenirse

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = -\sqrt{2} \int_{(l+x-t)/2}^x q(\xi) u(\xi, \xi + t - x) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D_1 \setminus D_0$$

eşitliği elde edilir. Sonra (3.1.11) eşitliği kullanılarak $D_1 \setminus D_0$ bölgesinde $u(x, t)$ fonksiyonu elde edilir. Gerçekten sonuncu eşitliği diğer karakteristik yani

$$\tau = -\xi + (x + t)$$

üzere integralleyelim.

$$u \Big|_{\substack{(x,t) \\ (l, x+t-l)}} = -\sqrt{2} \int_{x+t-l}^t \int_{(l+t+x-2\tau)/2}^{t+x-\tau} q(\xi) u(\xi, \xi + 2\tau - t - x) d\xi d\tau$$

$$u(x, t) = u(l, x + t - l) - \sqrt{2} \int_{x+t-l}^t \int_{(l+t+x-2\tau)/2}^{t+x-\tau} q(\xi) u(\xi, \xi + 2\tau - t - x) d\xi d\tau$$

Şimdi (3.1.11) gözönüne alınırsa $u(x, t)$ için;

$$u(x, t) = -\sqrt{2} \int_0^{x+t-l} e^{H(\tau-t-x+l)} \int_{l-\tau/2}^l q(\xi) u(\xi, \tau - l + \xi) d\xi d\tau$$

$$- \sqrt{2} \int_{x+t-l}^t \int_{(l+t+x-2\tau)/2}^{t+x-\tau} q(\xi) u(\xi, \xi + 2\tau - t - x) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D_1 \setminus D_0 \quad (3.1.12)$$

denklemini elde edilir ve bu denklem düzgün Volterra tipli denklemdir. Buradan

$$u(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_1 \setminus D_0$$

alınır ve böylece (3.1.10) sağlanmış olur.

Benzer olarak (3.1.5), (3.1.6) verisi için D_2 bölgesinde $u(x, t)$ çözümü bulunursa aşağıdaki denklem elde edilir;

$$u(x, t) = e^{h(t-x)} - \sqrt{2} \int_0^{t-x} e^{h(\tau-t+x)} \int_0^{\tau/2} q(\xi) u(\xi, \tau - \xi) d\xi d\tau$$

$$- \sqrt{2} \int_{t-x}^t \int_{\tau-t+x}^{(2\tau+x-t)/2} q(\xi) u(\xi, 2\tau - t - \xi + x) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D_2. \quad (3.1.13)$$

Sonuncu gösteriyor ki (3.1.1)-(3.1.3) problemi ile (3.1.5) veya (3.61.) koşulları altındaki problemin çözümleri çakışiktır.

(3.1.5) verisini göz önüne alalım. Bilindiği gibi (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çözümü,

$$(u)_{t=0} = 0, \quad (u_t)_{t=0} = \delta(x - x_0)$$

Cauchy verisi ile (3.1.2) koşulları altında (3.1.1)'in $u(x, t, x_0)$ çözümlerinin $x_0 \rightarrow +0$ için limitidir.

Şimdi D bölgesinde $(x_0, 0)$ noktasından geçip D bölgesinin sağ ve sol sınır-

larına kadar olan karaktersitiklerin ve bu sınır noktalarından geçen karakteris-
tiklerin oluşturduğu D'_k , $k = 1, 2, 3, 4$ bölgelerini gözönüne alalım. Bu bölgeler
aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{(x, t) : x_0 < x < l, 0 < \tau < \xi - x_0\}, \\ D'_2 &= \{(x, t) : 0 < x < l - x_0, x_0 + \xi < \tau < 2l - \xi - x_0\}, \\ D'_3 &= \{(x, t) : 0 < x < x_0, 0 < \tau < x_0 - \xi\}, \\ D'_4 &= \{(x, t) : 0 < x < l, |\xi - x_0| < \tau < l - |\xi - x_0 + l|\}. \end{aligned}$$

$x_0 \rightarrow 0$ için sırası ile D'_1 ve D'_2 bölgeleri D_1 ve D_2 bölgelerine yakınsarken,
 D'_3 ve D'_4 bölgelerinin ölçüleri de sıfıra yakınsar. D'_1 ve D'_3 bölgelerinde $u(x, t, x_0)$
çözümü sıfır olur. (3.1.1) denklemi $dx/dt = -1$ karakteristiği boyunca integre
edilirse

$$(u_t + u_x)_{x=0} = \delta(t - x_0) - \sqrt{2}\theta(t - x_0) \int_0^{(t+x_0)/2} q(\xi)u(\xi, t - \xi)d\xi, \quad t \in (0, 2l - x_0)$$

denklemi elde edilir. Burada $\theta(t)$ Heaviside fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi
tanımlıdır;

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Gerçekten (3.1.1) denklemi $dx/dt = -1$ yani $\tau = -\xi + (x + t)$ karakteristiği üzere
integrallenirse aşağıdaki işlemler doğrudur;

$$\begin{aligned} (u_t + u_x) \Big|_{(x+t,0)}^{(x,t)} &= -\sqrt{2}\theta(x + t - x_0) \int_x^{(x+t+x_0)/2} q(\xi)u(\xi, x + t - \xi)d\xi, \\ (u_t + u_x)(x, t) &= \delta(x + t - x_0) - \sqrt{2}\theta(x + t - x_0) \int_x^{(x+t+x_0)/2} q(\xi)u(\xi, x + t - \xi)d\xi, \\ (u_t + u_x)_{x=0} &= \delta(t - x_0) - \sqrt{2}\theta(t - x_0) \int_0^{(t+x_0)/2} q(\xi)u(\xi, t - \xi)d\xi, \\ & \quad t \in (0, 2l - x_0). \end{aligned}$$

Sonuncu eşitlikten ve $x = 0$ 'daki sınır koşulundan kolayca

$$u(0, t) = \theta(t - x_0) \left[e^{h(x_0-t)} - \int_{x_0}^t e^{h(\tau-t)} \int_0^{(t+x_0)/2} q(\xi)u(\xi, \tau - \xi)d\xi d\tau \right],$$

$$t \in (0, 2l - x_0)$$

elde edilir. Elde edilen bu formül kullanılarak (3.1.1) denklemi (3.1.2) ve (3.1.3) koşulları altında $dx/dt = -1$ ve $dx/dt = 1$ karakteristikleri üzere integre edilirse D'_4 ve D'_2 bölgelerinde sırasıyla

$$u(x, t, x_0) = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \int_{(t-x+x_0)/2}^t \int_{\tau-t+x}^{(2\tau-t+x+x_0)/2} q(\xi) u(\xi, 2\tau - t + x - \xi, x_0) d\xi d\tau, \\ (x, t) \in D'_4,$$

$$u(x, t, x_0) = e^{h(x_0+x-t)} - \sqrt{2} \int_{x_0}^{t-x} \int_0^{(\tau+x_0)/2} q(\xi) u(\xi, \tau - \xi, x_0) d\xi d\tau \\ - \sqrt{2} \int_{t-x}^t \int_{\tau-t+x}^{(2\tau-t+x+x_0)/2} q(\xi) u(\xi, 2\tau - t + x - \xi, x_0) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D'_2$$

integral denklemleri elde edilir. Sonuncuda $x_0 \rightarrow 0$ limite geçilirse (3.1.13) çözümüne ulaşılır.

Benzer yol ile bize sunulan problem (3.1.6) verisi için de yoklanabilir. Burada $g_1(t)$ fonksiyonunu $-\delta(t - t_0)$ ile değiştirmek için bir t_0 parametresi dahil edelim ve (3.1.1)-(3.1.3) problemlerine uygun $u(x, t, t_0)$ çözümlerinin limitlerini inceleyelim. Önce

$$D'_1 = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < t_0 + x\}, \\ D'_2 = \{(x, t) : 0 < x < l, t_0 + x < t < t_0 + 2l - x\}$$

bölgelerini tanımlayarak başlayalım. Açıktır ki $t_0 \rightarrow 0$ iken $D'_1 \rightarrow D_1$ ve $D'_2 \rightarrow D_2$ 'dir. D'_1 bölgesinde $u(x, t, t_0) = 0$ 'dır ve bundan dolayı

$$(u_t + u_x)_{x=0} = -\sqrt{2}\theta(t - t_0) \int_0^{(t+t_0)/2} q(\xi) u(\xi, t - \xi, t_0) d\xi, \quad t \in (0, t_0 + 2l)$$

eşitliği sağlanır. Sonuncuda $(u_x - hu)_{x=0} = -\delta(t - t_0)$ sınır koşulu göz önüne alınırsa $u(x, t, t_0)$ için $x = 0$ 'daki değeri elde edilir ve bu aşağıdaki şekildedir;

$$u|_{x=0} = \theta(t - t_0) \left[e^{h(t_0-t)} - \sqrt{2} \int_{t_0}^t e^{h(\tau-t)} \int_0^{(\tau+t_0)/2} q(\xi) u(\xi, \tau - \xi, t_0) d\xi d\tau \right],$$

$$t \in (0, t_0 + 2l).$$

Alınan bu sonuç kullanılarak (3.1.1) denklemi D'_2 bölgesinde $dx/dt = -1$ ve $dx/dt = 1$ karakteristikleri üzere integrallenirse

$$u(x, t, t_0) = e^{h(t_0+x-t)} - \sqrt{2} \int_{t_0}^{t-x} e^{h(\tau-t+x)} \int_0^{(\tau+t_0)/2} q(\xi) u(\xi, \tau - \xi, t_0) d\xi d\tau$$

$$- \sqrt{2} \int_{t-x}^t \int_{\tau-t+x}^{(2\tau-t+x+x_0)/2} q(\xi) u(\xi, 2\tau - t + x - \xi, x_0) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D'_2$$

elde edilir. Sonuncuda $t_0 \rightarrow 0$ limite geçilirse (3.1.13) çözümüne ulaşılır.

Şimdi (3.1.13) denklemini inceleyelim. İlk olarak not edelim ki

$$u(x, x+0) = 1, \quad x \in (0, l) \text{ 'dir.}$$

(3.1.13) denklemi Volterra tipli integral denklemdir ve bu nedenle $C(D_2)$ uzayındaki fonksiyonlar sınıfında bu denklemin tek çözümü mevcuttur. Bu çözüm ardışık yaklaşımlar metodu ile bulunabilir. Bu sınıftan çözümün mevcut olması $q(x)$ fonksiyonunun $C(0, l)$ sınıfından olması sonucudur. Dahası (3.1.13) denkleminin diferansiyelinden, bu denklemin çözümünün $C^2(D_2)$ sınıfından olduğu kolayca alınır. Bundan dolayı

$$u_t(0, +0) = -h \text{ 'tır.}$$

Buradan $f(t)$ fonksiyonu için aşağıdaki gerekli koşullar çıkarılabilir;

- 1) $f(t) \in C^2(0, l)$,
- 2) $f(+0) = 1, \quad f'(+0) = -h$.

Şimdi bu koşulların aynı zamanda, yeteri kadar küçük aralıkta ters problemin çözülebilirliği için yeterli koşullar olduğunu gösterelim. Bunun için en uygun yollardan birisi (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çözümünü

$$D^- = \{(x, t) : 0 < x < l, t \leq 0\}$$

bölgesine tek olarak devam ettirmektir. Çözümü $w(x, t)$ fonksiyonu olan aşağı-

daki problemi göz önüne alalım;

$$L_q w = 0, \quad (x, t) \in D \cup D^-, \quad w|_{x=0} = \delta(t), \quad w_x|_{x=0} = h\delta(t). \quad (3.1.14)$$

$w(x, t)$ fonksiyonu için

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \theta(x - |t|) \tilde{w}(x, t) \quad (3.1.15)$$

gösterimi doğrudur. Burada $\tilde{w}(x, t)$ fonksiyonu t 'ye göre çift fonksiyondur ve

$$D'' = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, -x \leq t \leq x\}$$

bölgesinde birinci mertebeden türevleri ile beraber süreklidir. Ayrıca $\tilde{w}(x, t)$ fonksiyonu aşağıdaki integral denklemin çözümüdür;

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, t) = & \frac{1}{2}h + \frac{1}{4} \int_0^{(x+t)/2} q(\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_0^{(x-t)/2} q(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int \int_{\square(x,t)} q(\xi) \tilde{w}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D''. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Sonuncu denklemden özel halde

$$\tilde{w}(x, x) = \frac{1}{2}h + \frac{1}{4} \int_0^x q(\xi) d\xi, \quad x \in (0, l) \quad (3.1.17)$$

eşitliği alınır. (3.1.1) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u(0, t) &= f(t), \quad t \in (-2l, 2l), \quad f(-t) = -f(t), \\ (u_x + hu)_{x=0} &= 0, \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

koşullarını sağlar ve

$$Q = \{(x, t) : 0 < x < l, -2l + x < t < 2l - x\}$$

bölgesinde tek olarak belirlidir. Daha önce dahil edilen $w(x, t)$ fonksiyonu kul-

lanılırsa bu çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)w(x, \tau)d\tau = \frac{1}{2} [f(t - x) + f(t + x)] \\ + \int_{-x}^x f(t - \tau)\tilde{w}(x, \tau)d\tau, \quad (x, t) \in Q.$$

Buradan

$$\tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)]\tilde{w}(x, \tau)d\tau = -\frac{1}{2}[f'(t - x) + f'(t + x)], \quad (3.1.18)$$

$$x > 0, \quad t \in [0, x)$$

denkleminin çözümü olan $\tilde{w}(x, t)$ fonksiyonu için $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in D''$ koşulu gözönüne alınırsa ve (3.1.17) kullanılırsa $q(x)$ için

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x), \quad x \in (0, l)$$

ifadesi alınır. (3.1.17) denklemi gösteriyor ki (3.1.2) sınır koşulu içeren ters problem belirlerken h parametresi gibi bir bilinmeyen gözönüne alınmalıdır ve bu parametre

$$h = 2\tilde{w}(0, 0) = -f'(+0)$$

ile belirlenebilir. Şimdi yukarıda bahsedilenler ile ilgili teoremi verebiliriz:

Teorem 2.1: (3.1.1)-(3.1.4) ters probleminin $q(x) \in C(0, l)$ sınıfında tek şekilde çözülebilir olması için $f(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması gerek ve yeterdir;

$$1) f(x) \in C^2(0, 2l), \quad f(+0) = 1, \quad f'(+0) = -h,$$

$$2) f(-t) = -f(t), \quad t \in (0, 2l) \text{ için (3.1.18)}$$

denkleminin $x \in (0, l)$ için tek çözümü mevcuttur.

3.2 Sonlu Aralıkta Katsayı ve Başlangıç Verilerinin Bulunması Ters Problemi

Bu alt bölümde $u(0, t) = f_0(t)$ ve $u(1, t) = f_1(t)$ bilgilerine göre $L_q u = 0$ denklemi için başlangıç-sınır değer probleminden katsayının ve başlangıç verilenlerinin bulunması ters problemi incelenecektir. Problem, Sturm-Liouville operatörünün spektral özellikleri kullanılarak çözülecektir. (bkz:[7]-[8])

$D = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\infty < t < \infty\}$ bölgesinde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p(x) \right) u = 0 \quad (3.2.1)$$

hiperbolik denklemi,

$$(u_x - hu)_{x=0} = (u_x + Hu)_{x=1} = 0, \quad -\infty < t < \infty \quad (3.2.2)$$

sınır koşulları ve

$$(u)_{t=0} = a_0(x), \quad (u_t)_{t=0} = a_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2.3)$$

başlangıç koşulları ile göz önüne alınsın. (3.2.2) ve (3.2.3) koşulları ile beraber (3.2.1) denklemini $E(p, h, H; a_0, a_1)$ ile işaretleyelim. Burada $(p, h, H) \in C^1[0, 1] \times R \times R$ ve $(a_0, a_1) \in H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ 'dir. O halde $E(p, h, H; a_0, a_1)$ denkleminin tek zayıf $u = u(x, t) \in C_t^0((-\infty, \infty) \rightarrow H_x^1(0, 1)) \cap C_t^1((-\infty, \infty) \rightarrow L_x^2(0, 1))$ çözümü mevcuttur.

Varsayalım ki $E(p, h, H; a_0, a_1)$ problemi bilinmiyor olsun. Çözümün sadece $(u)_{x=0} = f_0(t)$, $(u)_{x=1} = f_1(t)$ sınır koşulları gözetilsin ve bu koşullar herhangi bir $-T \leq t \leq T$ zaman aralığında biliniyor olsun. Burada belirleyici problemi incelenmek istiyoruz. Bu amaçla D bölgesinde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x) \right) v = 0 \quad (3.2.4)$$

hiperbolik denklemi,

$$(v_x - jv)_{x=0} = (v_x + Jv)_{x=1} = 0, \quad -\infty < t < \infty \quad (3.2.5)$$

sınır koşulları ve

$$(v)_{t=0} = b_0(x), \quad (v_t)_{t=0} = b_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2.6)$$

başlangıç koşulları ile $E(p, h, H; a_0, a_1)$ denklemi için bir model olsun. Burada $(q, j, J) \in C^1[0, 1] \times R \times R$ ve $(b_0, b_1) \in H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ 'dir. Yukarıdaki iki problemin çözümlerindeki hatalar

$$\varepsilon_0(t) = v|_{x=0} - u|_{x=0}, \quad \varepsilon_1(t) = v|_{x=1} - u|_{x=1}, \quad -T \leq t \leq T \quad (3.2.7)$$

ile işaretlensin. Burada amaç bu problemin tekliğini incelemektir.

Bilindiği gibi $(d/dx - h) \cdot |_{x=0} = (d/dx + H) \cdot |_{x=1} = 0$ koşulları ile $-d^2/dx^2 + p(x)$ operatörü Sturm-Liouville operatörüdür. Bu operatörü $A_{p,h,H}$ ile işaretleyelim. $\{\lambda_n, n = 1, 2, \dots\}$, $A_{p,h,H}$ 'ın özdeğerleri ve $\{\phi_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ bu özdeğerlere karşı gelen normalleştirilmiş özfonksiyonlarıdır, yani $\|\phi_n\|_{L^2(0,1)} = 1$, $(n = 1, 2, \dots)$ 'dir. Ayrıca $\omega_n = \lambda_n^{1/2}$ için

$$\omega_n \equiv \lambda_n^{1/2} = n\pi + O(1/n), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.2.8)$$

asimtotik formülü sağlanır. $\lambda > -\lambda_0$ için $A_{p,h,H} + \lambda$ pozitif belirli olur ve

$$D((A_{p,h,H} + \lambda)^{1/2}) = H^1(0, 1)'dir. \quad (3.2.9)$$

Bu nedenle $a \in H^1(0, 1)$ olması için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 1) |(a, \phi_n)|^2 < \infty \quad (3.2.10)$$

olması gerek ve yeterdir. Burada $(,)$ ile L^2 uzayında iç çarpım işaretlenmiştir.

Bu notasyonlar altında $E(p, h, H; a_0, a_1)$ probleminin zayıf çözümü olan $u = u(x, t)$ fonksiyonu

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^0 \cos \omega_n t + a_n^1 \sin \omega_n t / \omega_n) \phi_n(x) \quad (3.2.11)$$

şeklinde verilebilir. Burada

$$a_n^0 = (a_0, \phi_n) \text{ ve } a_n^1 = (a_1, \phi_n)' \text{dir.} \quad (3.2.12)$$

(4.11) eşitliğinin sağ tarafı $C_t^0((-\infty, \infty) \rightarrow H_x^1(0, 1)) \cap C_t^1((-\infty, \infty) \rightarrow L_x^2(0, 1))$ 'de yakınsaktır. Çünkü $\{\phi_n\}$ sistemi $L^2(0, 1)$ 'de ortonormaldır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n^2 + 1)(a_n^0)^2 + (a_n^1)^2\} < \infty$$

sağlanır.

Tanım 3.2.1: Keyfi $n \in N \equiv \{1, 2, \dots\}$ için $(a_n^0)^2 + (a_n^1)^2 \neq 0$ ise $E(p, h, H; a_0, a_1) \in G$ denir.

Teorem 3.2.1: Eğer $E(p, h, H; a_0, a_1) \in G$, $T \geq 2$ ve $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_1(t) = 0$ ($-T \leq t \leq T$) ise $(q, j, J; b_0, b_1) = (p, h, H; a_0, a_1)$ sağlanır.

Teoremin ispatına başlamadan not edelim ki Sobolev imbedding teoremine göre $u(x, t) \in C^0([0, 1] \times (-\infty, \infty))$ 'dur. $\Omega, (0, 1) \times (-\infty, \infty)$ bölgesine dahil bir bölge olsun.

Tanım 3.2.2: $u = u(x, t)$ sürekli fonksiyonunun Ω 'da genelleşmiş manada

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p(x) \right) u = 0 \quad (3.2.13.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u + hu \right)_{x=0} = 0 \quad (3.2.13.2)$$

problemini sağlaması için, $\text{supp} \phi \cap [0, 1] \times (-\infty, \infty) \subset \overline{\Omega} \cap [0, 1] \times (-\infty, \infty)$ ile beraber her bir $\phi = \phi(x, t) \in C_o^2(R^2)$ için

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^1 dx u(x, t) \{ \phi_{tt} - \phi_{xx} + p(x) \phi(x, t) \} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt u(0, t) \{ \phi_x(0, t) - h \phi(0, t) \} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

eşitliği sağlanmalıdır.

(3.2.11) eşitliğindeki her bir $\cos \omega_n t \cdot \phi_n(x)$ ve $\sin \omega_n t \cdot \phi_n(x)$ terimi, (3.2.13) problemini genelleşmiş manada sağlar. O halde bu $u = u(x, t)$, $E(p, h, H; a_0, a_1)$ probleminin zayıf çözümüdür. Çünkü (3.2.11) eşitliğinin sağ tarafı $T > 0$ için

Sobolev imbedding teoremine göre $C^0([0, 1] \times [-T, T])$ 'de yakınsaktır.

$T > 0$ için

$$\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < \min(1, T), -T + x < t < T - x\} \quad (3.2.15)$$

olsun. O halde aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 3.2.1: $f = f(t) \in C^0[-T, T]$ için Ω_T bölgesinde (3.2.13)'ü genelleşmiş manada sağlayan tek $u = u(x, t) \in C^0(\overline{\Omega}_T)$ vardır ve

$$u|_{x=0} = f(t), \quad -T \leq t \leq T \quad (3.2.16)$$

sağlanır.

Gerçekten

$$u_0(x, t) = f(x + t) + h \int_{t-x}^{t+x} f(s) ds \quad (3.2.17)$$

ve

$$\Omega(x, t) = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, \xi - x + t < \eta < -\xi + x + t\} \quad (3.2.18)$$

olsun. O halde kolayca gösterebiliriz ki $u = u(x, t) \in C^0(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonu

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{2} \int \int_{\Omega(x, t)} p(\xi) u(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.2.19)$$

Volterra tipli denklemin çözümüdür ve (3.2.14) ve (3.2.16) eşitliklerini sağlar.

Diğer taraftan u fonksiyonunun tekliğini göstermek için eşlenik problemin birden çok çözümü olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Temel amaç u ve v çözümlerini aşağıdaki formüldeki gibi birleştirmektir. Her λ için

$$\phi(x; q, j, \lambda) = \phi(x; p, h, \lambda) + \int_0^x K(x, y; q, j; p, h) \phi(y; p, h, \lambda) dy,$$

$$0 \leq x \leq 1$$

eşitliği sağlanır. Bu formüle *birinci deformasyon formülü* denir.

Ayrıca $K = K(x, y) = K(x, y; q, j; p, h) \in C^2(\overline{D})$ çekirdeği, $h, j \in R$ ve

$p, q \in C^1[0, 1]$ için

$$K_{xx} - K_{yy} + p(y)K = q(x)K, \quad (3.2.20)$$

$$K(x, x) = (j - h) + \frac{1}{2} \int_0^x (q(s) - p(s))ds, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.2.21)$$

$$K_y(x, 0) = hK(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2.22)$$

problemini tek şekilde sağlar. Şimdi aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.2.1: Eğer $u = u(x, t) \in C^0([0, 1] \times (-\infty, \infty))$ fonksiyonu, Ω_T 'de genelleşmiş manada

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + p(x)u = 0 \quad (3.2.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u - hu\right)_{x=0} = 0 \quad (3.2.24)$$

problemini sağlıyorsa,

$$\begin{aligned} V(x, t) &= u(x, t) + \int_0^x K(x, y; q, j; p, h)u(y, t)dy \\ &\in C^0([0, 1] \times (-\infty, \infty)) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

fonksiyonu

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}V - \frac{\partial^2}{\partial x^2}V + q(x)V = 0 \quad (3.2.26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}V - jV\right)_{x=0} = 0 \quad (3.2.27)$$

problemini Ω_T 'de genelleşmiş manada sağlar ve

$$V|_{x=0} = u|_{x=0}, \quad -T \leq t \leq T. \quad (3.2.28)$$

İspat: İlk olarak lemmadaki iddianın $u = u(x, t) \in C^2([0, 1] \times (-\infty, \infty))$ durumuna indirgenebileceğini gösterelim.

$$u|_{x=0} = f(t), \quad -T \leq t \leq T \quad (3.2.29)$$

işaretleyelim ve $f^\varepsilon = f^\varepsilon(t) \in C^2[-T, T]$ alalım. Burada $C^0[-T, T]$ 'de $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$f^\varepsilon \rightarrow f \text{ dir.} \quad (3.2.30)$$

Önerme 3.2.1'e göre öyle tek $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t) \in C^0(\overline{\Omega}_T)$ vardır ki

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u^\varepsilon - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^\varepsilon + p(x) u^\varepsilon = 0, \quad (3.2.31)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u^\varepsilon - h u^\varepsilon \right)_{x=0} = 0 \quad (3.2.32)$$

problemini Ω_T 'de genelleşmiş manada sağlar ve

$$u^\varepsilon|_{x=0} = f^\varepsilon(t), \quad -T \leq t \leq T. \quad (3.2.33)$$

O halde u^ε fonksiyonu

$$u^\varepsilon(x, t) = u_0^\varepsilon(x, t) + \frac{1}{2} \int \int_{\Omega(x, t)} p(\xi) u^\varepsilon(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.2.34)$$

integral denklemini sağlar. Burada

$$u_0^\varepsilon(x, t) = f^\varepsilon(x + t) + h \int_{t-x}^{t+x} f^\varepsilon(s) ds \in C^2(\overline{\Omega}_T)'dir. \quad (3.2.35)$$

Onun için $u^\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ 'dir ve u^ε fonksiyonu (3.2.31)-(3.2.32) problemini klasik manada sağlar. Ayrıca

$$\tilde{u}(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{2} \int \int_{\Omega(x, t)} p(\xi) \tilde{u}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3.2.36)$$

$$u_0(x, t) = f(x + t) + h \int_{t-x}^{t+x} f(s) ds \quad (3.2.37)$$

probleminin çözümü olan $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t) \in C^0(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonu için $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$u^\varepsilon \rightarrow \tilde{u} \quad (3.2.38)$$

olduğu görülür. Demek ki $\tilde{u}$ fonksiyonu, $u = u(x, t)$ fonksiyonundan başka bir fonksiyon değildir.

Şimdi varsayalım ki

$$V^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(x, t) + \int_0^x K(x, y; q, j; p, h) u^\varepsilon(y, t) dy \quad (3.2.39)$$

eşitliği ile tanımlı $V^\varepsilon = V^\varepsilon(x, t) \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonu klasik manada aşağıdaki problemi sağlar;

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} V^\varepsilon - \frac{\partial^2}{\partial x^2} V^\varepsilon + q(x) V^\varepsilon = 0, \quad \overline{\Omega}_T, \quad (3.2.40)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} V^\varepsilon - j V^\varepsilon \right)_{x=0} = 0, \quad -T \leq t \leq T, \quad (3.2.41)$$

$$V^\varepsilon|_{x=0} = f^\varepsilon(t), \quad -T \leq t \leq T. \quad (3.2.42)$$

O halde V^ε fonksiyonu

$$V^\varepsilon(x, t) = V_0^\varepsilon(x, t) + \frac{1}{2} \int \int_{\Omega(x, t)} q(\xi) V^\varepsilon(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3.2.43)$$

$$V_0^\varepsilon(x, t) = f^\varepsilon(x+t) + j \int_{t-x}^{t+x} f^\varepsilon(s) ds \quad (3.2.44)$$

integral denklemini sağlar. (3.2.39) ve (3.2.44) eşitliklerinde $\varepsilon \rightarrow 0$ alırsak

$$V(x, t) = u(x, t) + \int_0^x K(x, y; q, j; p, h) u(y, t) dy$$

fonksiyonunun

$$V(x, t) = V_0(x, t) + \frac{1}{2} \int \int_{\Omega(x, t)} q(\xi) V(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3.2.45)$$

$$V_0(x, t) = f(x+t) + j \int_{t-x}^{t+x} f(s) ds \quad (3.2.46)$$

problemini sağladığı görülür. Bundan dolayı V fonksiyonu, Ω_T 'de (3.2.26) denklemini (3.2.27) ile genelleşmiş manada sağlar ve aynı zamanda (3.2.28)'de sağlanır.

Demek ki lemma $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ durumuna indirgenebilir.

Bu durumda (3.2.28) açıktır. (3.2.26) ve (3.2.21)'den ve

$$V_x(x, t) = u_x(x, t) + K(x, x) u(x, t) + \int_0^x K_x(x, y) u(y, t) dy \quad (3.2.47)$$

olduğundan, (3.2.27) koşulu aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} -V + jV \quad | \quad x=0 &= u_x + (K(0,0) + j)u \quad |_{x=0}, \\ &= (-h + K(0,0) + j)u \quad |_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Son olarak (3.2.21) kullanılırsa

$$\begin{aligned} I &\equiv V_{xx}(x,t) - q(x)V(x,t) \\ &= u_{xx}(x,t) + \left(\frac{d}{dx} K(x,x) \right) u(x,t) + K(x,x)u_x(x,t) + K_x(x,x)u(x,t) \\ &\quad - q(x)u(x,t) + \int_0^x \{K_{xx} - q(x)K(x,y)\} u(y,t) dy \\ &= u_{xx}(x,t) + \left(\frac{d}{dx} K(x,x) + K_x(x,x) - q(x) \right) u(x,t) \\ &\quad + K(x,x)u_x(x,t) + \int_0^x \{K_{yy} - p(y)K(x,y)\} u(y,t) dy \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} I &= u_{xx}(x,t) + \left(\frac{d}{dx} K(x,x) + K_x(x,x) - q(x) \right) u(x,t) \\ &\quad + K(x,x)u_x(x,t) + [K_y(x,y)u(y,t) - K(x,y)u_y(y,t)]_{y=0}^{y=x} \\ &\quad + \int_0^x K(x,y) \{u_{yy}(y,t) - p(y)u(y,t)\} dy \end{aligned}$$

alınır. Sonuncuda (3.2.22) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} I &= u_{xx}(x,t) + \left(2\frac{d}{dx} K(x,x) - q(x) \right) u(x,t) + \int_0^x K(x,y) \{u_{yy}(y,t) - p(y)u(y,t)\} dy \\ &= u_{xx}(x,t) - p(x)u(x,t) + \int_0^x K(x,y) \{u_{yy}(y,t) - p(y)u(y,t)\} dy \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ u(x,t) + \int_0^x K(x,y)u(y,t) dy \right\} = V_{tt}(x,t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu demektir ki $I \equiv V_{xx}(x,t) - q(x)V(x,t) = V_{tt}(x,t)$, yani (3.2.26) sağlanır.

Şimdi teorem 3.2.1 'in ispatını verebiliriz.

İspat: Varsayalım ki $E(p, h, H; a_0, a_1) \in G'$ dir. $u = u(x, t)$ ve $v = v(x, t)$ sırasıyla $E(p, h, H; a_0, a_1)$ ve $E(q, j, J; b_0, b_1)$ problemlerinin zayıf çözümleri olsun. Burada $(p, h, H; a_0, a_1), (q, j, J; b_0, b_1) \in C^1[0, 1] \times R \times R \times H^1(0, 1) \times$

$L^2(0, 1)$ 'dir. Varsayalımki $T \geq 2$ için

$$v|_{x=0} = u|_{x=0}, \quad v|_{x=1} = u|_{x=1}, \quad -T \leq t \leq T \quad (3.2.48)$$

eşitlikleri sağlansın.

$K(x, y) = K(x, y; q, j; p, h)$ fonksiyonu (3.2.20)-(3.2.22) problemindeki çekirdek olsun ve

$$V(x, t) = u(x, t) + \int_0^x K(x, y)u(y, t)dy \quad (3.2.49)$$

alınsın. Lemma 3.2.1 'e göre $V = V(x, t) \in C_t^0((-\infty, \infty) \rightarrow H_x^1(0, 1)) \cap C_t^1((-\infty, \infty) \rightarrow L_x^2(0, 1)) \subset C^0([0, 1] \times (-\infty, \infty))$ fonksiyonu, (3.2.26)-(3.2.27) problemini Ω_T bölgesinde genelleşmiş manada sağlar ve (3.2.48) eşitliklerine göre

$$V|_{x=0} = u|_{x=0} = v|_{x=0}, \quad -T \leq t \leq T \quad (3.2.28')$$

sağlanır. Bu nedenle önerme 3.2.1'e göre $\bar{\Omega}_T$ bölgesinde $V = v$ 'dir. $T \geq 2$ olduğundan, sonuncu eşitlikten

$$V|_{x=1} = v|_{x=1}, \quad -T_1 \leq t \leq T_1 \quad (3.2.50)$$

alınır. Burada $T_1 = T - 1$ 'dir. (3.2.48)'in ikinci eşitliğini ve (3.2.50) eşitliğini, (3.2.49)'da göz önüne alırsak

$$\int_0^1 K(1, y)u(y, t)dy = 0, \quad -T_1 \leq t \leq T_1 \quad (3.2.51)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$(K(1, 1) + J - H)u(1, t) + \int_0^1 K_x(1, y)u(y, t)dy = 0, \quad -T_1 \leq t \leq T_1 \quad (3.2.52)$$

eşitliğide sağlanır. Bu eşitliğin ispatı ekte verilmiştir.

Şimdi teoremin ispatını tamamlamadan aşağıdaki önermeyi vermeliyiz.

Önerme 3.2.2: $E(p, h, H; a_0, a_1) \in G$ ve $T \geq 2$ varsayımları altında (3.2.51) ve (3.2.52)'den sırası ile

$$K(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.2.53)$$

ve

$$K(1, 1) + J - H = 0, \quad K_x(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.2.54)$$

eşitlikleri alınır.

Gerçekten (3.2.53) ve (3.2.54) eşitliklerinden $K \equiv 0$ ve

$$q = p, \quad j = h, \quad J = H \quad (3.2.55)$$

alınır. O halde v ve u çözümlerinin farkını $W = v - u$ ile işaretlersek $c_n^0 = (b_0, \phi_n) - (a_0, \phi_n)$ ve $c_n^1 = (b_1, \phi_n) - (a_1, \phi_n)$ olmakla

$$W = v - u = \sum_{n=0}^{\infty} \{c_n^0 \cos \omega_n t + c_n^1 \sin \omega_n t / \omega_n\} \phi_n(x) \quad (3.2.56)$$

eşitliğine ulaşılır. Şimdi (3.2.48) kullanılırsa

$$W|_{x=0} = W|_{x=1} = 0, \quad -T \leq t \leq T \quad (3.2.57)$$

elde edilir. Önerme 3.2.1 kullanılırsa

$$W(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \quad (3.2.58)$$

alınır ve burada Ω_1 ve Ω_2 bölgeleri aşağıdaki gibidir;

$$\Omega_1 = \{(x, t) : 0 < x < \min(1, T), x - T < t < -x + T\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, t) : \max(0, 1 - T) < x < 1, -x + 1 - T < t < x - 1 + T\}.$$

$T \geq 2$ olduğu için $W|_{t=0} = 0$ ve $W_t|_{t=0} = 0$ 'dır. Bu iki eşitlikten sırası ile $c_n^0 = (W|_{t=0}, \phi_n) = 0$ ve $c_n^1 = (W_t|_{t=0}, \phi_n) = 0$ alınır. O halde

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 \quad (3.2.59)$$

sağlanır ve teorem 3.2.1 ispatlanmış olur. ■

İspat önerme 3.2.2: (3.2.11) açılımını hatırlayalım ve

$$\omega(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{a}_n^0 \cos \omega_n t + \tilde{a}_n^1 \sin \omega_n t / \omega_n) \phi_n(x) \quad (3.2.60)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada

$$\tilde{a}_n^0 = a_n^0 \int_0^1 K(1, y) \phi_n(y) dy / \phi_n(1), \quad (3.2.61)$$

$$\tilde{a}_n^1 = a_n^1 \int_0^1 K(1, y) \phi_n(y) dy / \phi_n(1) \text{ 'dir.} \quad (3.2.62)$$

$\phi_n(1) \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) olduğu ve $\phi_n(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^n + O(\frac{1}{n})$ ($n \rightarrow \infty$) sağlandığı için $\inf \{|\phi_n(1)| : n = 0, 1, 2, \dots\} > 0$ 'dır. Diğer taraftan Parseval ilişkisine göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 K(1, y) \phi_n(y) dy \right)^2 = \|K(1, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 < \infty$$

olduğundan

$$\sup \left\{ \left| \int_0^1 K(1, y) \phi_n(y) dy \right| : n = 0, 1, 2, \dots \right\} < \infty$$

alınır. O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (n^2 + 1)(\tilde{a}_n^0)^2 + (\tilde{a}_n^1)^2 \} \leq \text{sabit} \times \sum_{n=0}^{\infty} \{ (n^2 + 1)(a_n^0)^2 + (a_n^1)^2 \} < \infty$$

elde edilir. Bu nedenle (3.2.60) eşitliğinin sağ tarafı $C_t^0((-\infty, \infty) \rightarrow H_x^1(0, 1)) \cap C_t^1((-\infty, \infty) \rightarrow L_x^2(0, 1))$ 'de yakınsaktır ve $\omega = \omega(x, t)$ fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümüdür.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x) \right) \omega = 0, \quad (3.2.63)$$

$$(\omega_x - h\omega)_{x=0} = (\omega_x + H\omega)_{x=1} = 0, \quad (3.2.64)$$

$$(\omega)_{t=0} = \tilde{a}_0, \quad (\omega_t)_{t=0} = \tilde{a}_1. \quad (3.2.65)$$

Burada

$$\tilde{a}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n^0 \phi_n(x) \in H^1(0, 1), \quad (3.2.66)$$

$$\tilde{a}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n^1 \phi_n(x) \in L^2(0, 1) \text{ 'dir.} \quad (3.2.67)$$

Özel halde $\omega = \omega(x, t) \in C^0([0, 1] \times (-\infty, \infty))$ fonksiyonu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p(x) \right) \omega = 0, \quad (3.2.68)$$

$$(\omega_x + H\omega)_{x=1} = 0 \quad (3.2.69)$$

problemini genelleşmiş manada sağlar. Bununla beraber (3.2.11) ve (3.2.51)'den

$$\begin{aligned} \omega \mid_{x=1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n^0 \cos \omega_n t + a_n^1 \sin \omega_n t/t\} \int_0^1 K(1, y) \phi_n(y) dy \\ &= \int_0^1 K(1, y) u(y, t) dy = 0, \quad -T_1 \leq t \leq T_1 \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

sağlanır.

Önerme 3.2.1'den $\Omega_2 = \{(x, t) : \max(0, 1 - T_1) < x < 1, -x + 1 - T_1 < t < x - 1 + T_1\}$ bölgesinde $\omega = 0$ alınır. $T_1 \geq 1$ ve $\omega \in C_t^0((-\infty, \infty) \rightarrow H_x^1(0, 1)) \cap C_t^1((-\infty, \infty) \rightarrow L_x^2(0, 1))$ olduğundan,

$$\omega \mid_{t=0} = \omega_t \mid_{t=0} = 0$$

elde edilir. O halde $\tilde{a}_n^0 = (\omega \mid_{t=0}, \phi_n) = 0$ ve $\tilde{a}_n^1 = (\omega_t \mid_{t=0}, \phi_n) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)'dir. Bu yüzden (3.2.61)-(3.2.62)'den aşağıdaki eşitlik alınır;

$$a_n^0 \int_0^1 K(1, y) \phi_n(y) dy = a_n^1 \int_0^1 K(1, y) \phi_n(y) dy, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$E(p, h, H; a_0, a_1) \in G$ varsayımından keyfi $n \in N$ için $(a_n^0)^2 + (a_n^1)^2 \neq 0$ olduğundan sonuncu eşitlikten

$$\int_0^1 K(1, y) \phi_n(y) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

alınır.

Şimdi (3.2.54)'yi ispatlayalım. Benzer olarak

$$\omega(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{a}_n^0 \cos \omega_n t + \tilde{a}_n^1 \sin \omega_n t / \omega_n) \phi_n(x) \quad (3.2.71)$$

olsun. Burada

$$\tilde{a}_n^0 = a_n^0 \left\{ (K(1, 1) + J - H) + \left(\int_0^1 K_x(1, y) \phi_n(y) dy \right) / \phi_n(1) \right\}, \quad (3.2.72)$$

$$\tilde{a}_n^1 = a_n^1 \left\{ (K(1, 1) + J - H) + \left(\int_0^1 K_x(1, y) \phi_n(y) dy \right) / \phi_n(1) \right\} \text{ 'dir. } \quad (3.2.73)$$

$T_1 \geq 1$ ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (n^2 + 1)(\tilde{a}_n^0)^2 + (\tilde{a}_n^1)^2 \} \leq \text{sabit} \times \sum_{n=0}^{\infty} \{ (n^2 + 1)(a_n^0)^2 + (a_n^1)^2 \} < \infty,$$

$$\omega|_{x=1} = (K(1, 1) + J - H)u(1, t) + \int_0^1 K_x(1, y)u(y, t)dy = 0, \quad -T_1 \leq t \leq T$$

olduğundan dolayı $\tilde{a}_n^0 = \tilde{a}_n^1 = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)'dir. O halde $E(p, h, H; a_0, a_1) \in G$ olduğundan dolayı

$$(K(1, 1) + J - H)\phi_n(1) + \int_0^1 K_x(1, y)\phi_n(y)dy = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.74)$$

alınır. Sonuncu eşitlikten (3.2.54) elde edilir. ■

4 SONUÇLAR

Tezde aşağıdaki sonuçlara varılmıştır:

- Dönüşüm operatörü yöntemiyle spektral fonksiyonuna göre sonlu aralıkta Sturm-Liouville operatörü tek şekilde belirlenir;

- Çözümün $x = 0$ doğrusu üzerindeki izi, yani $u(0, t) = f(t)$, biliniyorsa $[0, 1]$ aralığında verilmiş $L_q u = 0$ denklemi için başlangıç sınır değer probleminden denklemin katsayısı tek şekilde belirlenebilir;

- Çözümün $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları üzerindeki izleri, yani $u(0, t) = f_1(t)$ ve $u(1, t) = f_2(t)$, biliniyorsa $[0, 1]$ aralığında verilmiş $L_q u = 0$ denklemi için başlangıç sınır değer probleminden denklemin katsayısı, başlangıç verileri ve sınır koşullarındaki sabit parametreler tek şekilde belirlenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] G. Freiling, V. Yurko, Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications, 2001 Nova Science Publishers
- [2] V.G. Romanov, Inverse Problems of Mathematical Physics, 1987 VNU Science Press BV
- [3] A.L. Bukhgeim, Introduction to the Theory of Inverse Problems, 2000 VNU Science Press BV
- [4] K. Chadan, D. Colton, W. Rundell, L. Paivarinta, An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems, 1997 SIAM
- [5] B.M. Levitan, I.S. Sargsjan, Sturm-Liouville and Dirac Operators, 1991 Kluwer Academic Publishers
- [6] B. M. Levitan, Inverse Sturm-Liouville Problems, 1987 VNU Science Press BV
- [7] Suzuki, T. 1985 "Gel'fand-Levitan's theory, deformation formulas and inverse problems" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 32 223-71
- [8] Suzuki, T. 1984 "A stability theorem on the boundary identification for coefficients of hyperbolic equations" Proc. Japan Acad. A 60 309-11
- [9] V.A. Marchenko, Sturm-Liouville Operators and Their Applications, 1978 Naukova Dymka, Kiev
- [10] B.M. Levitan, I.S. Sargsjan, Introduction to the Spectral Theory, 1970 Nauka, Moscow
- [11] A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii, Equations of Mathematical Physics, 1963 Pergamon Press

EK-I

5.42 Eşitliğinin İspatı:

İspata başlamadan önce aşağıdaki lemmayı dahil edelim.

Lemma I.1: $u = u(x, t) \in C^0([0, 1] \times (-\infty, \infty))$ fonksiyonu $\Omega = (0, 1) \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde genelleşmiş manada

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p(x) \right) u = 0, \quad (\text{I.1.1})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u - hu \right)_{x=0} = 0 \quad (\text{I.1.2})$$

problemini sağlasın. Ohalde her bir $\psi = \psi(x, y, t) \in C_0^2(R^3)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx \int_0^x dy u(y, t) \{ \psi_{tt}(x, y, t) - \psi_{yy}(x, y, t) + p(y)\psi(x, y, t) \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx u(0, t) \{ \psi_y(x, 0, t) - h\psi(x, 0, t) \} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dt u(1, t) \psi(1, 1, t) - \int_{-\infty}^{\infty} dt u(0, t) \psi(0, 0, t) \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx u(x, t) \left\{ \psi_y(x, x, t) + \frac{d}{dx} \psi(x, x, t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi (5.42) eşitliğinin ispatını verebiliriz.

(5.41) eşitliğini hatırlayalım ve $V = V(x, t) \in C^0([0, 1] \times (-\infty, \infty))$ fonksiyonu, $T_1 = T - 1$ için $\Omega = (0, 1) \times (-T_1, T_1)$ bölgesinde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x) \right) V = 0, \quad (\text{I.3.1})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} V + JV \right)_{x=0} = 0 \quad (\text{I.3.2})$$

problemini genelleşmiş manada sağlasın. Bu da $\text{supp} \phi \cap ([0, 1] \times (-\infty, \infty)) \subset (0, 1] \times (-T_1, T_1)$ ile her bir $\phi = \phi(x, t) \in C_0^2(R^2)$ için

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx V(x, t) \{ \phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t) + q(x)\phi(x, t) \} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt V(1, t) \{ \phi_x(1, t) + J\phi(1, t) \} \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

eşitliğinin sağlanması demektir. Benzer olarak $u = u(x, t) \in C^0([0, 1] \times (-\infty, \infty))$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx u(x, t) \{ \phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t) + p(x)\phi(x, t) \} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt u(1, t) \{ \phi_x(1, t) + H\phi(1, t) \} \end{aligned} \quad (I.5)$$

eşitliğini sağlar. (5.39) eşitliğinden, (I.4)'ün sol tarafı

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx \left\{ u(x, t) + \int_0^x dy K(x, y) u(y, t) \right\} \\ & \times \{ \phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t) + q(x)\phi(x, t) \} \end{aligned} \quad (I.6)$$

eşittir. Buradan $K_{xx} - K_{yy} + p(y)K = q(x)K$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^x dy K(x, y) u(y, t) \phi_{xx}(x, t) \\ &= \int_0^1 dy u(y, t) \int_y^1 dx K(x, y) \phi_{xx}(x, t) \\ &= \int_0^1 dy u(y, t) \{ K(1, y) \phi_x(1, t) - K_x(1, t) \phi(1, t) \} \\ &+ \int_0^1 dy u(y, t) \{ K_x(y, y) \phi(y, t) - K(y, y) \phi_x(y, t) \} \\ &+ \int_0^1 dy u(y, t) \int_y^1 dx \{ K_{yy}(x, y) - p(y)K(x, y) + q(x)K(x, y) \} \phi(x, t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle (I.6)'nın ikinci terimi aşağıdaki şekli alır;

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx \int_0^x dy K(x, y) u(y, t) \{ \phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t) + q(x)\phi(x, t) \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx \int_0^x dy u(y, t) \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p(x) \right) (K(x, y)\phi(x, t)) \right\} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx u(x, t) \{ \phi_x(x, t) K(x, x) - \phi(x, t) K_x(x, x) \} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dy u(y, t) \{ \phi(1, t) K_x(1, y) - \phi_x(1, t) K(1, y) \}. \end{aligned}$$

Lemma I.1 kullanılırsa, $\text{supp } \phi \cap ([0, 1] \times (-\infty, \infty)) \subset (0, 1] \times (-\infty, \infty)$ olduğu

için

$$\begin{aligned}
I = & \int_{-\infty}^{\infty} dt u(1, t) K(1, 1) \phi(1, t) \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx u(x, t) \left\{ K_x(x, x) \phi(x, t) + \left(\frac{d}{dx} K(x, x) \right) \phi(x, t) + K(1, 1) \phi_x(x, t) \right\} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx u(x, t) \{ \phi_x(x, t) K(x, x) - \phi(x, t) K_x(x, x) \} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dy u(y, t) \{ K_x(1, y) \phi(1, t) - K(1, y) \phi_x(1, t) \}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
I = & \int_{-\infty}^{\infty} dt u(1, t) K(1, 1) \phi(1, t) \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx u(x, t) \left(2 \frac{d}{dx} K(x, x) \right) \phi(x, t) \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dy u(y, t) \{ K_x(1, y) \phi(1, t) - K(1, y) \phi_x(1, t) \} \text{ 'dir.}
\end{aligned}$$

Buradan (I.6) yani (I.4)'ün sol tarafı $K(x, x) = (j-h) + \frac{1}{2} \int_0^x (q(s) - p(s)) ds$, $0 \leq x \leq 1$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}
II = & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dx u(x, t) \{ \phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t) + p(x) \phi(x, t) \} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt u(1, t) K(1, 1) \phi(1, t) \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^1 dy u(y, t) \{ K_x(1, y) \phi(1, t) - K(1, y) \phi_x(1, t) \} \quad (\text{I.7})
\end{aligned}$$

alınır. (I.5)'ten ve $\int_0^1 K(1, y) u(y, t) dy = 0$, $-T \leq t \leq T$ olduğundan

$$\begin{aligned}
II = & \int_{-\infty}^{\infty} dt u(1, t) \{ \phi_x(1, t) + H \phi(1, t) \} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt u(1, t) K(1, 1) \phi(1, t) \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt \phi(1, t) \left(\int_0^1 K_x(1, y) u(y, t) dy \right) \quad (\text{I.8})
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\int_0^1 K(1, y) u(y, t) dy = 0$, $-T \leq t \leq T$ olduğu için

(I.4)'ün sağ tarafı aşğıdaki ifadeye eşittir;

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dt u(1, t) \{ \phi_x(1, t) + J \phi(1, t) \}. \quad (\text{I.9})$$

Şimdi (I.4), (I.8) ve (I.9) ilişkileri toparlanırsa $\text{supp} \phi \cap ([0, 1] \times (-\infty, \infty)) \subset (0, 1] \times (-T_1, T_1)$ ile her bir $\phi = \phi(x, t) \in C_0^2(R^2)$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \phi(1, t) \left\{ (K(1, 1) + J - H)u(1, t) + \int_0^1 K_x(1, y)u(y, t)dy \right\} = 0 \quad (\text{I.10})$$

sonucuna ulaşılır. Demek ki (5.42) sağlanır. ■

ÖZGEÇMİŞ

İbrahim TEKİN, 1986 yılında Antalya’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Tekirdağ’da tamamladı. 2009 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun oldu. 2010 yılında yine aynı üniversitenin Matematik Bölümü’ne araştırma görevlisi olarak atandı, halen bu görevine devam etmektedir.