

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SMİRNOV VE LAVRENTİEV
BÖLGELERİ

SELDA IŞIN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2003

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SMİRNOV VE LAVRENTİEV
BÖLGELERİ

SELDA IŞIN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof.Dr.Tahir ALİYEV

GEBZE
2003

ÖZET

Tezde fonksiyonlar teorisinin farklı alanlarında kullanılan bölge sınıfları Smirnov özelliği bakımından incelenmiş, Hausdorff ölçüsü yardımı ile yeni bölge sınıfları tanımlanarak, onlar arasında ilişkiler saptanmıştır.

SUMMARY

In this dissertation, some classes of domains from various areas of the theory of functions are considered from the point of view of the Smirnov's property. New classes of domains are defined in terms of the Hausdorff measure and relations between them are established.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından ötürü çok değerli öğretmenim Sayın Prof. Dr. Tahir ALİYEV' e, Sayın Rektör Prof.Dr.Alinur BÜYÜKAKSOY'a, Sayın Prof. Dr. Ali ALKUMRU'ya ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen çok değerli arkadaşlarım Bülent Nafi ÖRNEK, Abidin BAZIN ve Nurhan OKÇU'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. SMİRNOV ÖZELLİĞİ VE BÖLGE SINIFLARI	4
2.1. John Bölgesi	4
2.2. Lineer Bağlantılı Bölgeler	6
2.3. Quasi daire	9
2.4. Ahlfors Regüler Bölgeler	16
2.5. Lavrentiev Bölgeleri	17
3. HAUSDORFF ÖLÇÜSÜ İLE BELİRLENEN BÖLGELER	21
3.1 HD Koşulu	21
3.2 İç Uzaklık ve John Koşulu	24
3.3 φ -İç Lavrentiev Bölgeleri	25
3.4 φ -İç Ahlfors Regüler Bölgeler	27
SONUÇ	29
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	32

1. GİRİŞ

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $D \subset \mathbb{C}$ sıfır merkezli birim daire, T onun sınırı olsun. Reel eksenin bir aralığında tanımlanmış kompleks değerli, sürekli $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu bir eğri tanımlar.

Eğer, $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ ise ona kapalı eğri denir. Kapalı C eğrisini birim çember T üzerinde tanımlanmış sürekli fonksiyon gibi de düşünebiliriz.

$$C: \psi(\xi), \quad \xi \in T, \quad \psi \in C_T$$

Eğer, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ($\psi: T \rightarrow \mathbb{C}$) fonksiyonu bire-bir C 'ye Jordan yayı (Jordan eğrisi) denir.

$G \subset \mathbb{C}$ bölgesi verildiğinde $\mathbb{C} \setminus G$ bağlantılı ise G basit bağlantılıdır diyeceğiz.

Teoremi 1.1 (Riemann Tasvir): $G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölge ve $w_0 \in G$ olsun. Birim daireyi G 'ye konform tasvir eden $f(w_0) = 0$, $f'(w_0) > 0$ koşullarını sağlayan f fonksiyonu vardır ve tektir.

Jordan teoremine göre, C Jordan eğrisinin sınırladığı bölge sınırı c olan basit bağlantılı bölgedir.

Önce bize gerekli kavramları verelim:

$C: \varphi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ kompleks düzlemde bir eğri olsun. $[\alpha, \beta]$ aralığının $(\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta)$ parçalanışı için,

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|$$

olsun. $\Lambda(C) = \sup_\tau \sigma_\tau$ ifadesine C eğrisinin uzunluğu denir. Açık ki

$$\text{diam} C = \sup_{z_1, z_2 \in C} |z_1 - z_2| \leq \Lambda(C).$$

Eğer, φ fonksiyonu parçalı düzgün ise;

$$\Lambda(C) = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)| dt$$

ve benzer olarak kapalı $C : \psi(\xi)$, $\xi \in T$ eğrisi için,

$$\Lambda(C) = \int_T |\psi'(\xi)| |d\xi| .$$

Tasvir fonksiyonunun aşağıda sıralanan ünlü özelliklerini ileride kullnacağız.

Teorem 1.2 (Koebe) : D birim dairenin kompleks düzleme konform tasviri f için

$$\left| (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \right| \leq 4 \quad \forall z \in D$$

eşitsizliği sağlanır.

$$d_f(z) = \text{dist}(f(z), \partial f(D)) \quad \forall z \in D .$$

Sonuç 1.3 : D birim dairenin kompleks düzleme f konform tasviri

$$\frac{1}{4} (1-|z|^2) |f'(z)| \leq d_f(z) \leq (1-|z|^2) |f'(z)| \quad \forall z \in D$$

eşitsizliğini sağlıyor.

Sonuç 1.4 : a, b, c pozitif sabitler $0 < |z_0| = 1 - \delta < 1$,

$$S = \{z : 0 \leq 1 - b\delta \leq |z| \leq 1 - a\delta , \quad |\arg z - \arg z_0| \leq c\delta \}$$

olsun. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konform tasviri için

$$|f(z) - f(z_0)| \leq M_1 \delta |f'(z_0)| \quad \forall z \in S,$$

$$M_2^{-1} |f'(z_0)| \leq |f'(z)| \leq M_2 |f'(z_0)| \quad \forall z \in S$$

eşitsizlikleri sağlanır; burada M_1 ve M_2 sadece a, b, c 'ye bağımlı sabitlerdir.

Teorem 1.5 [15] : $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konform tasviri için hemen hemen her $\zeta \in T$ noktasında

$$f(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1} f(r\zeta) \neq \infty$$

limiti mevcuttur ve

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(0)|^{\frac{2}{5}} dt \leq 5 |f'(0)|^{\frac{2}{5}} \quad \forall 0 \leq r < 1.$$

Birim dairenin $G \subset C$ bölgesine konform tasfiri f ve $\Lambda(\partial G) < \infty$ olsun. Bu taktirde, öyle singüler μ ölçüsü mevcuttur ki,

$$\log f'(z) = ib + \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z} \log |f'(\xi)| d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) \quad , \quad z \in D \quad (1.1)$$

sağlanır, $b = \arg f'(0)$. (1.1)'den görüyoruz ki,

$$\log |f'(z)| = \int_T p(z, \xi) \log |f'(\xi)| d\xi - \int_T p(z, \xi) d\mu(\xi) \quad , \quad z \in D \quad (1.2)$$

sağlanır. Burada,

$$p(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\xi + z}{\xi - z}$$

Poisson çekirdeğidir.

μ ölçüsü sıfır olduğunda, yani

$$\log |f'(z)| = \int_T p(z, \xi) \log |f'(\xi)| d\xi \quad , \quad z \in D \quad (1.3)$$

sağlandığı takdirde f Smirnov koşulunu sağlıyor diyeceğiz. (1.3) sağladığında,

$$\int_T |\log |f'(\rho z)| - \log |f'(z)|| dz \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

sağlar. Eğer, $\Lambda(\partial G) < \infty$ ve (1.3) sağlanırsa G 'ye Smirnov bölgesi denir.

Smirnov bölgeleri kompleks analizin bir çok alanlarında (örneğin yaklaşım teorisi, genelleşmiş Hardy uzayları v.s) ortaya çıkar. Görüldüğü gibi onun tanımı analitiktir. Bundan dolayı basit geometrik kavramlarla tanımlanmış mümkün olduğu kadar geniş Smirnov bölgeleri sınıflarını belirlemek önemle ortaya çıkmaktadır.

Tarihsel olarak sınırları düzgün eğri olan bölgelerden sonra gittikçe daha geniş bölge sınıfları elemanlarının Smirnov bölgesi olduğu ispatlanmıştır.

Tezin esas amacı fonksiyonlar teorisinin farklı alanlarında kullanılan bölge sınıflarının Smirnov özelliği bakımından incelenmesi ve onlar arasındaki ilişkilerin araştırılmasıdır.

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı olup, problemin özeti ve kullanacağımız yardımcı tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde farklı bölge sınıfları ve onlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise bir fonksiyonun belirlediği Hausdorff ölçüsü yardımı ile yeni bölge sınıfları tanımlanmış olup, onlar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Çalışmada [1-20] kaynakları kullanılmıştır.

2. SMİRNOV ÖZELLİĞİ VE BÖLGE SINIFLARI

2.1 JOHN BÖLGESİ

Basit bağlantılı G bölgesinde her doğrusal $[a, b]$ kesimi için, $G \setminus [a, b]$ 'nin bağlantılı bileşenlerinden biri,

$$diam H \leq M_1 |a - b| \quad (2.1)$$

ilişkisini sağlarsa G 'ye John bölgesi denir.

Örneğin, sınırlı parçalı düzgün Jordan eğrisi olan G bölgesinin John bölgesi olması için gerek ve yeter koşul onun sıfır iç açısı olmamasıdır.

Tanımdaki " doğrusal kesim " ifadesi yerine herhangi bir kesim ifadesi yazılırsa bir şey değişmeyeceği gösterilebilir.

$$B(re^{it}) = \{\rho e^{i\varphi} : i \leq \rho \leq 1, |\varphi - t| \leq \pi(1-r), 0 \leq r < 1\} \quad (2.2)$$

$$I(re^{it}) = T \cap \partial B(re^{it}) = \{e^{i\varphi} : i \leq \rho \leq 1, |\varphi - t| \leq \pi(1-r)\} \quad (2.3)$$

$$d_{f(z)} = dist(f(z), \partial G) \quad (2.4)$$

olsun.

Aşağıdaki teorem John bölgeleri için konform tasvir fonksiyonunun özelliklerini ortaya koymaktadır.

Teorem 2.1 : Birim D dairenin G bölgesine konform tasviri,

$$d_f(0) \geq c \, diam G \quad (2.5)$$

lişkisini sağlasın. Bu taktirde aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (i) G bir John bölgesidir;
- (ii) $diam f(B(z)) \leq M_3 d_f(z)$, $\forall z \in D$;
- (iii) $0 < \alpha \leq 1$ koşulunu sağlayan öyle α sayısı vardır ki,

$$|f'(\xi)| \leq M_4 |f'(z)| \left(\frac{1-|\xi|}{1-|z|} \right)^{\alpha-1}, \quad \xi \in D \cap B(z), z \in D;$$

(iv) Öyle $\beta > 0$ sayısı vardır ki her $A \subset I \subset T$ yayı için,

$$\Lambda(A) \leq \beta \Lambda(I) \Rightarrow \text{diam } f(A) \leq \frac{1}{2} \text{diam } f(I).$$

G Jordan bölgesi olduğundan dolayı f fonksiyonu $\overline{D}$ 'de süreklidir.

(2.5) varsayımını ancak (i) $\Rightarrow$ (ii) ilişkisinin ispatında kullanılır. (iv) varsayımı yerine aşağıdaki koşul kabul edilebilir:

(iv') $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle $\beta > 0$ vardır ki her $A \subset I \subset T$ yayı için,

$$\Lambda(A) \leq \beta \Lambda(I) \Rightarrow \text{diam } f(A) \leq \varepsilon \cdot \text{diam } f(I).$$

Sonuç 2.2 : D birim dairenin John bölgesine konform tasviri f fonksiyonu ve $z \in D$ noktası için,

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq M_8 d_f(z) \left(\frac{|\xi_1 - \xi_2|}{1-|z|} \right)^\alpha, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in B(z) \quad (2.6)$$

ilişkisi sağlanır.

İspat : $r = |z|$ ve $\delta = |\xi_1 - \xi_2|$ olsun. $1 - 2\delta < r$ ise Teorem 1.2'nin (ii) şıkkından (2.6) hemen çıkıyor. Varsayalım ki $\rho = 1 - 2\delta \geq r$ ve $\xi_j = \rho_j e^{i\varphi_j}$, $\rho_1 \leq \rho_2$. Eğer, $\rho_1 < \rho = 1 - 2\delta$ ise (iii) eşitsizliğini $[\xi_1, \xi_2]$ aralığında integre edip, Sonuç 1.4'deki

$$|f'(\xi)| \leq k_1 |f'(\xi_1)|, \quad |\xi - \xi_1| < \delta$$

eşitsizliğini göz önüne alırsak (2.6) elde edilir. Şimdi, $\rho \leq \rho_1 \leq \rho_2$ olsun. Sonuç 1.3'den,

$$(1-r) |f'(z)| \leq 4d_f(z)$$

alırız. Bu sonuncu ifadeyi (iii)'de göz önüne alırsak, her $j=1,2$ için,

$$\left| f(\rho j e^{i\varphi_j}) - f(\rho e^{i\varphi_j}) \right| \leq \frac{M_9 d_f(z)}{(1-r)^\alpha} \int_\rho^{\rho_j} (1-x)^{\alpha-1} dx \leq \frac{M_9 d_f(z)}{(1-r)^\alpha} = \frac{M_9}{\alpha} d_f(z) \left(\frac{2\delta}{1-r} \right)^\alpha$$

elde ederiz. Öteki yandan;

$$\left| f(\rho e^{i\varphi_1}) - f(e^{i\varphi_2}) \right| \leq M_9 d_f(z) \frac{(1-\rho)^{\alpha-1}}{(1-r)^\alpha} |\varphi_1 - \varphi_2| \rho \leq M_{10} d_f(z) \left(\frac{\delta}{1-r} \right)^\alpha.$$

Son iki eşitsizlikten (2.6) elde edilir.

2.2 LİNEER BAĞLANTILI BÖLGELER

Basit bağlantılı $G \subset \mathbb{C}$ bölgesini ele alalım. Eğer, her $w_1, w_2 \in G$ noktaları,

$$\text{diam } A \leq M_1 |w_1 - w_2| \quad (2.7)$$

koşulunu sağlayan $A \subset G$ eğrisi ile birleştirilebiliyorsa G 'ye lineer bağlantılı bölge denir. Örneğin, parçalı düzgün Jordan eğrisini sınırladığı bölgenin lineer bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul onun 2π iç açısına sahip olmamasıdır.

Önerme 2.3 : f , D birim dairesinin lineer bağlantılı G bölgesine konform tasviri olsun. Bu taktirde, $f : \overline{D} \rightarrow \overline{G}$ süreklidir ve z_1, z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik segment S olmak üzere,

$$\text{diam } f(S) \leq M_2 |f(z_1) - f(z_2)| \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{D}. \quad (2.8)$$

Teorem 2.4 : f , D birim dairesinin lineer bağlantılı bölgeye konform tasviri olsun. Bu takdirde,

$$|f'(\rho \xi)| \geq \frac{1}{8} |f'(r \xi)| \left(\frac{1-\rho}{1-r} \right)^{\beta-1} \quad \forall \xi \in T, \quad 0 \leq r \leq \rho \leq 1 \quad (2.9)$$

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \geq M_3^{-1} d_f(z) \left(\frac{|\xi_1 - \xi_2|}{1-|z|} \right)^\beta \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in T(z), z \in D. \quad (2.10)$$

(2.10) eşitsizliğinde $z = 0$ alırsak;

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \geq M_4^{-1} |\xi_1 - \xi_2|^\beta \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in T(z) \quad (2.11)$$

elde edilir. Buradan ters fonksiyon için,

$$|f^{-1}(w_1) - f^{-1}(w_2)| \leq M_5 |w_1 - w_2|^{1/\beta} \quad \forall w_1, w_2 \in \partial G \quad (2.12)$$

Hölder koşulunu alırsak.

İspat: Herhangi bir b sayısını ele alalım. D 'de analitik, yalnızca $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ açılımına sahip ve

$$\text{diam } f(S) \leq b |f(z_1) - f(z_2)| \quad \forall z_1, z_2 \in D \quad (2.13)$$

koşulunu sağlayan tüm fonksiyonlar sınıfı M olsun. Burada, S ile z_1 ve z_2 'yi birleştiren hiperbolik (non-euclidean) segment işaretlenmiştir. Açık ki M ailesi D 'deki yerel düzgün yakınsaklığa göre kompaktır.

$$\beta = \max_{f \in M} |a_2| \quad (2.14)$$

olsun. Eğer, $|a_2| = 2$ ise $|a| = 1$ olmak üzere, $f(z) = z(1 - az)^{-2}$ olacak öyle ki $f(D)$ düzlem kesimidir ve (2.13) sağlanmaz. Demek ki $\beta < 2$.

$f \in M$ ise, onun Koebe dönüşümü olan,

$$h(z) = \frac{f\left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{\left(1 - |z_0|^2\right)f'(z_0)} = z + \left(\frac{1}{2}\left(1 - |z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right)z^2 + \dots$$

fonksiyonu da (2.13)'yi sağlayacak. Bu takdirde, (2.14)'den,

$$\left| \frac{1}{2} \left(1 - |z|^2 \right) \frac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z} \right| \leq \beta \quad \forall z \in D, f \in M \quad (2.15)$$

alıyoruz. Sonuç olarak,

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \log[(1-r^2)f'(r\xi)] \right| = \left| \frac{f''(r\xi)}{f'(r\xi)} - \frac{2r\bar{\xi}}{1-r^2} \right| \leq \frac{2\beta}{1-r^2} \quad (2.16)$$

elde edilir. Bu sonuncuyu integre edersek;

$$\frac{(1-\rho^2)f'(\rho\xi)}{(1-r^2)f'(r\xi)} \geq \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \cdot \frac{1+r}{1-r} \right)^\beta \quad \forall 0 \leq r < \rho < 1$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan da (2.9) çıkıyor. Sonuç 1.3'den görürüz ki,

$$d_f(\rho(\xi)) \geq \frac{1}{16} d_f(r\xi) \left(\frac{1-\rho}{1-r} \right)^\beta \quad \forall 0 \leq r \leq \rho < 1, \quad \xi \in T \quad (2.17)$$

sağlanır.

Şimdi, $f(D)$ 'nin lineer bağlantılı olduğunu varsayalım. (2.9) ve (2.10)'ü göstermek için $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ varsayabiliriz. (2.8)'den görüyoruz ki $b = M_2$ olmak üzere $f \in M$ ve yukarıdakilerden (2.9)'ün sağlandığı anlaşıyor. ξ_1 ve ξ_2 yi birleştiren hiperbolik segment üzerinde olup, 0'ın civarındaki $\rho\xi$ noktasını alalım. Önce varsayalım ki $|z| = r < \rho < 1$. Bu takdirde (2.8)'den,

$$M_2 |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \geq \text{diam} f(S) \geq d_f(\rho\xi)$$

$$\text{ve } 1-\rho \geq \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{2}, \quad d_f(r\xi) \geq M_4^{-1} d_f(z) \quad \text{olduğundan dolayı (2.17)'den (2.10)}$$

elde edilir (Sonuç 1.4 bak). $\rho < r$ hali Sonuç 1.4 ve (2.8)'den hemen çıkıyor.

2.3 QUASI DAİRE

J Jordan eğrisi olsun. $a, b \in J$ noktaları J 'yi iki parçaya ayırır. Bunlardan çapı küçük olanı $J(a, b)$ ile işaretliyelim. Eğer, her $a, b \in J$ için,

$$\text{diam } J(a, b) \leq M_1 |a - b| \quad (2.18)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise J 'ye quasiçember denir. J quasiçemberin iç bölgesi G 'ye quasidaire denir.

Parçalı düzgün Jordan eğrisinin quasiçember olması için gerek ve yeter koşul onun 0 ve 2π açılara sahip olmamasıdır.

Örnek : $G = \left\{ u + iv : 0 < u < 1, u^\alpha \sin \frac{\pi}{4} < v < 1 \right\} (\alpha > 0)$ olsun.

$\alpha > 2$ ise $J = \partial G$ parçalı düzgündür, 0 ve 2π açılara sahip değildir. Demek ki quasiçemberdir.

$\alpha = 2$ olduğu takdirde de J quasiçember olacak.

Ancak $0 < \alpha < 2$ ise $a_n = \frac{1}{2n} \in J$ ve $b_n = \frac{1}{2n+1} \in J$ alırsak;

$$\frac{\text{diam } J(a_n, b_n)}{|a_n - b_n|} > \frac{2n(2n+1)}{(2n+1)^\alpha} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

olduğunu görürüz. Demek ki J quasidaire değildir.

Teorem 2.5 : D birim dairenin G bölgesine konform tasfiri f olsun. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir.

(i) G quasidairedir;

(ii) G lineer bağlantılı John bölgesidir;

(iii) $f, \bar{D}$ de süreklidir ve eğer $I(z) \left(\frac{1}{2} \leq |z| < 1 \right)$ 'in uç noktaları

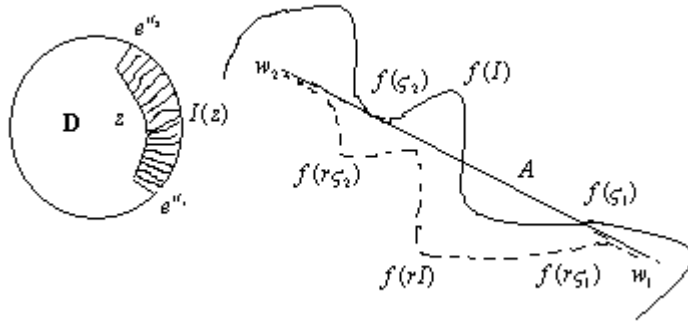
$e^{it_1}, e^{it_2} (t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \pi)$ ise;

$$\text{diam } f(I(z)) \leq M_2 d_f(z) \leq M_3 \left| f(e^{it_1}) - f(e^{it_2}) \right|.$$

(G quasidaire ise $J = \partial G$ Jordan eğrisidir ve bundan dolayı f 'nin, $\overline{D}$ 'de sürekli ve bire-bir olduğunu biliyoruz).

İspat :

(i) $\Rightarrow$ (ii). Varsayalım ki (i) sağlanır. Eğer, $[a, b]$, G 'nin bir kesimi ise $J(a, b) \cup [a, b]$ eğrisi, $G \setminus [a, b]$ 'nin çapı $M_1|a - b|$ 'den büyük olmayan bileşenini sınırlıyor. Demek ki G John bölgesidir.



Şekil 2.1

G 'nin lineer bağlantılı olduğunu, yani (2.7)'i sağladığını göstermek için $w_1, w_2 \in G$ alalım. Eğer, $[w_1, w_2] \subset G$ ise $A = [w_1, w_2]$ alırsak. $[w_1, w_2] \not\subset G$ olsun. $[w_1, w_2]$ üzerinde olup, w_j 'ye en yakın olan nokta $f(\xi_j)$, $\xi_j \in T$ olsun. (2.15)'a göre T 'nin ξ_1 ve ξ_2 yi birleştiren yaylarından biri $\text{diam } f(I) \leq M_1|f(\xi_1) - f(\xi_2)|$ eşitsizliğini sağlıyor. Eğer, r sayısı 1'e yakın ise $f(rI)$ yayı D içersinde olup, çapı

$$2M_1|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < 2M_1|w_1 - w_2|$$

dir ve w_j noktası ile G 'ye dahil, uzunluğu $|w_1 - w_2|$ 'den küçük eğri ile birleştirilebilir. Bu eğrilerin birleşimi w_1, w_2 'yi birleştiren ve

$$\text{diam } A \leq (2M_1 + 2)|w_1 - w_2|$$

koşulunu sağlayan $A \subset G$ yayını oluşturur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). G , John bölgesi olduğundan dolayı Teorem 2.1'dan,

$$\text{diam}\{f(e^{it}): t_1 \leq t \leq t_2\} \leq \text{diam } f(B(z)) \leq M_2d_f(z) \quad (2.19)$$

elde edilir. G lineer bağlantılı olduğundan Teorem 2.4'dan $\xi_j = e^{it_j}$ olmak üzere;

$$d_f(z) \leq M_4 \left| f(e^{it_1}) - f(e^{it_2}) \right| \quad (2.20)$$

elde edilir. (2.19) ve (2.20)'den (iii) çıkıyor.

(iii) $\Rightarrow$ (i). $f(e^{it_1}) = a$ ve $f(e^{it_2}) = b$ seçersek (i)'nin sağlandığını görürüz.

$h : T \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağladığında ona quasisymmetric denir. Kesin monoton artan ve sürekli öyle $\lambda : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\lambda(0) = 0$ fonksiyonu mevcuttur ki,

$$\left| \frac{h(z_1) - h(z_2)}{h(z_2) - h(z_3)} \right| \leq \lambda \left(\left| \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \right| \right) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in T \quad (2.21)$$

z_1 ve z_3 yerini değiştirse,

$$\frac{1}{\lambda \left(\left| \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} \right| \right)} \leq \left| \frac{h(z_1) - h(z_2)}{h(z_2) - h(z_3)} \right| \quad (2.22)$$

elde edilir.

Önerme 2.6 : $h : T \rightarrow \mathbb{C}$ quasisymmetric tasvir ise, $J = h(T)$ quasiçemberdir.

İspat : $w_j = h(z_j)$, $z_j \in T$, $(j = 1, \dots, 4)$ olsun. w_1 ve w_2 verildiğinde z_2 'nin T üzerinde z_1 ve z_2 noktaları arasındaki küçük yaya dahil olduğunu varsayalım. Diğer yayda $|z_4 - z_3| = |z_3 - z_1|$ koşulunu sağlayan z_4 noktasını alalım. Bu takdirde, $|z_2 - z_3| \leq |z_3 - z_4|$ ve (2.22)'ya göre,

$$\left| \frac{w_2 - w_3}{w_3 - w_1} \right| = \left| \frac{w_4 - w_3}{w_3 - w_1} \right| \left| \frac{w_2 - w_3}{w_3 - w_4} \right| \leq \lambda(1)^2. \quad (2.23)$$

Bu önerme'nin tersi de doğrudur.

Teorem 2.7 : f , birim dairenin quasi daireye konform tasviri ise onun T 'de daralması quasisymmetrictrictir.

(2.18)'yi,

$$\lambda(x) \leq \begin{cases} M_5 x^\alpha & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ M_6 x^\beta & , \quad 1 < x < \infty \end{cases} \quad (2.24)$$

olmak üzere ispatlayacağız. Burada $\alpha > 0$ ve $\beta < 2$ Teorem 2.1'nin (iii) şıkkı ve Teorem 2.4'daki sabitlerdir.

İspat : $w_j = f(z_j)$ $z_j \in T$ $j=1,2,3$ olsun. Öyle $z_0 \in D$ seçelim ki T üzerindeki $I(z_0)$ yayının uç noktaları z_1, z_3 ve $z_2 \in I(z_0)$ olsun.

Önce $|z_1 - z_2| \leq |z_2 - z_3|$ olduğunu varsayalım.

$2\pi(1 - |z_0|) \geq |z_2 - z_3|$ olduğundan dolayı sonuç 2.2 den

$$|w_1 - w_2| \leq M_7 d_f(z_0) \left(\frac{|z_1 - z_2|}{1 - |z_0|} \right)^\alpha \leq M_8 d_f(z_0) \left| \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \right|^\alpha \quad (2.25)$$

elde edilir. (2.10)'e göre $|w_2 - w_3| \geq M_9^{-1} d_f(z_0)$ ve

$$\left| \frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3} \right| \leq M_8 M_9 \left| \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \right|^\alpha \quad \text{eğer} \quad \left| \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \right| \leq 1.$$

Şimdi $|z_1 - z_2| > |z_2 - z_3|$ olsun. Bu taktirde

$$|z_1 - z_2| \geq 1 - |z_0| \quad \text{ve}$$

(2.25)'un birinci kısmına göre

$$|w_1 - w_2| \leq M_{11} d_f(z_0)$$

ve (2.10)'e göre

$$|w_2 - w_3| \geq M_{10}^{-1} d_f(z_0) \left(\frac{|z_2 - z_3|}{1 - |z_0|} \right)^\beta \geq M_{10}^{-1} d_f(z_0) \left| \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_2} \right|^\beta.$$

Dolayısıyla

$$\left| \frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3} \right| \leq M_{10} M_{11} \left| \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \right|^\beta \quad \text{eğer} \quad \left| \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \right| \geq 1.$$

Şimdi Bloch fonksiyonun tanımını verelim.

$g : D \rightarrow C$ analitik fonksiyonu

$$\|g\|_B = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |g'(z)| < \infty \quad (2.26)$$

koşulunu sağlarsa, ona Bloch fonksiyonu denir. Bloch fonksiyonlar sınıfını B ile göstereceğiz. Bloch fonksiyonu,

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq \|g\|_B \lambda(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in D \quad (2.27)$$

eşitsizliğini sağlıyor. Burada $\lambda(z_1, z_2)$ hiperbolik uzaklıktır. Her sınırlı analitik fonksiyon B sınıfına dahildir.

$$g(z) = \log \left[\frac{(1+z)}{(1-z)} \right] \quad (2.28)$$

fonksiyonu sınırlı olmayan Bloch fonksiyonudur. Onun normu $\|g\|_B = 2$ ve bu fonksiyon (2.27) kesin olduğunu gösterir.

Önerme 2.8 : $f : D \rightarrow C$ konform tasvir ise

$$\|\log(f-a)\|_B \leq 4 \quad \forall a \notin f(D) \quad (2.29)$$

$$\|\log f'\|_B \leq 6 \quad (2.30)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Aksine eğer $\|g\|_B \leq 1$ ise $g = \log f'$, öyle f konform tasviri vardır ki $g = \log f'$.

$g \in B$ için

$$h(z) = \int_0^z \frac{g(\zeta) - g(0)}{g(\zeta)} d\zeta \quad z \in D \quad (2.31)$$

olsun.

Önerme 2.9 : $g \in B$ ise h fonksiyonu $\overline{D}$ süreklidir ve $|z| \leq 1$ için

$$\left| \frac{h(e^{it}z) - h(z)}{it} - g\left(\left(1 - \frac{|t|}{\pi}\right)z\right) + g(0) \right| \leq k_1 \|g\|_B \quad (2.32)$$

sağlanır.

Teorem 2.10 : f fonksiyonu D 'nin Smirnov bölgesine konform tasviri ise

$$\frac{1}{\Lambda(I(z))} \left| \int_{I(z)} \log |f'(\zeta)| |d\zeta| - \log |f'(z)| \right| \leq k_1 \quad \forall z \in D \quad (2.33)$$

eşitsizliği sağlanır, $\Lambda(I(z))$, $I(z)$ yayının uzunluğudur.

İspat : Varsayalım $f'(0) = 1$. $g = \log f'$ Bloch fonksiyonunu ele alalım $|z| = r < 1$ olsun. (2.31) ile tanımlanan önerme 2.8 ve önerme 2.9'e göre, $0 < \rho < 1$ ve $t = \pi(1 - r)$ olduğunda

$$\left| \frac{1}{2it} \left(h\left(\frac{\rho}{r} ze^{it}\right) - h\left(\frac{\rho}{r} ze^{-it}\right) \right) - g(\rho z) \right| \leq k_2 \|g\|_B \leq 6k_2 \quad (2.34)$$

yazılabilir.

Bu sonuncunun, h 'ın tanımını da göz önüne alıp, reel kısmını alırsak

$$\frac{1}{2t} \left| \int_{I(z)} \log |f'(\rho\zeta)| |d\zeta| - \log |f'(\rho z)| \right| \leq 6k_2 \quad (2.35)$$

elde ederiz.

Smirnov bölgeleri için

$$\int_{\Gamma} |\log |f'(\rho z)| - \log |f'(z)|| |dz| \rightarrow 0 \quad \rho \rightarrow 1- \quad (2.36)$$

ilişkisinin sağlandığı yukarıda göz önüne alıp $\rho \rightarrow 1-$ koşulunda limite geçerse (2.34)'yi elde ederiz.

Smirnov bölgeleri için geometrik dilde yazılan bir karakterizasyon mevcut değildir.

Yeterli bir koşul verelim.

Teorem 2.11 : f , D 'nin G bölgesine konform tasviri, $\Lambda(\partial G) < \infty$ olsun. Eğer $q > 0$ ve

$$\frac{1}{\Lambda(I(z))} \int_{I(z)} |f'(\zeta)|^q |d\zeta| \leq M_1 |f'(z)|^q \quad \forall z \in D \quad (2.37)$$

ise G Smirnov bölgesidir. Eğer $0 < q < 1$ ise ek olarak

$$\int_T p(z, \zeta) |f'(\zeta)|^q |d\zeta| \leq M_2 |f'(z)|^q \quad \forall z \in D \quad (2.38)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer G lineer bağlantılı ve $0 < q \leq 1$ ise (2.37)'den (2.38) çıkar.

Not: $f(z) = (1 - z)^2$ fonksiyonu ve her $q > 0$ için (2.37) sağlanır ancak (2.38) $q = 1$ için sağlanmaz. Demek ki teoremindeki lineer bağlantılılık koşulu kaldırılamaz.

İspat: Önce (2.38) ispatına bakalım. $z = r > 0$ varsayalım. Eğer G lineer bağlantılı ise $q \leq 1$, aksi takdirde $q < 1$ olsun.

$$I_{-1} = \emptyset \text{ ve}$$

$$m = \left\lceil \log \frac{1}{1-r} \right\rceil \quad r_n = 1 - (1-r)e^n \quad I_n = I(r_n) \quad (n = 0, 1, \dots, m).$$

$$\text{Açıktır ki } r_0 = r \quad 0 \leq r_m < 1 - e^{-1} \quad r_{m+1} = 0 \quad \text{ve } I_{m+1} = I_0 = I.$$

(2.37) den

$$\int_T p(z, \varsigma) |f'(\varsigma)|^q |d\varsigma| = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{m+1} \int_{I_n - I_{n-1}} \frac{1-r}{|\varsigma - r|^2} |f'(\varsigma)|^q |d\varsigma| \leq k_3 \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1-r}{1-r_n} M_1 |f'(r_n)|^q$$

elde ederiz.

$0 \leq r_n \leq r$ olduğundan dolayı (2.9) den

$$|f'(r_n)| \leq 8 |f'(r)| \left[\frac{(1-r_n)}{(1-r)} \right]^{\beta-1}$$

burada G lineer bağlantılı ise $\beta < 2$, aksi takdirde $\beta = 2$,

$$1 - r_n \geq e^{n-1} (1-r) \text{ ve } (\beta-1) < 1 \text{ olduğundan dolayı}$$

$$\int_T p(z, \varsigma) |f'(\varsigma)|^q |d\varsigma| \leq k_4 M_1 |f'(r)|^q \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1-(\beta-1)q)n}$$

ve son toplam yakınsaktır.

Şimdi $q > 0$ olsun. Holder eşitsizliğine göre eğer (2.37), $q > \frac{1}{2}$ için

sağlanıyor ise $q = \frac{1}{2}$ için de sağlanır. Demek ki (2.38) bir $q > 0$ için sağlanır.

Geometrik ve aritmetik ortalama aralarındaki

$$\exp \left(\frac{1}{\Lambda(A)} \int_A \log \varphi(t) dt \right) \leq \frac{1}{\Lambda(A)} \int_A \varphi(t) dt$$

eşitsizliğini göz önüne alırsak

$$\int_T p(z, \varsigma) \log |f'(\varsigma)| |d\varsigma| \leq \frac{1}{q} \log \left(\int_T p(z, \varsigma) |f'(\varsigma)|^q |d\varsigma| \right) \leq \frac{1}{q} \log M_2 + \log |f'(z)|$$

elde ederiz.

(1.2)'den görürüzki

$$\int_T p(z, \varsigma) d\mu(\varsigma) \leq \frac{1}{q} \log M_2 \quad \forall z \in D.$$

μ singüler ölçü olduğundan dolayı buradan μ 'nün sıfır olduğu elde edilir. Demek ki f Smirnov koşulunu sağlar.

2.4 AHLFORS REGULER BÖLGELER

C Jordan eğrisi

$$\Lambda(C \cap D(w, r)) \leq M_1 r \quad \forall w \in C, \quad 0 < r < \infty \quad (2.39)$$

koşulunu sağlarsa, ona Ahlfors regular eğri denir.

Eğer E sınırlı ise (2.39)'den $\Lambda(E) < \infty$ çıkıyor. Ama bunun tersi doğru değildir.

Örneğin

$$E = \left\{ x + ix^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) : 0 < x \leq 1 \right\}$$

için $\Lambda(E \cap D(0, r)) > \frac{\sqrt{r}}{M_3}$ dir.

Ahlfors-regüler eğrisinin içine Ahlfors bölgesi denir. Ahlfors bölgeleri geometrik koşullarla tanımlanan en geniş Smirnov bölgeleri sınıfıdır.

Teorem 2.12 : f, D birim dairenin G Ahlfors-regüler bölgesine konform tasviri olsun bu takdirde $q < \frac{1}{3}$ için (2.37) sağlanır, yani G Smirnov bölgesidir.

İspat : (2.37) eşitsizliğini $q = \frac{1}{4}$ için ispatlayacağız. Hölder eşitsizliğine göre

$z \in D \quad I = I(z)$ için

$$\int_I |f'(\zeta)|^{\frac{1}{4}} |d\zeta| \leq \int_I \left(\frac{|f'(\zeta)| |d\zeta|}{|f(\zeta) - f(z)|^{\frac{6}{5}}} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_I |f(\zeta) - f(z)|^{\frac{2}{5}} |d\zeta| \right)^{\frac{3}{4}}. \quad (2.40)$$

$\delta = d_f(z) = \text{dist}(f(z), \partial G)$ olmak üzere ikinci integrali

$$\{\zeta \in I : e^n \delta \leq |f(\zeta) - f(z)| < e^{n+1} \delta\} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.41)$$

parçaları üzerine de yazalım.

(2.39) koşulundan

$$\int_I \frac{|f'(\zeta)| |d\zeta|}{|f(\zeta) - f(z)|^{\frac{6}{5}}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_1 e^{n+1} \delta}{(e^n \delta)^{\frac{6}{5}}} = \frac{M_9}{\delta^{\frac{1}{4}}} \quad (2.42)$$

elde edilir.

$$\varphi(s) = \frac{s+z}{1+\bar{z}s}, \quad s \in D$$

olsun. Bu taktirde $\varphi(s) \in I$ için

$$|\varphi'(s)| = \frac{|1 - \bar{z}\varphi(s)|^2}{(1 - |z|^2)} \leq k_5(1 - |z|^2)$$

ve bundan dolayı Teoerem 1.5' den

$$\begin{aligned} \int_I |f(\varsigma) - f(z)|^{\frac{2}{5}} |d\varsigma| &\leq k_5(1 - |z|^2) \int_{\varphi^{-1}(I)} |f(\varphi(s)) - f(\varphi(0))|^{\frac{2}{5}} |ds| \\ &\leq k_6(1 - |z|^2)^{\frac{7}{5}} |f'(z)|^{\frac{2}{5}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

elde edilir.

Sonuç 1.3 göre $\delta \geq \frac{(1 - |z|^2) |f'(z)|}{4}$, ve bundan dolayı (2.40) ve (2.42) dan

$$\int_I |f'(\varsigma)|^{\frac{1}{4}} |d\varsigma| \leq M_5 \delta^{\frac{-1}{20}} (1 - |z|^2)^{\frac{21}{20}} (1 - |z|^2)^{\frac{21}{20}} |f'(z)|^{\frac{6}{20}} \leq M_1 \Lambda(I) |f'(z)|^{\frac{1}{4}}$$

alırız.

2.5 LAVRENTIEV BÖLGELERİ

Sonlu uzunluklu J Jordan eğrisi

$$\Lambda(J(a,b)) \leq M_1 |a - b| \quad \forall a, b \in J \quad (2.44)$$

koşulunu sağladığında ona Lavrentiev eğrisi denir. Burada $J(a,b)$, a ve b arasındaki kısa yayı gösterir.

Lavrentiev eğrisinin sınırladığı bölgeye Lavrentiev bölgesi denir.

Teorem 2.13 : G nin Lavrentiev bölgesi olması için gerek ve yeterli koşul onun Ahlfors-regüler quasidaire olmasıdır.

İspat : G Ahlfors-regüler quasidaire ise (2.44), (2.18) ve (2.39) koşullarından hemen çıkıyor.

Tersine G Lavrentiev bölgesi olsun. Onun quasidaire olduğu açıktır. J nin Ahlfors-regüler olduğunu gösterelim.

$w \in C$ olsun. Önce varsayalım ki $r < r_0 = \frac{\text{diam} J}{(2M+3)}$. Bu taktirde öyle $c \in J$ vardır ki $|c - w| > (M_1 + 1)r$. Eğer $J \cap D(w, r) = \emptyset$ sorun yoktur. Aksi taktirde öyle $a, b \in J \cap D(w, r)$ vardır ki, onları birleştiren ve c 'yi içeren $J' \subset J$ yayı tamamen $D(w, r)$ dairesinin dışındadır.

$$\Lambda(J') \geq 2(|c - w| - r) > 2M_1 r \geq M_1 |a - b|$$

olduğundan dolayı a ve b yi birleştiren öteki $J'' \subset J$ yayı için

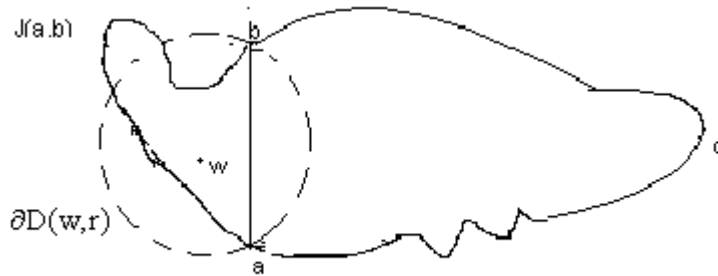
$$\Lambda(J \cap D(w, r)) \leq \Lambda(J'') \leq M_1 |a - b| \leq 2M_1 r$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi eğer $r > r_0$ ise

$$\Lambda(J \cap D(w, r)) \leq \Lambda(J) < \left\lceil \frac{\Lambda(J)}{r_0} \right\rceil r.$$

Şimdi Lavrentiev bölgeleri için analitik karakterizasyon yazalım.



Şekil 2.2

Teorem 2.14 : D birim dairesinin, sınırı sonlu uzunluklu Jordan eğrisi olan G bölgesine konform tasviri f olsun. Bu taktirde G nin Lavrentiev bölgesi olması için gerek yeter koşul onun lineer bağlantılı olup,

$$\frac{1}{\Lambda(I(z))} \int_{I(z)} |f'(\zeta)| |d\zeta| \leq M_2 |f'(z)| \quad z \in D \quad (2.45)$$

koşulunu sağlanmasıdır.

İspat : G Lavrentiev bölgesi olsun. Teorem 2.5 (ii) göre G lineer bağlantılıdır. Teorem 2.1 (ii) ye göre $I = I(z)$ ise

$$\text{diam } f(I) \leq M_3 d_f(z) \leq M_3 (1 - |z|^2) |f'(z)| \quad (2.46)$$

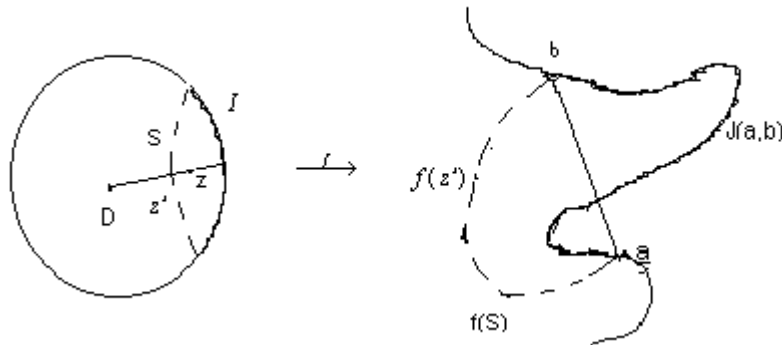
sağlanır. Yani $f(I)$ uygun yarıçaplı dairenin içindedir. Ahlfors regülerliğin tanımını göz önüne alırsak

$$\int_I |f'(\zeta)| |d\zeta| \leq |f(I)| \leq M_4 (1 - |z|^2) |f'(z)| < M_4 \Lambda(I) |f'(z)|. \quad (2.47)$$

Tersine, G nin lineer bağlantılı olup, (1.49) koşulunu sağladığını varsayalım. Verilmiş $a, b \in J$ noktaları için öyle $z \in D$ seçelim ki $J(a, b) = f(I)$, ($I = I(z)$) olsun. Bu taktirde Sonuç 1.4 göre

$$\Lambda(J(a, b)) = \int_I |f'(\zeta)| |d\zeta| \leq 2\pi (1 - |z|) M_2 |f'(z)| \leq k_1 M_2 d_f(z) \leq k_2 M_2 d_f(z^*).$$

Şimdi eğer S, I nin uç noktalarını birleştiren hiperbolik segment ise $d_f(z^*) \leq \text{diam } f(s)$, ve burada Önerme 2.3 gözönüne alınırsa (2.44)'i elde ederiz.



Şekil 2.3

$h : A \rightarrow \mathbf{C}$ tasviri

$$M_5^{-1} |z_1 - z_2| \leq |h(z_1) - h(z_2)| \leq M_5 |z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in A \quad (2.48)$$

koşulunu sağladığında ona Bilipschitz tasvir denir.

Teorem 2.15 : J 'nin Lavrentiev eğrisi olması için gerek ve yeter koşul düzlemin kendi kendine $J = h(T)$ koşulunu sağlayan $h : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ tasvirinin olmasıdır.

İspat : h düzlemin kendi kendine $J = h(T)$ koşulunu sağlayan tasviri ve $h(\zeta_1), h(\zeta_2) \in J$ olsun. T 'nin ζ_1, ζ_2 noktaları arasındaki kısa yayı

$$z_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (z_0 = \varsigma_1 \quad z_n = \varsigma_2)$$

noktaları ile küçük yaylara bölelim. (2.48)'den

$$\sum_{k=1}^n |h(z_k) - h(z_{k-1})| \leq M_5 \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq \pi M_5 |\varsigma_1 - \varsigma_2|$$

eşitsizliğini ve buradan da

$$\Lambda(J(h(\varsigma_1), h(\varsigma_2))) \leq \pi M_5^2 |h(\varsigma_1) - h(\varsigma_2)|$$

elde edilir. Yani J Lavrentiev eğrisidir.

Tersine varsayalım ki, J Lavrentiev eğrisidir ve $\Lambda(J) = 2\pi$. J 'nin doğal $h(e^{is})$, $0 \leq s \leq 2\pi$ denklemi için

$$|h(e^{is_1}) - h(e^{is_2})| \leq |s_1 - s_2| \leq \pi |e^{is_1} - e^{is_2}|, \quad |s_1 - s_2| \leq \pi$$

sağlanıyor ve (2.44) göre

$$|e^{is_1} - e^{is_2}| \leq |s_1 - s_2| \leq M_1 |h(e^{is_1}) - h(e^{is_2})|.$$

Demek ki $h : T \rightarrow C$ bilipschitz koşulunu sağlıyor. Öteki yandan Tukai'nin [17]'deki sonucuna göre h düzlemin kendi kendine bilipschitz tasvirine kadar devam ettirilir.

3. HAUSDORFF ÖLÇÜSÜ İLE BELİRLENEN BÖLGELER

3.1 HD KOŞULU

Bu bölümde önceki bölümde verilmiş olan quasidaire, Ahlfors-regüler, Lavrentiev bölgeleri kavramlarının genelleştirilmeleri ve onların arasındaki ilişkiler ele alınacaktır. Önce Hausdorff ölçü kavramına bakalım.

$\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli monoton artan ve $\varphi(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. $E \subset C$ cümlesinin Λ_φ Hausdorff ölçüsü,

$$\Lambda_\varphi(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf_{(B_k)} \sum_k \varphi(\text{diam} B_k) \leq +\infty$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\inf$, E 'nin bütün ε -örtüleri üzerinden, yani

$$E \subset \bigcup_k B_k \quad , \quad \text{diam} B_k \leq \varepsilon \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

koşulunu sağlayan bütün $\{B_k\}$ dizileri üzerinden alınmıştır. $\Lambda_\varphi(\cdot)$ 'nin iki temel özelliğini ifade edelim:

Önerme 3.1 : Λ_φ metrik dış ölçüdür ve Λ_φ -ölçülebilir cümleler sistemi bütün Borel cümlelerini içeren σ -cebiri oluşturur. Özel halde ikişer arakesitleri boş olan $E_n (n = 1, 2, \dots)$ Borel cümleleri dizisi için,

$$\Lambda_\varphi\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \Lambda_\varphi(E_n)$$

sağlanır. Eğer, $\varphi(t) = t^\alpha$ ise $\Lambda_\varphi = \Lambda_{t^\alpha}$ 'ya α -boyutlu Hausdorff ölçüsü denir. $\alpha = 1$ hali, yani 1-boyutlu Hausdorff ölçüsü lineer ölçüdür.

Bu bölümde φ fonksiyonunun yukarıdakilere ek olarak, α reel sayı olmak üzere

$$\varphi(xt) \leq M_1 t^\alpha \varphi(x) \quad \forall x > 0, t > 1 \quad (3.1)$$

koşulunu sağladığını varsayacağız.

Önerme 3.2 : Eğer $\varphi \leq \psi$ ise, $\Lambda_\varphi(E) \leq \Lambda_\psi(E)$ ve $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ ise σ -sonlu Λ_ψ ölçüsüne sahip her E cümlesi için $\Lambda_\varphi(E) = 0$ 'dir.

Ghamsari, Herron [2] çalışmasında kesir mertebeli Lavrentiev ve Ahlfors-regüler eğrileri tanımlamış olup, onların ilişkilerini araştırılmıştır.

Vaisala [19] çalışmasında quasikonform tasvirler teorisinde kullanmak üzere Lavrentiev ve Ahlfors-regüler bölgelerin "iç" benzerlerini incelenmiştir. Aşağıda bu iki yaklaşımın nasıl birleştirileceğini göstereceğiz.

C Jordan eğrisi üzerindeki x ve y noktaları için $C(x, y)$ ve $C^\varphi(x, y)$ ile, sırasıyla C 'nin x ve y arasındaki minimal çaplı ve minimal H^φ ölçülü yayları işaretliyeceğiz.

Önce aşağıdaki koşulu sağlayan eğrileri ele alalım. C Jordan eğrisinin her A yayı için,

$$a^{-1}\varphi(\text{diam}A) \leq H^\varphi(A) \leq a\varphi(\text{diam}A) \quad (HD)$$

koşulunu sağlasın.

Önerme 3.3 : C kompakt Jordan eğrisi için aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (a) Her $A \subset C$ yayı için (HD) sağlanır
- (b) $\forall x, y \in C$ noktaları için $A = C^\varphi(x, y)$ yayı (HD) 'yi sağlar
- (c) $\forall x, y \in C$ noktaları için $A = C(x, y)$ yayı (HD) 'yi sağlar
- (d) Her $\varphi : S' \rightarrow C$ homomorfizmi için $I \subset S'$ $\ell(I) \leq \pi$ olmak üzere keyfi $A = \varphi(I)$ yayı (HD) 'yi sağlar

NOT: Şıklardaki a sabitleri farklı olabilirler.

İspat: Açıktır ki herhangi bir şık sağladığında C eğrisi σ -sonlu H^φ -ölçüsüne sahiptir ve C sınırlı ise $A = C$ için (HD) koşulu $2a$ sabiti ile sağlanır. (a) sağlandıkça, (b), (c), (d)'nin de sağlanacağı açıktır. Şimdi tersini gösterelim.

$(c \Rightarrow a)$. C 'nin x ve y noktalarını birleştiren büyük parçası A olsun. $diam A(x, z) = diam A(y, z)$ olacak biçimde $z \in A$ noktası seçelim. Bu takdirde, $C(x, z) = A(x, z)$ ve $C(y, z) = A(y, z)$. Bundan dolayı,

$$H^\varphi(A) = H^\varphi(A(x, z)) + H^\varphi(A(y, z)) \leq 2a\varphi(diam A)$$

ve

$$H^\varphi(A) = H^\varphi(A(x, z)) + H^\varphi(A(y, z)) \geq 2a^{-1}\varphi\left(\frac{1}{2}diam A\right) \geq 2a^{-1}\frac{1}{M_1 2^\alpha}\varphi(diam A)$$

Burada son eşitsizlik (3.1)'in sonucu olan

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{1}{M_1 2^\alpha}\varphi(x) \quad (3.2)$$

eşitsizliği kullanılarak elde edilir.

Böylece (HD) koşulu $a \max\{M_1 2^{\alpha-1}, 2\}$ sabiti ile sağlanır.

$(b) \Rightarrow (a)$. C 'nin x ve y noktalarını birleştiren uzun parçası A olsun.

$$H^\varphi(A(x, z)) = H^\varphi(A(y, z))$$

olacak biçimde $z \in A$ noktası seçelim. Bu takdirde,

$$C^\varphi(x, z) = A(x, z) \quad \text{ve} \quad C^\varphi(y, z) = A(y, z)$$

Bundan dolayı,

$$H^\alpha(A) = H^\alpha(A(x, z)) + H^\alpha(A(y, z)) \leq 2a\varphi(diam A)$$

öteki yandan,

$$H^\varphi(A) \geq \frac{1}{2}H^\varphi(C) \geq \frac{1}{2a}\varphi(diam C) \geq \frac{1}{2a}\varphi(diam A)$$

dolayısıyla (HD) koşulu $2a$ sabiti ile sağlanır.

$(d) \Rightarrow (a)$. Küçük I yayının çembere kadar tümleyeni J ve $A = \varphi(J)$ olan J 'nin iki eşit J_1 ve J_2 parçalarını bölelim. $J = J_1 \cup J_2$. $A_k = \varphi(J_k)$ olsun. Bu takdirde,

$$H^\varphi(A) = H^\varphi(A_1) + H^\varphi(A_2) \leq 2a\varphi(diam A)$$

ve (3.2) kullanılırsa

$$H^\varphi(A) \geq \max_{k=1,2} H^\varphi(A_k) \geq \max_{k=1,2} a^{-1}\varphi(diam A_k) \geq \frac{1}{2a}\varphi\left(\frac{diam A}{2}\right) \geq \frac{1}{a} \frac{1}{M_1 2^\alpha}\varphi(diam A).$$

Eşitsizliğin son kısmı

$$diam A \leq 2 \max_{k=1,2} diam A$$

ilişkisi kullanılarak elde edilir.

Dolayısıyla (HD) , $a \max[M_1 2^\alpha, 2]$ sabiti ile sağlanır.

3.2 İÇ UZAKLIK VE JOHN KOŞULU

G bölgesi ve $x, y \in G$ noktaları için,

$$\lambda(x, y) = \lambda_G(x, y) = \inf \{ \ell(\gamma) : \gamma \subset G, \gamma, x \text{ ve } y \text{ 'yi birleştiren eğridir.} \}$$

λ_G , G 'de uzaklık fonksiyonudur. Ancak euclidean metriğine göre sürekli değildir.

Diğer yandan,

$$\delta(x, y) = \delta_G(x, y) = \inf \{ \text{diam}(\gamma) : \gamma \subset G, \gamma, x \text{ ve } y \text{ 'yi birleştiren eğridir.} \}$$

formülü ile tanımlanmış λ_G büyüklüğü $\overline{G}$ 'da uzaklık fonksiyonu olup, Euclidean metriğine göre süreklidir ve her $A \subset \partial G$ yayı için $\text{diam}_\delta A = \text{diam} A$.

Aşağıdaki koşulu sağlayan D bölgesine John bölgesi denir. Öyle $b \geq 1$ sabiti vardır ki $\forall x, y \in D$ noktaları sonlu uzunluklu olup,

$$\min \{ \ell(\gamma(x, z)), \ell(\gamma(y, z)) \} \leq b \text{dist}(z, \partial G) \quad , \quad \forall z \in \gamma \quad (J)$$

koşulunu sağlayan $\gamma \subset D$ yayı ile birleştirilebilir.

Ghamsari, Nakki, Vaisala [5] çalışmasında aşağıdakini ispatlamıştır.

Önerme 3.4 : John daireleri için δ_G ve λ_G uzaklıkları eşdeğerdirler, yani sadece John sabitine bağlı olan öyle b sabiti vardır ki,

$$\delta_G(x, y) \leq \lambda_G(x, y) \leq b \delta_G(x, y) \quad \forall x, y \in \overline{G}.$$

Nakki ve Vaisala [13] çalışmasında aşağıdakini ispatlamıştır.

Önerme 3.5 : $G \subset C$ Jordan bölgesi için aşağıdakiler eşdeğerdir.

(a) G , b -John dairesidir

(b) $\text{diam} C(x, y) \leq b \delta_G(x, y) \quad \forall x, y \in \partial G$

(c) G 'nin her $[x, y]$ kesimi için $\text{diam} C(x, y) \leq b |x - y|$

NOT : Şıklardaki b sabitleri sadece birbirine bağımlıdırlar. (b) koşulu aşağıdaki kesim koşuluna eşdeğerdir:

G 'nin her γ kesimi için G_1 ve G_2 , $G \setminus \gamma$ 'nin bileşenleri olmak üzere

$$\min\{diam(G_1), diam(G_2)\} \leq b \, diam(\gamma)$$

sağlanır.

(c) koşulu aşağıdaki doğrusal kesim koşuluna eşdeğerdir. G 'nin her $[x, y]$ kesimi için,

$$\min\{diam(G_1), diam(G_2)\} \leq b|x - y|.$$

3.3 φ -İÇ LAVRENTİEV BÖLGELERİ

G Jordan bölgesi aşağıdaki koşulu sağladığında φ -iç Lavrentiev bölgesi adını alır. (c -ICA $^\varphi$ dairesi) öyle c sabiti vardır ki $\forall x, y \in C = \partial G$ noktaları için C 'nin onları birleştiren ve

$$c^{-1}\varphi(\delta_G(x, y)) \leq H^\varphi(A) \leq c\varphi(\delta_G(x, y)) \quad (ICA^\varphi)$$

koşulunu sağlayan $A = A(x, y)$ yayı mevcuttur.

Önerme 3.6 : $C = \partial G \subset C$ Jordan eğrisi için aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (a) $\forall x, y \in C$ için $C \setminus \{x, y\}$ 'nin (ICA^φ) koşulunu sağlayan bileşeni mevcuttur.
- (b) $\forall x, y \in C$ ve $A = C^\varphi(x, y)$ için (ICA^φ) sağlanır.
- (c) $\forall x, y \in C$ ve $A = C(x, y)$ için (ICA^φ) sağlanır.

Önermenin ispatı Önerme 3.3'ün ispatına benzer olarak yapılır (Bak. [2]).

Bu şıklardaki sabitler farklıdırlar.

Şimdi gösterelim ki φ -iç Lavrentiev bölgesinin sınırı (HD) koşulunu sağlıyor.

Önerme 3.7 : G , c -ICA $^\varphi$ dairesi olsun. Her $A \subset C = \partial G$ yayı için,

$$c^{-1}\varphi(diam A) \leq H^\varphi(A) \leq 2c\varphi(diam A) \quad (3.3)$$

İspat : Açıktır ki $\forall x, y \in A$ için,

$$H^\varphi(A) \geq H^\varphi(C^\varphi(x, y)) \geq c^{-1}\varphi(\delta_G(x, y)) \geq c^{-1}\varphi(|x - y|),$$

Yani (3.3) sol tarafı sağlanır. Şimdi A 'nın uç noktaları x ve y , onun H^α -uzunluğunu ikiye bölen nokta ise z olsun. Bu takdirde,

$$H^\varphi(A) = 2H^\varphi(C^\varphi(x, z)) \leq 2c\varphi(\delta_G(x, z)) \leq 2c\varphi(\text{diam}_\delta A) = 2c\varphi(\text{diam}A)$$

Önerme 3.8 : $c - ICA^\varphi$ dairesi b - John koşulunu sağlıyor, öyle ki $b = b(c, \alpha)$.

İspat : Varsayalım ki G , $c - ICA^\varphi$ koşulunu sağlıyor, $C = \partial G$ ve $[x, y]$ G 'nin bir doğrusal kesimidir. Bu takdirde $\forall u, v \in C(x, y)$ için $C(u, v) \subset C(x, y)$ ve buradan,

$$c^{-1}\varphi(|u - v|) \leq c^{-1}\varphi(\delta_G(u, v)) \leq H^\varphi(C(x, y)) \leq c\varphi(\delta_G(x, y)) = c\varphi(|x - y|).$$

Böylece, $\text{diam} C(x, y) \leq \left[\frac{c^2}{M_1} \right]^{\frac{1}{\alpha}} |x - y|$. Şimdi Önerme 3.5'e göre b - John koşulunun sağlandığı açıktır.

Sonuç 3.9 : G , sınırlı $c - ICA^\varphi$ bölgesi olsun. Bu takdirde öyle $z \in G$ noktası vardır ki,

$$H^\varphi(\partial G) \leq c_0 \text{dist} \varphi(z, \partial G)$$

sağlanır. Burada, $c_0 = c_0(c, \varphi)$.

İspat : $C = \partial G$ eğrisini iki eşit yere bölen $x, y \in C$ noktalarını alalım. Yukarıdaki önermeye göre G , b - John dairedir. Yani, (J) koşulunu sağlayan $\gamma \subset G$ eğrisi mevcuttur. $z \in G$, γ 'nın orta noktası olsun. Bu takdirde,

$$\delta_G(x, y) \leq \text{diam}(\gamma) \leq \ell(\gamma) \leq 2b \text{dist}(z, \partial G)$$

ve bundan dolayı,

$$H^\varphi(C) = 2H^\varphi(C(x, y)) \leq 2c\varphi(\delta_G(x, y)) \leq 2c M_1 (2b)^\alpha \varphi(\text{dist}(z, \partial G)).$$

3.4 φ -İÇ AHLFORS REGÜLER BÖLGE

G bölgesi aşağıdaki koşulu sağladığı takdirde ona φ -iç Ahlfors regüler veya IAR^φ bölgesi denir. Öyle a sabiti vardır ki,

$$a^{-1}\varphi(r) \leq H^\varphi(C \cap B_\delta(x, r)) \leq a\varphi(r) \quad , \quad \forall x \in C = \partial G \quad , \quad 0 < r \leq \text{diam} C \quad . \quad (IAR^\varphi)$$

Önerme 3.10 : G Jordan John dairesi olsun. Bu takdirde, G 'nin IAR^φ bölgesi olması için gerek ve yeter koşul her $A \subset C = \partial G$ yayının (HD) koşulunu sağlamasıdır.

Varsayalım ki G , IAR^φ bölgesidir. Herhangi $A \subset C$, $r = \text{diam}(A) > 0$ yayını alalım. $\forall w \in A$ için $A \subset C \cap B_\delta(w, r)$ ve bundan dolayı $H^\varphi(A) \leq a\varphi(r)$. A 'nın uç noktaları x ve y olsun. Öyle $w \in A$ seçelim ki,

$$\text{diam} A(x, w) = \text{diam} A(y, w)$$

eşitliğini sağlasın. $r = \text{diam}(A) \leq \text{diam} A(x, w) + \text{diam} A(y, w)$ ilişkisinden,

$$\text{diam} A(x, w) = \text{diam} A(y, w) \geq \frac{r}{2}$$

elde edilir ve bundan dolayı $A(x, w), A(y, w)$ yaylarından hiçbiri $B_\delta(w, r/2b)$ dairesine dahil değildir. $z \in C \cap B_\delta(w, r/2b)$ noktasını alalım. Bu takdirde,

$$\text{diam} C(z, w) \leq b\delta_\delta(z, w) < \frac{r}{2}$$

sağlanır. Demek ki $C(z, w) \subset B_\delta(w, r/2b)$.

Eğer, $z \notin A$ ise biz $A(x, w) \subset C(z, w)$ veya $A(y, w) \subset C(z, w)$ elde ederiz ki bunların hiçbiri mümkün değildir. Demek ki,

$$C \cap B_\delta(w, r/2b) \subset A$$

ve bundan dolayı,

$$H^\varphi(A) \geq H^\varphi(C \cap B_\delta(w, r/2b)) \leq a^{-1}\varphi(r/2b)$$

sağlanır. Böylece, (HD) sağlanır.

Şimdi varsayalımki (HD) sağlanır. $w \in C$, $0 < r \leq \text{diam} C$ olsun. Eğer A , $C \cap B_\delta(w, r)$ 'nin w -bileşeni ise ,

$$H^\varphi(C \cap B_\delta(w, r)) \geq H^\varphi(A) \geq a\varphi(\text{diam} A) \geq a\varphi(r) \quad .$$

Diğer yandan A , $C \cap B_\delta(w, b_r)$ 'nin w -bileşeni ise, her $z \in C \cap B_\delta(w, r)$ için,

$$\text{diam}C(z, w) \leq b\delta_\delta(z, w) < br$$

elde ederiz. Böylece, $C(z, w) \subset B_\delta(w, b_r)$ veya $C \cap B_\delta(w, r) \subset A$ elde ederiz.

Bundan dolayı,

$$H^\varphi(C \cap B_\delta(w, r)) \leq H^\varphi(A) \leq a\varphi(\text{diam}A) \leq a\varphi(2br) \leq aM_1(2b)^\alpha \varphi(r).$$

Dolayısıyla G , $aM_1(2b)^\alpha - IAR^\varphi$ bölgesidir.

Teorem 3.11 : G Jordan bölgesi için aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (a) G , φ – Lavrentiev bölgesidir.
- (b) G , φ – Ahlfors-regüler John bölgesidir.
- (c) G , John dairesi olup, $\forall A \subset \partial G$ yayı için $H^\varphi(A)$ ve $\varphi(\text{diam}A)$ büyüklükleri mukayese edilebilir.

İspat : Varsayalım ki G , $c - ICA^\varphi$ bölgesidir. Önerme 3.8'e göre G , $b = b(c, \varphi)$ olmak üzere b - John bölgesi olacak, Önerme 3.8 ve Önerme 3.10'nu birleştirirsek G 'nin $a = a(c, \varphi)$ olmak üzere, $a - IAR^\varphi$ bölgesi olduğunu görürüz ve Önerme 3.10'dan (a) $\Rightarrow$ (b) olur. Önerme 3.10'a göre (b) $\Rightarrow$ (c). Şimdi (c) $\Rightarrow$ (a) ilişkisini gösterelim.

Varsayalım ki G , b - John bölgesidir ve $H(D)$ sağlanır. Herhangi $x, y \in C = \partial G$ alalım. $A = C(x, y)$ olsun. Bu takdirde,

$$H^\varphi(C(x, y)) \geq a^{-1}\varphi(\text{diam}A) \geq a^{-1}\varphi(\delta_G(x, y))$$

sağlanır. G , b - John bölgesi olduğundan dolayı,

$$\text{diam}C(x, y) \leq b\delta_G(x, y)$$

ve demek ki,

$$H^\varphi(C(x, y)) \leq a\varphi(\text{diam}A) \leq ab^\alpha M_1\varphi(\delta_G(x, y)).$$

Böylece G , $c = ab^\alpha M_1$ olmak üzere $c - ICA^\varphi$ koşulunu sağlıyor.

4-SONUÇ

Tezde Smirnov özelliği bakımından önemli olan Ahlfors ve Lavrentiev bölgelerinin genelleştirilmesi yapılmış olup, bu yeni sınıflar arasında ilişkiler saptanmıştır.

KAYNAKLAR

- 1- G.David, Operateurs integraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 17; 157-189-1984.
- 2- Ghamsari M. and D.A. Herron, Higher dimensional Ahlfos regular sets and chordarc curves in R^n . Rocky Mauntain J. Math., 28(1) : 191-222, 1998.
- 3- Ghamsari M., Extension Domains. Ph. Thesis University of Michigan, 1990.
- 4- F.W. Gehring K. Hag, and O. Martio., Quasihyperbolic geodesics in John domains ., Math. Scand., 65 : 75-92, 1989.
- 5- Ghamsari M., R. Nokki, and J. Väisälä. John disk and extension of maps. Mh. Math., 117: 63-94, 1994.
- 6- B. Hanson and D.A. Herron. The interior distance ratio in quadrilaterals and inequalities for rings. Complex Variables, 9: 321-325, 1988.
- 7- D.A. Herron and T.S. Sullivan., Fractal inner Chordarc disks.
- 8- D.S. Jerison and C.E. Kenig. Hardy spaces, A_∞ , and singular integrals on chord-arc domains. Math. Scand., 50(2): 221-247, 1982.
- 9- F. John. Rotation and strain. Comm. Pure Appl. Math., 14 : 391-413, 1961.
- 10- T.G. Latfullin. Geometric characterization of the quasi-isometric image of a half plane (Russian). In Theory of mappings, its generalizations and applications, pages 116-126, Kiev, 1982. Naukova Dumka.
- 11- O. Martio and J. Sarvas. Injectivity theorems in plane and space. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 4; 383-401, 1978/798.
- 12- M.H.A. Newman. Elements of the Topology of Plane Sets of Points. Cambridge University Pres, London, 1951.
- 13- R. Näkki and J. Väisälä. John disks. Exposition. Math., 9: 3-43, 1991.
- 14- Ch. Pommerenke. One-sided smoothness conditions and conformal mapping. J. London Math. Soc., 26(2) : 77-88, 1982.
- 15- Ch. Pommerenke. Boundary Behavior of Conformal Maps. Number 299 in Grundlehren der mathemetischenWissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- 16- T. Sullivan. Alpha-Dimensional Inner ChordArc Domains . PhD. thesis, University of Cincinnati, 2000.

- 17- P. Tukia. Extension of quasisymmetric and lipschitz embeddings of the real line into the plane. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 6: 89-94, 1981.
- 18- J. Väisälä. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. In Lecture Notes in Math., No. 229, Berlin, 1971. Springer-Verlag.
- 19- J. Väisälä. Homeomorphisms of bounded length distortion. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I Math., 12: 303-312, 1987.
- 20- J. Väisälä. Quasiconformal maps of cylindrical domains. Acta Math., 162: 201-225, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

Selda Işın, 29.02.1976 yılında İstanbul’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Gebze’de tamamladıktan sonra Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü bitirdi.

