

**T.C.**  
**GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMAN-UZAYI DALGA KILAVUZU MODLARININ**  
**ELEKTROMANYETİK MOMENTUM, REAKTİF ENERJİ VE**  
**ENERJİ İLETİM HIZI**

**AHMET ARDA ÇOŞAN**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**GEBZE**  
**2017**

**T.C.  
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMAN-UZAYI DALGA KILAVUZU  
MODLARININ ELEKTROMANYETİK  
MOMENTUM, REAKTİF ENERJİ VE  
ENERJİ İLETİM HIZI**

**AHMET ARDA ÇOŞAN  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMANI  
PROF. DR. OLEG A. TRETYAKOV  
II. DANIŞMANI  
YRD. DOÇ. DR. FATİH ERDEN**

**GEBZE**

**2017**

**T.R.**  
**GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY**  
**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**ELECTROMAGNETIC INERTIA,  
REACTIVE ENERGY AND VELOCITY OF  
FIELD ENERGY FOR THE TIME-DOMAIN  
WAVEGUIDE MODES**

**AHMET ARDA ÇOŞAN**  
**A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF SCIENCE**  
**DEPARTMENT OF ELECTRONIC ENGINEERING**

THESIS SUPERVISOR  
PROF. DR. OLEG A. TRETYAKOV  
II. THESIS SUPERVISOR  
ASSIST. PROF. DR. FATİH ERDEN

**GEBZE**

**2017**



## YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 29/06/2016 tarih ve 2017/35 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 18/07/2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Ahmet Arda ÇOŞAN'ın tez çalışması Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

### JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Oleg TRETAKOV

ÜYE

: Prof. Dr. Serkan AKSOY

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Erkul BAŞARAN

### ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

### İMZA/MÜHÜR

Doç. Dr. Arif Çağdaş AYDINOĞLU

Gebze Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ÖZET

Dalga kılavuzu problemi elektromanyetik teoride önemli yere sahip olan ve sıkça araştırılan bir konudur. Bu çalışmada zaman-uzay dalga kılavuzu problemi için klasik zaman-harmonik çözüm yönteminin aksine Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETEY) yöntemi kullanılarak zamana bağımlı gerçek değerli fonksiyonlar cinsinden çözüm elde edilmiştir. Maxwell denklemleri için yeni bir ölçeklendirme prosedürü kullanılarak Maxwell denklemlerinin SI birim sistemi çerçevesinde simetrik formata getirilmesi sağlanmıştır. ETEY yönteminde dalga kılavuzu probleminde Klein-Gordon denklemi (KGD) çözüm için büyük önem taşımaktadır. KGD'nin çözümüyle dalga kılavuzlarında modal genlikler elde edilmiş ve uygulanmış olan ölçeklendirme prosedürü ile elektromanyetik dalgaların enerji özellikleri SI birim sistemi içerisinde incelenmiştir. Simetrik Maxwell denklemleri sayesinde dalga kılavuzu içerisinde elektromanyetik kütle ve elektromanyetik momentum gibi mekanik özellikler incelenerek zamana bağlı grafikler olarak ortaya koyulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım, evrim denklemleri, Klein-Gordon denklemi, dalga kılavuzu, zaman domeni.

## SUMMARY

The waveguide problem is one of the well studied problems of the electromagnetic theory. In this study, instead of using classical time-harmonic electromagnetics, time-domain waveguide problem is solved in time-domain as real-valued functions of time with making usage of the Evolutionary Approach to Electromagnetics (EAE). With an novel scaling procedure Maxwell's equations are rearranged to the symmetrical form in the SI unit system. Klein-Gordon equation (KGE) plays an important role in the EAE for the waveguide problem. Solving KGE results in the modal amplitudes for the waveguide and the energetic properties of the electromagnetic fields are studied in the SI unit system with our new scaling procedure. With the symmetrized Maxwell's equations, mechanical properties of the electromagnetic waves in waveguides such as electromagnetic mass and electromagnetic momentum are studied and graphical results are exhibited.

**Key Words:** Evolutionary Approach to Electromagnetics, evolutionary equations, Klein-Gordon equation, waveguide, time-domain.

## TEŞEKKÜR

BaŐta, yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiÇbir zaman esirgemeyip bilgisi ve değerli zamanını benimle paylaŐan çok değerli danıŐmanım Prof. Dr. Oleg A. TRETAKOV'a,

Yüksek lisansımın son döneminde University of California'da bulunmasına karŐın eŐ danıŐmanlıđıma devam eden ve birlikte çalıŐabilmemiz için her hafta düzenli olarak zaman ayıran Yrd. Doç. Dr. Fatih ERDEN'e,

ve zor zamanlarda sürekli yanımda olup destekleyen sevgili aileme iten teŐekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

|  | <b><u>Sayfa</u></b> |
|--|---------------------|
| ÖZET   | v                   |
| SUMMARY  | vi                  |
| TEŞEKKÜR   | vii                 |
| İÇİNDEKİLER  | viii                |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ                                       | x                   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ  | xii                 |
| <br>   |                     |
| 1. GİRİŞ   | 1                   |
| 1.1. Tezin Konusu ve Yöntem  | 1                   |
| 1.2. SI Birim Sisteminin Tarihsel Geçmişi                            | 3                   |
| 2. SI BİRİM SİSTEMİNDE MAXWELL DENKLEMLERİNİN<br>İNCELENMESİ         | 4                   |
| 2.1. SI Birim Sisteminde Maxwell Denklemlerinin Simetrikleştirilmesi | 5                   |
| 3. PROBLEMİN AÇIKLANMASI   | 9                   |
| 3.1. Dalga Kılavuzu Problemi   | 9                   |
| 3.2. Problemin Formülasyonu  | 9                   |
| 4. ENİNE – BOYUNA ALAN AYRIŞIMLARI                                   | 12                  |
| 4.1. Rotasyonel Denklemlerin İzdüşümleri                             | 12                  |
| 4.2. Enine Elektrik Modal Alan Problemi                              | 14                  |
| 4.3. Enine Manyetik Modal Alan Problemi                              | 15                  |
| 5. ZAMAN DOMENİ TE MODLARI   | 17                  |
| 5.1. Vektörel Modal Baz  | 17                  |
| 5.2. TE Modal Alanlar  | 21                  |
| 5.3. Klein-Gordon Denklemi   | 21                  |
| 5.4. Evrimsel Denklemlerin TE Modları İçin Çözümü                    | 25                  |
| 5.5. Durum 1 İçin Gerçek Değerli Çözümler                            | 25                  |
| 5.6. Durum 2 İçin Gerçek Değerli Çözümler                            | 26                  |
| 6. ZAMAN DOMENİ TM MODLARI   | 27                  |
| 6.1. Vektörel Modal Baz  | 27                  |
| 6.2. TM Modal Alanlar  | 32                  |

|  |    |
|--|----|
| 6.3. Durum 1 İçin Gerçek Değerli Çözümler          | 33 |
| 6.4. Durum 2 İçin Gerçek Değerli Çözümler          | 33 |
| 7. ENERJİ ÖZELLİKLERİ                              | 35 |
| 7.1. Poynting Vektörü ve Enerji Yoğunluğu          | 35 |
| 7.2. TE Modları İçin Enerji Özellikleri            | 36 |
| 7.3. TM Modları İçin Enerji Özellikleri            | 37 |
| 7.4. Enerji Özellikleri İçin Grafıksel Sonuçlar    | 37 |
| 8. MEKANİK ÖZELLİKLER                              | 45 |
| 8.1. Mekanik Özellikler ve Gerçek Değerli Çözümler | 45 |
| 9. SONUÇ   | 55 |
| KAYNAKLAR  | 57 |
| ÖZGEÇMİŞ   | 60 |
| EKLER  | 61 |

# SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

| <u>Simgeler ve</u>           | <u>Açıklamalar</u>                                  |
|------------------------------|---|
| <u>Kısaltmalar</u>           |   |
| A                            | : Amper   |
| $\mu_0^A$                    | : Birimi amper olan manyetik geçirgenlik sabiti     |
| $\epsilon_0^V$               | : Birimi volt olan elektriksel geçirgenlik sabiti   |
| $w_n'$                       | : Boyuna alanların enerji yoğunluğu                 |
| $\kappa_n$                   | : Dirichlet probleminin özdeğerleri                 |
| $\phi_n$                     | : Dirichlet probleminin özfonksiyonları             |
| $\mathcal{D}$                | : Elektrik akı yoğunluğu vektörü                    |
| $\mathcal{E}$                | : Elektrik alan vektörü                             |
| ETEY                         | : Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım Yöntemi |
| $\mathbb{V}(\mathbf{r}, t)$  | : Enerji iletim hızı                                |
| $\mathbb{W}(\mathbf{r}, t)$  | : Enerji yoğunluğu                                  |
| $dW_n'$                      | : Enine alanların enerji yoğunluğu                  |
| TE                           | : Enine elektrik (Transverse electric)              |
| TM                           | : Enine manyetik (Transverse magnetic)              |
| F                            | : Farad   |
| c                            | : Işık hızı   |
| $\sigma$                     | : Kayıplı yapının elektriksel iletkenliği           |
| kg                           | : kilogram  |
| KGD                          | : Klein-Gordon denklemi                             |
| $\mathcal{B}$                | : Manyetik akı yoğunluğu vektörü                    |
| $\mathcal{H}$                | : Manyetik alan vektörü                             |
| m                            | : Metre   |
| $\psi_n$                     | : Neumann probleminin özçözümleri                   |
| $v_n$                        | : Neumann probleminin özdeğerleri                   |
| N                            | : Newton  |
| $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$ | : Poynting vektörü                                  |
| sn                           | : Saniye  |

|                                |   |  |
|--------------------------------|---|--|
| $\mathcal{V}_n, \mathcal{I}_n$ | : | TE modları için enine modal genlikler          |
| $h_n$                          | : | TE modlarının boyuna modal genliği             |
| $\mathcal{V}_m, \mathcal{I}_m$ | : | TM modları için enine modal genlikler          |
| $e_m$                          | : | TM modlarının boyuna modal genliği             |
| $V$                            | : | Volt   |
| $t$                            | : | Zaman  |
| ZUSF                           | : | Zaman Uzayında Sonlu Farklar                   |
| $m(z,t)$                       | : | Zaman ve konuma bağlı elektromanyetik kütlev   |
| $p(z,t)$                       | : | Zaman ve konuma bağlı elektromanyetik momentum |
| $\partial_t$                   | : | Zamana göre kısmi türev operatörü (1/s)        |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

| <b><u>Şekil No:</u></b>   | <b><u>Sayfa</u></b> |
|---|---------------------|
| 3.1: Dikdörtgen ve dairesel kesitli dalga kılavuzları.  | 9                   |
| 7.1: Kayıpsız ortam için TE Modu modal genlikleri, (Durum 1).   | 38                  |
| 7.2: Kayıpsız ortam için güç akış yoğunluğu, enerji yoğunluğu ve enerji iletim hızının zamanla değişimi, (Durum 1). | 38                  |
| 7.3: Kayıpsız ortam için enine ve boyuna enerji yoğunlukları, (Durum 1).  | 39                  |
| 7.4: Kayıplı ortamda TE modu için modal genlikler, (Durum 1).   | 40                  |
| 7.5: Kayıplı ortamda güç akış yoğunluğu, enerji yoğunluğu ve enerji iletim hızının zamanla değişimi, (Durum 1).     | 40                  |
| 7.6: Kayıplı ortamda enine ve boyuna enerji yoğunlukları, (Durum 1).  | 41                  |
| 7.7: Kayıpsız ortamda için TE Modu için modal genlikler , (Durum 2).  | 41                  |
| 7.8: Kayıpsız ortamda güç akış yoğunluğu, enerji yoğunluğu ve enerji iletim hızının zamanla değişimi, (Durum 2).    | 42                  |
| 7.9: Kayıpsız ortam için enine ve boyuna enerji yoğunlukları, (Durum 2).  | 42                  |
| 7.10: Kayıplı ortamda TE modu için modal genlikler, (Durum 2).  | 43                  |
| 7.11: Kayıplı ortamda güç akış yoğunluğu, enerji yoğunluğu ve enerji iletim hızının zamanla değişimi, (Durum 2).    | 43                  |
| 7.12: Kayıplı ortam için enine ve boyuna enerji yoğunlukları, (Durum 2).  | 44                  |
| 8.1: Kayıpsız ortamda elektromanyetik kütlenin zamanla değişimi.  | 53                  |
| 8.2: Kayıpsız ortamda elektromanyetik momentumun zamanla değişimi.  | 54                  |

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Tezin Konusu ve Yöntem

Dalga kılavuzları elektromanyetik teorisinin önemli araştırma konularından bir tanesidir. Dalga kılavuzu problemi de diğer elektromanyetik problemleri gibi klasik zaman-harmonik yöntemi kullanılarak  $t=-\infty$ 'da başlayıp  $t=\infty$ 'a kadar devam eden olayları inceleyerek çözüme ulaştırılabilir. Gerçek durumdan bakılacak olursa, araştırmacılar problemlerin çözümünde belirli bir  $t=0$  zamanında başlayan “zorlanmış osilasyonlar” kullanmak durumundadırlar.

Elektromanyetik teoride çözüm yöntemleri genel olarak iki ana kategoride incelenebilir. İlk kategoriye; modern bilgisayarların hesaplama limitleriyle kısıtlı olan nümerik yöntemler alınabilir. Günümüzde nümerik yöntemler, elektromanyetik teori araştırmalarında oldukça popüler durumdadır. Zaman domeni açısından bakılacak olursa, nümerik yöntemlerden Zaman Uzayında Sonlu Farklar Yöntemi (Finite Difference Time Domain - FDTD) ve bu yöntemin farklı versiyonlarının kullanılmasıyla elde edilen çalışmalar görülecektir. Zaman Uzayında Sonlu Farklar (ZUSF) yönteminin, zaman domeni konusunda oldukça fazla sayısal veri sağladığı görülebilir; ancak bu yöntem ile olan gelişmelerin zamanın bilgisayar kaynaklarıyla sınırlı olduğu unutulmamalıdır.

İkinci kategoride ise; Laplace veya Fourier integral dönüşümlerinin bulunduğu analitik yöntemler vardır. Bu yolda birçok problemde matematiksel zorluklarla karşılaşabilmektedir.

Analitik çözüm yöntemleri kategorisinde olan bu çalışma, elektromanyetik alanların zaman domeninde incelenmesini amaçlayan *Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETEY)* yöntemi çerçevesindedir [1]. Matematikçiler tarafından zaman türevli bütün diferansiyel denklemler “evrimsel denklemler” olarak adlandırılırlar [2]. Bu denklemlerin çözümleri uygun başlangıç koşulları altında, olayların zaman içerisindeki gelişimini başlangıç zamanından gözlem anına kadar ortaya koymaktadırlar. Çözümün evrim denklemleri formunda elde edilmesinden dolayı bu yöntem “Evrimsel Yaklaşım” olarak isimlendirilmiştir. Bu yaklaşım çerçevesinde kavite problemine ilişkin çözümler Cauchy denklemi formunda, dalga kılavuzu problemine ilişkin çözümler Klein-Gordon denklemi formunda elde

edilmekte, söz konusu denklemlerin çözülmesiyle elektromanyetik alanların başlangıç anından gözlem anına zamanla değişimi incelenebilmektedir.

Kuantum mekaniğindeki gelişmeler, yirminci yüzyılın başlarında Klein-Gordon denkleminin (KGD) açıklığa kavuşturulması ile hız kazanmıştır [3]. Klein-Gordon denkleminin çözümlerindeki üstün simetri özelliklerinin incelenmesi ile Miller tarafından on bir simetri durumu ortaya konulmuştur [4]. Klasik zaman-harmonik dalga kılavuzu problemi Miller'ın yapmış olduğu sınıflandırmada özel bir durum olarak Durum 1'e karşılık gelmektedir. Diğer durumlar, analitik zaman-uzayı elektromanyetik alanında yeni çalışmaların önünü açmaktadır. Bundan dolayı, zaman-uzayı dalga kılavuzu probleminde Maxwell denklemlerinden zaman türevli KGD'nin elde edilerek sonuca ulaşılması önemli bir yöntemdir [5]. Tarihsel olarak, elektromanyetik alanında bunu matematiksel biçimde ilk defa uygulayan Gabriel olmuştur [6]. Daha sonraları ise evrimsel dalga kılavuzu denklemlerinin elde edilmesinde büyük önem taşıyan KGD, Maxwell denklemlerinden ETEY yöntemi çerçevesinde tam olarak elde edilmiştir [1], [7], [8]. Ardından, Kristensson'un analizleri KGD'nin yeni çözüm yöntemine adanmıştır [9]. Dalga ayrıştırma tekniğine dayanarak dalga kılavuzu içerisindeki alanlar, Green fonksiyonu ve kaynak fonksiyonunun zaman konvolüsyonu olarak ifade edilmiştir. Kaynak noktası ve gözlem noktası arasındaki mesafeler kısa olduğunda elde edilen nümerik veriler oldukça tutarlı olsa da  $t$  ve  $z$  büyümeye başladığı zaman hızlı osilasyonlar nedeniyle konvolüsyon integrali çözümlerde işe yaramaz duruma gelmektedir. Bu alanda yakın zamanda, Geyi tarafından dikdörtgen dalga kılavuzu içerisinde geçici dalgaların oluşturduğu alanlar çalışılmıştır [10].

Bu çalışmada dalga kılavuzı modal alanlarının elde edilen KGD'den elde edilmesinin ardından, önce dalga kılavuzu alanlarının enerji özellikleri ve daha sonra da, kullanılan ölçeklendirme prosedürünün sağlamış olduğu simetrik Maxwell denklemleri sayesinde, dalga kılavuzu alanlarının sahip olduğu mekanik özellikler incelenmiştir. Ele alınan ETEY yöntemi, yakın zaman içerisinde klasik zaman-harmonik yöntemine alternatif bir yöntem olarak sunulmuştur [11]. Bu yöntemin temelleri 80'lerde atılmış ve çalışmaların büyük çoğunluğu Rusça olarak yayınlanmıştır [1]. Ayrıca bu yöntem, zaman-uzayı kavite ve dalga kılavuzu problemlerinin incelenmesi için önceki birçok çalışmada kullanılmıştır [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]. Yapılmış olan son çalışmalarla yöntemin temelleri genç araştırmacılar için daha detaylı olarak ele alınmıştır [5], [19], [20], [21], [22], [23].

Bu tezde dalga kılavuzu alanlarına ilişkin mekanik özelliklerin incelenebilmesi amacıyla Maxwell denklemlerinin simetrik formata kavuşturulması sağlanmıştır. Bu sayede enerji özellikleri ile mekanik özelliklere ait gerçek değerli çözümler ETEY yöntemi baz alınarak, zamana göre değişimleri inceleyen grafiksel sonuçlarla sunulmuştur.

## 1.2. SI Birim Sisteminin Tarihsel Geçmişi

İkinci Dünya Savaşı sonrasında değişik bilimsel çalışma alanları arasındaki kopukluklar nedeniyle bilim çevrelerinde yeni bir birim sistemi geliştirilmesi konusunda çalışmalar yapılmış ve 11'inci Ağırlıklar ve Ölçüler Genel Konferansında (CGPM, 1960) SI Birim Sistemi (International System of Units - SI) kabul edilmiştir [24]. SI birim sistemi temel olarak birbirinden bağımsız yedi elemandan oluşmaktadır. Elektromanyetik alanında kullanım için; metre  $[m]$ , kilogram  $[kg]$ , saniye  $[s]$  ve amper  $[A]$  birimleri yeterlidir. 1960 yılından itibaren bilimsel çevreler, ortak sistem olarak SI birim sistemini benimsemiştir.

SI birim sisteminin gelişiyile elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin boyutları sırasıyla *volt/metre*  $[Vm^{-1}]$  ve *amper/metre*  $[Am^{-1}]$  olarak belirlenmiştir. Bu büyüklükler açık olarak

$$[\mathcal{E}] = \left[ \frac{V}{m} \equiv \frac{N}{As} \right], \quad [\mathcal{H}] = \left[ \frac{A}{m} \right] \quad (1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çalışmada büyüklüklerin fiziksel boyutları denklem (1.1) de görülebileceği gibi özel köşeli parantez içerisinde,  $[*]$ , şeklinde gösterilmiştir.

## 2. SI BİRİM SİSTEMİNDE MAXWELL DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

Maxwell denklemleri SI birim sistemi çerçevesinde yazılacak olursa

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{R}, t) &= \varepsilon_0 \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{R}, t) + \sigma \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{R}, t) &= -\mu_0 \partial_t \mathcal{H}(\mathbf{R}, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

$\mathcal{E}(\mathbf{R}, t)$  ve  $\mathcal{H}(\mathbf{R}, t)$  elektrik ve manyetik alan şiddet vektörleri,  $\mathbf{R}$  gözlem noktasının pozisyon vektörü,  $t$  gözlem zamanı,  $\sigma$  ise sistemdeki kayıpları modelleyen iletkenlik sabitidir.

Maxwell denklemleri, SI birim sisteminden çok daha önce ortaya konulmuş olduğundan SI sistemine geçildiğinde denklemler farklı bir düzenlemeye tabi olmuş ve bu düzenleme bir takım değişiklikleri beraberinde getirmiştir. Maxwell denklemlerinde fiziksel boyut analizi yapılacak olursa, operatör nabla  $\nabla$ 'nın boyutunun  $[m^{-1}]$  ve  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ 'nin fiziksel boyutunun  $[s^{-1}]$  olduğu görülebilir. SI birim sistemiyle gelen ve boyutları; *volt/metre*  $[Vm^{-1}]$  ve *amper/metre*  $[Am^{-1}]$  olan elektrik alan ve manyetik alan vektörleri ile birlikte düşünüldüğünde, denklemde sistemin boyutsal olarak eşitlik durumunun korunması için dışarıdan birtakım katsayılar eklenmesi gerekli olmuştur. Bu katsayılar elektrik ve manyetik geçirgenlik katsayıları olarak geçer ve (2.1) denkleminde de görülebileceği gibi  $\varepsilon_0$  ve  $\mu_0$  olarak gösterilirler. Bu katsayılar boyutları ile birlikte

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \left[ \frac{H}{m} \equiv \frac{N}{A^2} \right] \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{c_0 4\pi \times 10^{-7}} \left[ \frac{F}{m} \equiv \frac{A^2 s^2}{N m^2} \right]\end{aligned}\tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilebilirler. Burada  $c_0$  ifadesi, temel fiziksel sabit olup, ışık hızı değerini

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ [ms}^{-1}\text{]} \quad (2.3)$$

olarak sembolize etmektedir [25]. Açıklamak gerekirse ışık hızı,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c_0 \text{ [ms}^{-1}\text{]}$ , kuvvet birimi *Newton*  $[N = \text{kgms}^{-2}]$ , elektrik kapasitansın birimi *Farad*  $[F = \text{s}^4 \text{A}^2 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-2}]$  olarak yazılabilir.

## 2.1. SI Birim Sisteminde Maxwell Denklemlerinin Simetrikleştirilmesi

SI birim sisteminde Maxwell denklemlerindeki elektromanyetik ifadelerin fiziksel boyutlarını ölçeklendiren bir prosedür öne sürülmektedir. SI birim sisteminde ölçeklendirmek üzere,  $\mathcal{E}(\mathbf{R}, t)$  *volt/metre*  $[Vm^{-1}]$  elektrik alan vektörü boyutu *volt*  $[V]$  olacak şekilde yeni ölçeklendirme faktörü  $\varepsilon_0^V = \sqrt{N/\varepsilon_0}$  ve  $\mathcal{H}(\mathbf{R}, t)$  *amper/metre*  $[Am^{-1}]$  manyetik alan vektörü için boyutu *amper*  $[A]$  olacak şekilde yeni ölçeklendirme faktörü  $\mu_0^A = \sqrt{N/\mu_0}$  seçilsin. Bu durumda yeni büyüklükler

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^V &\triangleq \sqrt{N/\varepsilon_0} = \sqrt{\pi} 1.8961 \times 10^5 \text{ [V]} \\ \mu_0^A &\triangleq \sqrt{N/\mu_0} = \sqrt[2]{\pi} 1.5811 \times 10^3 \text{ [A]} \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (2.4)'de tanımlanan katsayıların çarpımının, SI birim sisteminde ışık hızını verdiği gösterilerek doğrulama yapılabilir

$$\mu_0^A \varepsilon_0^V = \sqrt[2]{\mu_0 \varepsilon_0} = 2.9979 \times 10^8 \text{ [AVN}^{-1}\text{]} \cong c \text{ [ms}^{-1}\text{]}. \quad (2.5)$$

Yeni tanımlanan katsayılar yardımıyla  $\mathcal{E}(\mathbf{R}, t)$  ve  $\mathcal{H}(\mathbf{R}, t)$  alan vektörleri ölçeklendirilecek olursa; yeni elektrik alan ve manyetik alan vektörleri,  $\mathbb{E}(\mathbf{R}, t)$  ve  $\mathbb{H}(\mathbf{R}, t)$ , ölçeklendirme faktörlerinin sayısal değerleri ile birlikte

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{R},t) &= \varepsilon_0^V \mathbb{E}(\mathbf{R},t) \cong 3.361 \times 10^5 \mathbb{E}(\mathbf{R},t) \\
\mathcal{H}(\mathbf{R},t) &= \mu_0^A \mathbb{H}(\mathbf{R},t) \cong 8.921 \times 10^3 \mathbb{H}(\mathbf{R},t)
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

şeklinde yazılabilir.

Elektrik ve manyetik alan vektörlerinin ölçeklendirilmesiyle elde edilen alan vektörleri  $\mathbb{E}(\mathbf{R},t)$  ve  $\mathbb{H}(\mathbf{R},t)$  vektörel büyüklüklerin aynı  $[m^{-1}]$  fiziksel boyutlarına sahip olması Maxwell denklemlerinin simetrik formda yazılabilmesini sağlar.

$\mathbb{E}(\mathbf{R},t)$  ve  $\mathbb{H}(\mathbf{R},t)$  alan vektörleri,  $\varepsilon_0^V$  ve  $\mu_0^A$  ile birlikte denklem (2.1)'de ilgili yerlerine yerleştirildiğinde Maxwell denklemleri

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mu_0^A \mathbb{H} &= \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon_0^V \mathbb{E} + \sigma \varepsilon_0^V \mathbb{E} \\
\nabla \times \varepsilon_0^V \mathbb{E} &= -\mu_0 \partial_t \mu_0^A \mathbb{H}
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

halini alır. Denklem (2.4)'de yer alan tanımlar ile birlikte

$$\begin{aligned}
\nabla \times \sqrt{N / \mu_0} \mathbb{H} &= \varepsilon_0 \partial_t \sqrt{N / \varepsilon_0} \mathbb{E} + \sigma \sqrt{N / \varepsilon_0} \mathbb{E} \\
\nabla \times \sqrt{N / \varepsilon_0} \mathbb{E} &= -\mu_0 \partial_t \sqrt{N / \mu_0} \mathbb{H}
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

durumuna gelir. *Newton*  $N$ , her iki tarafta da ortak olduğundan denklemlerden çıkartılıp ilk denklem  $\sqrt{\mu_0}$ , ikinci denklem ise  $\sqrt{\varepsilon_0}$  ile çarpıldığında

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbb{H} &= \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \left[ \partial_t \mathbb{E} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbb{E} \right] \\
\nabla \times \mathbb{E} &= -\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \partial_t \mathbb{H}
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

denklemlerine ulaşılır.  $\sigma / \varepsilon_0$  ifadesinin boyutunun

$$\left[ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right] = \frac{S}{m} \left( \frac{A^2}{N} \frac{s^2}{m^2} \right)^{-1} = \frac{1}{s}
\tag{2.10}$$

olduğu görülebilir.  $\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 1/c$  olduğundan, Maxwell denklemleri

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) + 2\gamma \mathbb{E}(\mathbf{R}, t)] \\ \nabla \times \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}(\mathbf{R}, t)\end{aligned}\tag{2.11}$$

şeklinde yeni bir formda elde edilmiş olur. Buradaki  $\gamma$  ile kayıplı ortamın parametresi olan  $\sigma$  arasında  $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$  ilişkisi vardır.

Denklem (2.11) ve (2.1) karşılaştırıldığında denklem (2.1)'deki  $\varepsilon_0$  ve  $\mu_0$  evrensel sabitlerin yerine denklem (2.11)'de sadece  $c$  mutlak sabitinin kullanıldığı görülmektedir. Böylece denklem (2.11), Heaviside-Lorentz denklemlerinin sahip olduğu simetrik formatta yazılmıştır [26], [27].

Heaviside-Lorentz denklemleri SI birim sisteminin ortaya çıkmasından yıllar önce CGS birim sisteminde ifade edilmiş denklemlerdir. Kayıpsız ortam için Heaviside-Lorentz denklemleri kısaca

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}(\mathbf{R}, t) \\ \nabla \times \vec{E}(\mathbf{R}, t) &= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{H}(\mathbf{R}, t)\end{aligned}\tag{2.12}$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (2.12), boyutsal olarak incelendiğinde  $\vec{E}(\mathbf{R}, t)$  ve  $\vec{H}(\mathbf{R}, t)$  alan vektörleri, aynı fiziksel boyuta sahip olmak zorundadırlar. Heaviside-Lorentz denklemleri, CGS birim sisteminde olduğundan  $\vec{E}(\mathbf{R}, t)$  ve  $\vec{H}(\mathbf{R}, t)$  vektörlerinin boyutları

$$[\vec{E}(\mathbf{R}, t)] = [\vec{H}(\mathbf{R}, t)] = g^{1/2} cm^{-1/2} s^{-1}\tag{2.13}$$

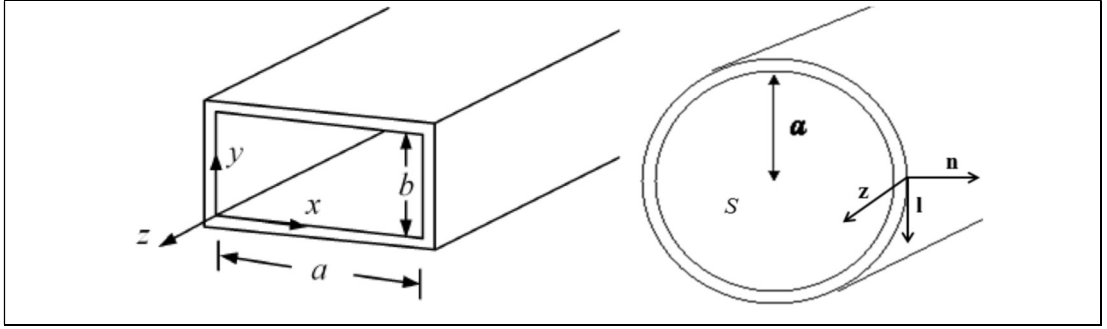
olarak görülmektedir. Elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin fiziksel boyutları aynıdır. Bu da Heaviside-Lorentz denklemlerinin “simetrik denklemler” olduğuna işaret eder.

Elektromanyetik teoride, enerji özellikleri ve mekanik konuların (kütle, momentum vb.) SI birim sistemi içerisinde araştırılabilmesi için Maxwell denklemlerinde simetri özelliğinin sağlanması; yani elektrik ve manyetik alan vektörlerinin fiziksel boyutlarının aynı olması gereklidir. Uygulanan simetrikleştirme işleminin faydası ve önemi burada yatmaktadır. Ölçeklendirme prosedürü uygulanarak elde edilen denklem (2.11)'deki Maxwell denklemlerinin, denklem (2.12)'deki Heaviside-Lorentz denklemlerinin simetrisine sahip olması ve bu simetri özelliğinin SI birim sistemi içerisinde ortaya konmuş olması önemlidir.

### 3. PROBLEMİN AÇIKLANMASI

#### 3.1. Dalga Kılavuzu Problemi

Bu çalışmada  $S$  kesit alanı,  $Oz$  eksenini boyunca regüler ve tek parçalı  $L$  sınır ile kapatılmış mükemmel elektriksel iletkenliğe sahip bir dalga kılavuzu ele alınmıştır.  $Oz$  eksenini boyunca  $\hat{z}$ ,  $L$  sınırına teğet olarak  $\hat{l}$  ve dalga kılavuzu yüzeyinin normali doğrultusunda  $\hat{n}$  vektörleri;  $\hat{z} \times \hat{l} = \hat{n}$  şeklinde tanımlansın.  $\mathbf{r}$  vektörü,  $S$  kesit yüzeyinde üzerinde tanımlı ve  $z$  ise  $\mathbf{R}$  vektörünün  $Oz$  eksenine izdüşümü olmak üzere dalga kılavuzu içerisindeki bir gözlem noktası  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\hat{z}$  ile tanımlanmıştır. Şekil 3.1’de dikdörtgen ve dairesel kesitli dalga kılavuzları birer örnek çizim ile gösterilmektedir.



Şekil 3.1: Dikdörtgen ve dairesel kesitli dalga kılavuzları.

#### 3.2. Problemin Formülasyonu

Dalga kılavuzu probleminin çözümü için denklem (2.11)’de görülen Maxwell denklemleri ile

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = 0 \text{ ve } \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \hat{\rho} \quad (3.1)$$

diverjans denklemlerini sağlayan çözüm elde edilmelidir. Burada  $\hat{\rho} = \rho / \sqrt{N / \epsilon_0}$  elektrik yük yoğunluğudur.

Denklem (3.1)'de görüldüğü üzere diverjans denklemleri ölçeklendirilmiş formatta yazılmıştır. Bu formata geçiş aşaması

$$\nabla \cdot \mathcal{B}(\mathbf{R}, t) = 0 \text{ ve } \nabla \cdot \mathcal{D}(\mathbf{R}, t) = \rho \quad (3.2)$$

klasik diverjans denklemlerinden başlamaktadır. Sonraki adım olarak  $\mathcal{B}(\mathbf{R}, t)$  ve  $\mathcal{D}(\mathbf{R}, t)$  ifadelerinin yerine ilgili eşitlikleri yazıldığında

$$\nabla \cdot \mu_0 \mathcal{H}(\mathbf{R}, t) = 0 \text{ ve } \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathcal{E}(\mathbf{R}, t) = \rho \quad (3.3)$$

elde edilir.  $\mathcal{E}(\mathbf{R}, t)$  ve  $\mathcal{H}(\mathbf{R}, t)$  alan vektörleri için uygulanan ölçeklendirme işlemi burada da uygulanıp

$$\nabla \cdot \mu_0 \mu_0^A \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) = 0 \text{ ve } \nabla \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_0^V \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) = \rho \quad (3.4)$$

denklemleri elde edilir.  $\varepsilon_0^V$  ve  $\mu_0^A$  katsayılarının eşitlikleri ilgili yerlere denklem (2.4)'teki gibi yazıldığında

$$\nabla \cdot \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) = 0 \text{ ve } \sqrt{N} \nabla \cdot \sqrt{\varepsilon_0} \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) = \rho \quad (3.5)$$

elde edilir. Buradan diverjans denklemleri

$$\nabla \cdot \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) = 0 \text{ ve } \nabla \cdot \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) = \hat{\rho} \quad (3.6)$$

olarak yeni bir form alır.

Zaman-uzayı dalga kılavuzu probleminin çözümü için dalga kılavuzu üzerinde

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{H}|_{\mathbf{r} \in L} = 0, \mathbf{l} \cdot \mathbb{E}|_{\mathbf{r} \in L} = 0, \mathbf{z} \cdot \mathbb{E}|_{\mathbf{r} \in L} = 0. \quad (3.7)$$

ihitiyaç duyulan sınır koşulları da mükemmel elektriksel iletken sınır koşulları olarak problemin formülasyonuna ilave edilsin.

## 4. ENİNE – BOYUNA ALAN AYRIŞIMLARI

Kullanılan  $\mathbf{R}$  konum vektörünün enine-boyuna ayrışımıyla tanımlanması gibi nabla  $\nabla$  operatörü de

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{z}, \nabla = \nabla_{\perp} + z\partial_z \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlansın. Burada sırasıyla  $\mathbf{r}$  ve  $\nabla_{\perp}$ ,  $\mathbf{R}$  ve  $\nabla$ 'nın  $S$  üzerine izdüşümleridir. Elektrik ve manyetik alan vektörleri de denklem (4.1)'deki forma uygun olarak, enine-boyuna ayrışım ile

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) &= \mathbb{E}_{\perp}(\mathbf{R}, t) + z\mathbb{E}_z(\mathbf{R}, t) \\ \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) &= \mathbb{H}_{\perp}(\mathbf{R}, t) + z\mathbb{H}_z(\mathbf{R}, t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbb{E}_{\perp}$  ve  $\mathbb{H}_{\perp}$  vektörleri,  $\mathbb{E}$  ve  $\mathbb{H}$ 'ın  $S$  domeni üzerine izdüşümüdür.

### 4.1. Rotasyonel Denklemlerin İzdüşümleri

$\mathbb{E}$  ve  $\mathbb{H}$  vektörel ifadeleri denklem (4.2)'deki formda  $(\mathbf{r}, z, t)$ 'ye bağımlı üç elemanlı  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\perp} + z\mathbb{F}_z$  formunda gösterildiğinde,  $\nabla \times \mathbb{F}$  rotasyonel ifadesi açık olarak

$$[\nabla \times \mathbb{F}] = (\nabla_{\perp} + z\partial_z) \times (\mathbb{F}_{\perp} + z\mathbb{F}_z) = [\nabla_{\perp} \times \mathbb{F}_{\perp}] + [\nabla_{\perp} \times z\mathbb{F}_z] + \partial_z [z \times \mathbb{F}_{\perp}] \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Enine ve boyuna rotasyoneller  $[\nabla \times \mathbb{F}]_{\perp}$  ve  $[\nabla \times \mathbb{F}]_z$  birbirinden ayrı olarak

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbb{F}]_{\perp} &= [\nabla_{\perp} \times \mathbf{z}\mathbb{F}_z] + \partial_z [\mathbf{z} \times \mathbb{F}_{\perp}] \\ [\nabla \times \mathbb{F}]_z &= \nabla_{\perp} \cdot [\mathbb{F}_{\perp} \times \mathbf{z}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde gösterilebilir. Denklem (4.3)'e uygun olarak, denklem (2.11)'de simetrik hale getirilmiş Maxwell denklemlerindeki rotasyonel ifadeleri yeniden yazıldığında ilk denklem önce

$$(\nabla_{\perp} + \mathbf{z}\partial_z) \times (\mathbb{H}_{\perp} + \mathbf{z}\mathbb{H}_z) = \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) + 2\gamma \mathbb{E}(\mathbf{R}, t)] \quad (4.5)$$

ardından

$$(\nabla_{\perp} \times \mathbb{H}_{\perp}) + (\nabla_{\perp} \times \mathbf{z}\mathbb{H}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{H}_{\perp}) = \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) + 2\gamma \mathbb{E}(\mathbf{R}, t)] \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem, denklem (4.4)'te gösterilen şekilde enine ve boyuna parçalara ayrıldığında bir adet iki elemanlı vektör denklemi ile bir tane skaler vektör denklemi

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{z}\mathbb{H}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{H}_{\perp}) &= \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}_{\perp} + 2\gamma \mathbb{E}_{\perp}] \\ \nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{H}_{\perp} \times \mathbf{z}) &= \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}_z + 2\gamma \mathbb{E}_z] \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde iki ayrı denklem elde edilir.

Denklem (2.11)'de görülen ikinci denklem de benzer prosedürle enine ve boyuna parçalara ayrıldığında

$$(\nabla_{\perp} + \mathbf{z}\partial_z) \times (\mathbb{E}_{\perp} + \mathbf{z}\mathbb{E}_z) = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) \quad (4.8)$$

ardından

$$(\nabla_{\perp} \times \mathbb{E}_{\perp}) + (\nabla_{\perp} \times \mathbf{z} \mathbb{E}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}) = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{z} \mathbb{E}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_{\perp} \\ \nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{E}_{\perp} \times \mathbf{z}) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_z \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde bir adet iki elemanlı vektör denklemi ve bir adet tek elemanlı vektör denklemini verir.

(4.7) ve (4.10)'daki denklemler incelendiğinde, bu denklemlerin (2.11)'de elde edilen simetrikleştirilmiş Maxwell denklemlerinden farklı olmadığı görülecektir. Bahsedilmesi gereken tek detay, (4.7) ve (4.10)'daki denklemlerin gösterim bakımından enine ve boyuna parçalar halinde yazılmış olmasıdır.

## 4.2. Enine Elektrik Modal Alan Problemi

Enine Elektrik (*TE*) modal alan probleminin incelenmesi için öncelikle denklem (2.11)'de elde edilmiş olan simetrikleştirilmiş Maxwell denklemlerinden elde edilmiş olan (4.7) ve (4.10) denklemleri, denklem (3.7)'deki mükemmel elektrik iletken sınır koşulları ve denklem (3.1)'deki diverjans denklemlerinin enine-boyuna ayrışımı bir arada kullanılarak problem bütün hale getirilmelidir. TE modlarında  $E_z = 0$  olduğundan  $H_z$  elemanını barındıran denklemler kullanılarak

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{z} \mathbb{H}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{H}_{\perp}) &= \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}_{\perp} + 2\gamma \mathbb{E}_{\perp}] \\ \nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{E}_{\perp} \times \mathbf{z}) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_z \\ \nabla_{\perp} \cdot \mathbb{H} + \partial_z \mathbb{H}_z &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbb{H}|_L &= 0 \\ \mathbf{l} \cdot \mathbb{E}|_L &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

şeklinde bir arada yazılabilirler. Burada ilk denklem, (4.7)'deki ilk denklemdir, ikinci denklem, (4.30)'daki skaler ikinci denklemdir, üçüncü denklem enine-boyuna ayrışımı yapılmış diverjans denkleminin  $H_z$  elemanını içerek kısmından geldiği görülebilir

$$\nabla \cdot \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) = 0 \rightarrow (\nabla_{\perp} + \mathbf{z} \partial_z) \cdot (\mathbb{H}_{\perp} + \mathbf{z} \mathbb{H}_z) = 0. \quad (4.12)$$

(4.11)'deki dört ve beşinci denklemler ise sınır koşullarından gelmektedir.

Kolay anlaşılır hale getirmek amacıyla  $H_z$  elemanı sol yanda toplanarak (4.11)'deki denklemler düzenlenirse

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \mathbb{H}_z &= \partial_z \mathbb{H}_{\perp} + \frac{1}{c} \partial_t [\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}] + 2\gamma \frac{1}{c} [\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}] \\ \frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_z &= \nabla_{\perp} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}) \\ \partial_z \mathbb{H}_z &= -\nabla_{\perp} \cdot \mathbb{H} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbb{H} \Big|_L &= 0 \\ \mathbf{l} \cdot \mathbb{E} \Big|_L &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir.

### 4.3. Enine Manyetik Modal Alan Problemi

Enine Manyetik (TM) modal alan problemi için de; denklem (2.11)'de elde edilmiş olan simetrikleştirilmiş Maxwell denklemleri, denklem (3.7)'de verilen sınır koşulları ve denklem (3.1)'deki diverjans denklemleri kullanılarak problem TM modu denklem seti elde edilebilir.  $E_z$  elemanını barındıran denklemlerin kullanılmasıyla TM modları için

$$\begin{aligned}
\nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{H}_{\perp} \times \mathbf{z}) &= \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}_z + 2\gamma \mathbb{E}_z] \\
(\nabla_{\perp} \times \mathbf{z} \mathbb{E}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_{\perp} \\
\nabla_{\perp} \cdot \mathbb{E} + \partial_z \mathbb{E}_z &= \hat{\rho}_{\perp} + \mathbf{z} \hat{\rho}_{\perp} \\
\mathbb{E}_z|_L &= 0 \\
\mathbf{l} \cdot \mathbb{E}|_L &= 0 \\
\mathbf{n} \cdot \mathbb{H}|_L &= 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

denklemleri elde edilir. Burada ilk denklem, (4.7)'de görülen skaler denklemdir, ikinci denklem, (4.10)'daki vektör denklemdir, üçüncü denklemin enine-boyuna ayrışımı yapılmış diverjans denkleminde geldiği görülebilir

$$\nabla \cdot \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) = \hat{\rho} \rightarrow \nabla_{\perp} \cdot \mathbb{E} + \partial_z \mathbb{E}_z = \hat{\rho}_{\perp} + \mathbf{z} \hat{\rho}_{\perp}. \tag{4.15}$$

(4.14)'te kalan son üç denklem ise sınır koşullarından gelmektedir.

Kolay anlaşılır olması amacıyla  $E_z$  elemanı sol yanda toplanarak denklem (4.14) yeniden düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{E}_z + 2\gamma \frac{1}{c} \mathbb{E}_z &= \nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{H}_{\perp} \times \mathbf{z}) \\
\nabla_{\perp} \mathbb{E}_z &= \partial_z \mathbb{E}_{\perp} - \frac{1}{c} \partial_t [\mathbf{z} \times \mathbb{H}_{\perp}] \\
\partial_z \mathbb{E}_z - \mathbf{z} \hat{\rho}_{\perp} &= -\nabla_{\perp} \cdot \mathbb{E} + \hat{\rho}_{\perp} \\
\mathbb{E}_z|_L &= 0 \\
\mathbf{l} \cdot \mathbb{E}|_L &= 0 \\
\mathbf{n} \cdot \mathbb{H}|_L &= 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

denklem seti elde edilir.

## 5. ZAMAN DOMENİ TE MODLARI

### 5.1. Vektörel Modal Baz

*TE* Modları ile çalışılırken denklem (4.13)'te ifade edilen  $H_z$  elemanını barındıran denklem grubu kullanılmalıdır. (4.13)'te görülen sınır koşulları enine elemanı

$$\mathbb{H}'_{\perp}(\mathbf{r}, z, t) = \mathcal{I}'(z, t) [\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r})] \quad (5.1)$$

olarak kullanmamız gerektiğini söylemektedir. Buradaki, potansiyel  $\Psi(\mathbf{r})$  ve genlik faktörü  $\mathcal{I}'(z, t)$  bulunması gereken bilinmeyen elemanlardır.  $[\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r})]$  ifadesinin sınır koşullarını sağladığı

$$\mathbf{n} \cdot [\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r})] \Big|_L \equiv \partial_{\mathbf{n}} \Psi(\mathbf{r}) \Big|_L = 0 \quad (5.2)$$

şeklinde denklem (5.1)'in sınır koşulunda yerine yerleştirilmesi sonucunda gösterilebilir.

Elektrik alan elemanının enine ifadesi  $\mathbb{E}'_{\perp}(\mathbf{r}, z, t)$  manyetik ifadeye benzer bir şekilde yazılabilir

$$\mathbb{E}'_{\perp}(\mathbf{r}, z, t) = \mathcal{V}'(z, t) [\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}]. \quad (5.3)$$

Denklem (5.3)'teki  $\mathcal{V}'(z, t)$  büyüklüğü bulunması gereken bir düğeri büyüklük olarak denklemde yer almaktadır.  $[\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \cdot \mathbf{l}$  ifadesi incelenirse

$$[\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \cdot \mathbf{l} = [\mathbf{z} \times \mathbf{l}] \cdot \nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \quad (5.4)$$

şeklindeki eşitliğin elde edileceği görülebilir. (5.4)'deki ifadenin (5.2) denklemindeki ifade ile aynı olduğu görülebilir.

$\mathbb{H}_z(\mathbf{r}, z, t)$  elemanı da enine ifadelerle benzer bir şekilde ETEY yöntemi gereğince

$$\mathbb{H}_z(\mathbf{r}, z, t) = A(z, t)[\Psi(\mathbf{r})] \quad (5.5)$$

olarak yazılırsa görüleceği üzere  $A(z, t)$  elemanı da bir diğer bilinmeyen ifade olarak ortaya çıkmaktadır. Problemin çözümü için, elde edilen tüm bilinmeyen elemanların sonradan hesaplanması gerekmektedir.

Bilinmeyen genlik faktörleriyle denklem (5.1), (5.3) ve (5.5)'te ifade edilmiş olan  $\mathbb{H}'_{\perp}$ ,  $\mathbb{E}'_{\perp}$  ve  $\mathbb{H}'_z$  alan bileşenleri, Maxwell denklemlerinin TE Modlarında kullanılmak için düzenlenen (4.13)'deki ikinci ve üçüncü denklemlerinde ilgili yerlerine yazılabilir. Bu yerleştirme sonucunda

$$\begin{aligned} \partial_{ct} A(z, t)[\Psi(\mathbf{r})] &= -\mathcal{V}'(z, t)[-\nabla_{\perp}^2 \Psi(\mathbf{r})] \\ \partial_z A(z, t)[\Psi(\mathbf{r})] &= \mathcal{I}'(z, t)[-\nabla_{\perp}^2 \Psi(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (5.6)$$

denklemleri elde edilir. Burada  $\partial_{ct} = (1/c)\partial_t$  ve  $[\mathbf{z} \times [\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}]] = \nabla_{\perp}^2 \Psi(\mathbf{r})$  özdeşlikleri kullanılmıştır.

Sınır koşulu ve (5.6)'daki  $[-\nabla_{\perp}^2 \Psi(\mathbf{r})]$  ifadesi, Neumann sınır koşulunu işaret etmekte

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \Psi_n(\mathbf{r}) + \nu_n^2 \Psi_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_n(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in L} &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

olarak tanımlanan Neumann sınır değer probleminin çözülmesi gerektiğini göstermektedir. Burada  $\nu_n^2$  özdeğer,  $\Psi_n(\mathbf{r})$  özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları belirtir,  $n = 1, 2, \dots$ . Denklem (5.7)'de görüldüğü üzere, eşitlikte belirtilen sınır koşulu homojendir; yani sağ yanı sıfırdır. (5.7) için boyut analizi

yapıldığında  $\Psi_n(\mathbf{r})$  elamanının fiziksel boyutunun bu aşamada önemli olmadığı görülmektedir. Yapı homojen olduğundan,  $\mathcal{N}'_n$ , ölçeklendirme katsayısı olmak üzere  $\Psi_n(\mathbf{r})$  elamanı

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \mathcal{N}'_n \psi(\mathbf{r}) \quad (5.8)$$

olarak ölçeklendirilsin. (5.8)'deki  $\mathcal{N}'_n$  ölçeklendirme katsayısının bütün fiziksel boyut özelliklerini üzerinde taşıdığı belirtilecek olursak, ölçeklendirilmiş  $\psi$  elemanı boyutsuz bir eleman olur. Ölçeklendirilmiş Neumann sınır değer problemi

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \psi_n(\mathbf{r}) + \nu_n^2 \psi_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \in L} &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

olarak yazılabilir. Normalizasyon koşulu

$$\frac{\mathcal{N}'_n}{S} \int_S |\psi_n(\mathbf{r})|^2 ds = N \rightarrow \mathcal{N}'_n = \sqrt{N / \frac{1}{S} \int_S |\psi_n(\mathbf{r})|^2 ds} \quad (5.10)$$

şeklinde belirtilebilir. Burada  $S$  dalga kılavuzunun enine kesit domenidir. (5.10)'da görülebileceği gibi, normalizasyon koşulunda sağ yan  $1N$ , yani  $1 \text{ Newton}$ 'a eşittir. Burada  $N$  kuvvet birimini temsil etmektedir. (5.10) için boyut analizi yapılırsa  $\mathcal{N}'_n$ ,  $\nu_n^{-1} N^{1/2}$  fiziksel boyutunda olduğu görülür.

(5.9)'daki normalize çözümler  $\{\psi_n(\mathbf{r})\}_{n=0}^{\infty}$ , Hilbert uzayını tanımlayıp ortonormal olduklarından daha önceden potansiyel olarak ifade edilmiş olan  $\Psi(\mathbf{r})$  yerine kullanılabilir. (5.7)'de  $\psi_n(\mathbf{r})$  ifadesi  $\Psi(\mathbf{r})$  yerine,  $-\nabla_{\perp}^2 \psi_n(\mathbf{r})$  ifadesi de  $\nu_n^2 \psi_n(\mathbf{r})$  yerine kullanıldığında

$$\begin{aligned}\mathcal{V}'_n(z,t) &= -\partial_{ct} h_n(z,t) \\ \mathcal{I}'_n(z,t) &= \partial_z h_n(z,t)\end{aligned}\tag{5.11}$$

genlikleri elde edilir.  $v_n^2 \neq 0$  durumunda, genlik faktörü  $A(z,t)$  şu şekilde ölçeklendirilebilir

$$A_n(z,t) = v_n h_n(z,t).\tag{5.12}$$

Denklem (5.12) ile birlikte  $A_n(z,t)$  genliği,  $h_n(z,t)$  bilinmeyeni ile ifade edilmiş olduğu görülebilir.

Denklem (5.1), (5.3) ve (5.5)'te  $\psi_n(\mathbf{r})$  ifadesi  $\Psi(\mathbf{r})$  yerine,  $v_n h_n(z,t)$  ifadesi de  $A$  yerine yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned}\mathbb{H}'_{\perp n}(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{I}'_n(z,t) \mathcal{N}'_n[\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r})] \\ \mathbb{E}'_{\perp n}(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{V}'_n(z,t) \mathcal{N}'_n[\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \\ \mathbb{H}'_{zn}(\mathbf{r}, z, t) &= h_n(z,t) \mathcal{N}'_n[v_n \psi_n(\mathbf{r})]\end{aligned}\tag{5.13}$$

denklemleri elde edilmiş olur. Denklemlerdeki  $\mathcal{I}'_n(z,t)$  ve  $\mathcal{V}'_n(z,t)$  modal genlik elemanları, (5.11)'deki eşitlikler ile açık olarak ifade edilebilirler

$$\begin{aligned}\mathcal{V}'_n(z,t) &= -\frac{\partial}{v_n c \partial t} h_n(z,t) \\ \mathcal{I}'_n(z,t) &= \frac{\partial}{v_n \partial z} h_n(z,t).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Bu aşamadan sonra bilinmeyen olarak sadece  $h_n(z,t)$ 'nin kaldığı görülebilir. Diğer bulunması gereken ifadeler  $h_n(z,t)$  türünden gösterilmişlerdir.

## 5.2. TE Modal Alanlar

(5.13)'de tanımlanan denklemlere bakılarak,  $\mathbf{r}$  değişkenine bağlı yeni bir vektör fonksiyon grubu tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}h'_n(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}'_n \nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \\e'_n(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}'_n [\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \\Z'_n(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}'_n v_n \psi_n(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{5.15}$$

Burada  $h'_n(\mathbf{r})$  ve  $e'_n(\mathbf{r})$  iki bileşenli enine vektörler,  $Z'_n(\mathbf{r})$  ise tek bileşenli  $Oz$  eksenine doğrultusunda bir vektördür. (5.15) ile birlikte oluşturulan bu yeni denklem grubu, dalga kılavuzu enine kesit domeni  $S$  içerisinde bir modal baz oluşturur.

TE modal alanları, (5.15) ile birlikte

$$\begin{aligned}\mathbb{H}'_n(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{I}'_n(z, t) h'_n(\mathbf{r}) + \mathbf{z} h_n(z, t) Z'_n(\mathbf{r}) \\ \mathbb{E}'_n(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{V}'_n(z, t) e'_n(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{5.16}$$

şeklinde tanımlanabilir. (5.14)'de görülebileceği gibi  $\mathcal{I}'_n(z, t)$  ve  $\mathcal{V}'_n(z, t)$  genlik ifadelerinin  $h_n(z, t)$  türünden yazılmasının ardından, (5.16) denklemlerinde bilinmeyen olarak sadece  $h_n(z, t)$  modal genlik elemanı kalmıştır. Bu nedenle  $h_n(z, t)$  boyutsuz modal genlik elemanı olarak bulunduğu geriye kalan  $\mathcal{I}'_n(z, t)$  ve  $\mathcal{V}'_n(z, t)$  ifadeleri de boyutsuz modal genlikler olarak elde edilmiş olacaktır.

## 5.3. Klein-Gordon Denklemi

(5.16)'da TE modal alan ifadelerini bulmak için  $h_n(z, t)$  modal genlik elemanını tanımlayacak bir denklem bulunması gereklidir. Bu tanımlı yapabilecek denklemi elde etmek için (5.16)'da tanımlanan modal alan ifadelerini, (4.13)'te

toparlanan TE Modları denklem grubundaki ilk denklemde ilgili yerlerine koyulması yeterlidir. Yerine koyma işlemi sonucunda

$$\nabla_{\perp} \mathbb{H}'_{nz} = \partial_z \mathbb{H}'_{\perp n} + \frac{1}{c} \partial_t [\mathbf{z} \times \mathbb{E}'_{\perp n}] + 2\gamma \frac{1}{c} [\mathbf{z} \times \mathbb{E}'_{\perp n}] \quad (5.17)$$

eşitliği elde edilir. (5.15)'te ortaya koyulan modal baz elemanları da kullanılarak elde edilen denklem (5.17)'de gerekli değişiklikler yapıldığında,

$$v_n h_n \nabla_{\perp} \psi_n = (\partial_z \mathcal{I}'_n) \nabla_{\perp} \psi_n + \left( \frac{1}{c} \partial_t \mathcal{V}'_n \right) [\mathbf{z} \times [\nabla_{\perp} \psi_n \times \mathbf{z}]] + 2\gamma \frac{1}{c} \mathcal{V}'_n [\mathbf{z} \times [\nabla_{\perp} \psi_n \times \mathbf{z}]] \quad (5.18)$$

eşitliği elde edilir.  $[\mathbf{z} \times [\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}]]$  ifadesi  $\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r})$  şeklinde sonuçlanacağından, ilgili düzenleme yapıldığında

$$v_n h_n \nabla_{\perp} \psi_n = (\partial_z \mathcal{I}'_n) \nabla_{\perp} \psi_n + \left( \frac{1}{c} \partial_t \mathcal{V}'_n \right) \nabla_{\perp} \psi_n + 2\gamma \frac{1}{c} \mathcal{V}'_n \nabla_{\perp} \psi_n \quad (5.19)$$

denklemini elde edilir. Sadeleştirme yapıp  $\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r})$  ifadeleri denklem içerisinde elenirse

$$v_n h_n \nabla = (\partial_z \mathcal{I}'_n) + \left( \frac{1}{c} \partial_t \mathcal{V}'_n \right) + 2\gamma \frac{1}{c} \mathcal{V}'_n \quad (5.20)$$

elde edilir. (5.20)'deki  $v_n$  terimi, eşitliğin diğer tarafına gönderildiğinde

$$h_n(z, t) = \frac{\partial}{v_n \partial z} \mathcal{I}'_n + \frac{\partial}{v_n c \partial t} \mathcal{V}'_n + 2 \frac{\gamma}{v_n c} \mathcal{V}'_n \quad (5.21)$$

sonucuna ulaşılır. (5.14)'teki  $\mathcal{I}'_n(z, t)$  ve  $\mathcal{V}'_n(z, t)$  modal genliklerini  $h_n$  türünden tanımlayan denklemler son oluşturulan eşitlik (5.21)'de yerlerine yerleştirildiğinde

$$h_n(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} h_n - \frac{\partial}{\partial ct} \frac{\partial}{\partial ct} h_n - 2 \frac{\gamma}{v_n c} \frac{\partial}{\partial ct} h_n \quad (5.22)$$

$h_n(z,t)$  modal genlik elemanınım çok genel olarak tanımını elde edilir.

Burada, boyutsuz zaman  $\tau = v_n ct$  ve boyutsuz  $z$   $\xi = v_n z$  olarak iki yeni değişken tanımlanabilir. Ayrıca boyutsuz kayıp parametresi  $\tilde{\rho} = \gamma / v_n c$  olarak tanımlanır ve  $\partial_\tau = \partial / \partial \tau$ ,  $\partial_\xi = \partial / \partial \xi$  gösterimi benimsenirse, denklem (5.22) düzenlenip

$$\partial_\tau^2 h_n(\xi, \tau) - \partial_\xi^2 h_n(\xi, \tau) + 2\tilde{\rho} \partial_\tau h_n(\xi, \tau) + h_n(\xi, \tau) = 0 \quad (5.23)$$

şeklinde yazılabilir. Daha önce de belirtildiği gibi, matematikçiler zaman türevine sahip olan diferansiyel denklemleri evrimsel denklemler olarak nitelendirirler. Denklem (5.23)'te elde edilmiş olan konum ve zaman türevli denklem Klein-Gordon denkleminin (KGD) [3], Telegraf denkleminin ya da genelleştirilmiş dalga denkleminin olarak da adlandırılır.

Birinci dereceden zaman türevi denklem içerisinden,  $h_n(\xi, \tau) = e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n(\xi, \tau)$  eşitliği ilgili yerde kullanılarak kaldırılabilir. Öncelikle

$$\partial_\tau h_n = e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau \tilde{h}_n - \tilde{\rho} e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n \quad (5.24)$$

ifadesinin ikinci türevi alınarak

$$\partial_\tau^2 h_n = e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau^2 \tilde{h}_n - 2\tilde{\rho} e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau \tilde{h}_n + \tilde{\rho}^2 e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n \quad (5.25)$$

$\partial_\tau^2 h_n(\xi, \tau)$  ifadesi elde edilir.  $h_n(\xi, \tau) = e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n(\xi, \tau)$  eşitliği ve denklem (5.25) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau^2 \tilde{h}_n - 2\tilde{\rho} e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau \tilde{h}_n + \tilde{\rho}^2 e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n \\
& + 2\tilde{\rho} \left( e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau \tilde{h}_n - \tilde{\rho} e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau \tilde{h}_n \right) - \partial_\xi^2 e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n + e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n = 0
\end{aligned} \tag{5.26}$$

elde edilir.  $2\tilde{\rho}$  içeri dağıtıldığında

$$\begin{aligned}
& e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau^2 \tilde{h}_n - 2\tilde{\rho} e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau \tilde{h}_n + \tilde{\rho}^2 e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n + 2\tilde{\rho} e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau \tilde{h}_n \\
& - 2\tilde{\rho}^2 e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau \tilde{h}_n - \partial_\xi^2 e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n + e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n = 0
\end{aligned} \tag{5.27}$$

olduğu görülür. Eşitlikteki düzenlemeler yapıldığında

$$e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau^2 \tilde{h}_n + \tilde{\rho}^2 e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n - 2\tilde{\rho}^2 e^{-\tilde{\rho}\tau} \partial_\tau \tilde{h}_n - \partial_\xi^2 e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n + e^{-\tilde{\rho}\tau} \tilde{h}_n = 0 \tag{5.28}$$

ve sağ yan sıfır olduğundan eşitlikteki  $e^{-\tilde{\rho}\tau}$  ifadeleri kaldırıldığında

$$\partial_\tau^2 \tilde{h}_n + \tilde{\rho}^2 \tilde{h}_n - 2\tilde{\rho}^2 \partial_\tau \tilde{h}_n - \partial_\xi^2 \tilde{h}_n + \tilde{h}_n = 0 \tag{5.29}$$

halini alır. Bilinmeyen  $\tilde{h}_n(\xi, \tau)$  için KGD yeni formda

$$\partial_\tau^2 \tilde{h}_n(\xi, \tau) - \partial_\xi^2 \tilde{h}_n(\xi, \tau) + (1 - \tilde{\rho}^2) \tilde{h}_n(\xi, \tau) = 0 \tag{5.30}$$

şeklinde elde edilir.

Boyutsuz zaman ve boyutsuz konum;  $\tau = v_n ct$ ,  $\xi = v_n z$ , ifadeleri kullanılmadığında ise Klein-Gordon denklemi

$$\left( \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + v_n^2 \beta_n^2 \right) \tilde{h}_n(\xi, \tau) = 0 \tag{5.31}$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada  $\beta_n^2 = 1 - \gamma^2 / (v_n c)^2$  ve  $\gamma = \sigma / (2\epsilon_0)$  olarak kullanılmaktadır.

## 5.4. Evrimsel Denklemlerin TE Modları İçin Çözümü

Denklem (5.30)'da elde edilmiş olan KGD'nin çözümünüyle beraber, bilinmeyen  $h_n(z, t)$  modal genliklerinin zamanla değişimini elde etmek mümkündür. Bunun ardından bilinmeyen diğer  $\mathcal{I}'_n(z, t)$  ve  $\mathcal{V}'_n(z, t)$  modal genlikleri, (5.11)'de de görülebileceği gibi

$$\begin{aligned}\mathcal{V}'_n(z, t) &= -\frac{\partial}{v_n c \partial t} h_n(z, t) \equiv -\frac{\partial}{\partial \tau} h_n(\xi, \tau) \\ \mathcal{I}'_n(z, t) &= \frac{\partial}{v_n \partial z} h_n(z, t) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} h_n(\xi, \tau)\end{aligned}\tag{5.32}$$

$h_n$  modal genliklerinden faydalanılarak bulunabilirler.

## 5.5. Durum 1 İçin Gerçek Değerli Çözümler

KGD'nin dikkate değer simetri özellikleri, W.Jr. Miller tarafından grup teorisi kapsamında incelenmiştir [4]. Miller, değişkenlerin ayrıştırılması yöntemini kullanarak çeşitli yollarla problem çözümü sağlayan on bir adet "simetri durumu" bulmuştur. KGD, zaman-harmonik çözümüne denk gelen "durum 1" çerçevesinde çözüldüğünde, kompleks değerli eksponansiyel ifadelerin olduğu klasik zaman-harmonik yönteminin aksine gerçek değerli çözüm

$$h_n(z, t) = \sin(\omega t - \beta z + \mathcal{G}) \exp(-\alpha t)\tag{5.33}$$

olarak elde edilmektedir [4], [28]. Burada;  $\omega$  değişkeni frekans,  $\beta = \pm\sqrt{(w/c)^2 - v_n^2}$  ve  $\mathcal{G}$  ise gerçek değerli sayısal bir parametrelerdir.  $\mathcal{G}=0$  geçerlidir.  $\beta = 0$  kesim frekansını vermektedir.

## 5.6. Durum 2 İçin Gerçek Değerli Çözümler

Miller'in grup teorisi kapsamında değişkenlerine ayrıştırma yöntemine dayanarak bulmuş olduğu on bir simetri durumundan Durum 2 kullanılarak çözüm arandığında; Durum 1'in zaman-harmonik çözümünün aksine Durum 2 Bessel fonksiyonları türünden sonuç vermektedir. Durum 2 için gerçekte değerli sonuç

$$h_n(z, t) \equiv h_n^m(z, t) = \tilde{h}_n^m(z, t) \exp(-\alpha t) \quad (5.34)$$

şeklinde olur [4], [28]. Burada  $m = 0, 1, 2, \dots$  şeklinde yazılabilir. Durum 2 için  $h_n^m(z, t)$

$$h_n^m(z, t) = \left( \frac{ct - |z|}{ct + |z|} \right)^{m/2} J_m \left( v_n \beta_n \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \quad (5.35)$$

elde edilir.

## 6. ZAMAN DOMENİ TM MODLARI

### 6.1. Vektörel Modal Baz

TM modları ile çalışılırken kullanılması gereken denklem grubu (4.16)'da açıklanmış olan denklemlerdir. TE modlarında olduğu gibi, TM modları için de benzer bir metodoloji izlenebilir. (4.16)'daki denklem grubu içinde belirtilmiş olan sınır koşulları enine elemanın

$$\mathbb{E}_{\perp}''(\mathbf{r}, z, t) = \mathcal{V}''(z, t) [\nabla_{\perp} \Phi(\mathbf{r})] \quad (6.1)$$

şeklinde kullanılmasını önerir. Burada yer alan potansiyel  $\Phi(\mathbf{r})$  ve genlik faktörü  $\mathcal{V}''(z, t)$  bulunması gereken bilinmeyen elemanlardır. Manyetik alan elemanının enine ifadesi benzer şekilde

$$\mathbb{H}_{\perp}''(\mathbf{r}, z, t) = \mathcal{I}''(z, t) [\mathbf{z} \times \nabla_{\perp} \Phi(\mathbf{r})] \quad (6.2)$$

olarak yazılabilir. Denklem (6.2)'deki  $\mathcal{I}''(z, t)$  büyüklüğü bulunması gereken bir diğer büyüklüktür. Boyuna eleman  $\mathbb{E}_z$

$$\mathbb{E}_z = E(z, t) [\Phi(\mathbf{r})] \quad (6.3)$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $E(z, t)$ , diğer bilinmeyen elemanlar gibi daha sonra bulunacaktır.

Denklemler (6.1) ve (6.2) TM Modlarında kullanılmak üzere düzenlenen (4.16)'daki ilk denklemde ilgili yerlerine yazılırsa

$$\mathcal{I}''(z,t)\nabla_{\perp}^2\Phi(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{c}\partial_t E(z,t)+2\gamma\frac{1}{c}E(z,t)\right]\Phi(\mathbf{r}) \quad (6.4)$$

elde edilir. Burada,  $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$  olarak tanımlanır ve  $[\mathbf{z} \times [\nabla_{\perp}\Phi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}]] = \nabla_{\perp}\Phi(\mathbf{r})$  eşitliği kullanılmıştır.

$\mathbb{E}_z|_L = 0$  sınır koşulu,  $\Phi|_L = 0$  sonucuna ulaştırır. Bununla beraber (6.4)'teki  $\nabla_{\perp}^2\Phi(\mathbf{r})$  ifadesi birlikte düşünüldüğünde, Dirichlet sınır değer probleminin

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2\Phi_m(\mathbf{r}) + \kappa_m^2\Phi_m(\mathbf{r}) &= 0, \\ \Phi_m(\mathbf{r})|_L &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

çözülmesi gerektiği görülebilir. Burada  $\kappa_n^2$  özdeğer,  $\Phi_m(\mathbf{r})$  ilgili özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları belirtir,  $m = 1, 2, \dots$ .

(6.5)'te görüldüğü üzere, eşitlikte belirtilen sınır koşulu homojendir; yani sağ yanı sıfırdır. (6.5) için boyut analizi yapıldığında  $\Phi_m(\mathbf{r})$  elamanının fiziksel boyutunun bu aşamada önemli olmadığı görülür. Homojen bir yapı olduğundan,  $\mathcal{N}'_n$  ölçeklendirme katsayısı olmak üzere  $\Phi_m(\mathbf{r})$  elamanı

$$\Phi_m = \mathcal{N}'_m\phi_m \quad (6.6)$$

olarak ölçeklendirilsin. (6.6)'daki bu ölçeklendirme katsayısının bütün fiziksel boyut özelliklerini üzerinde taşıdığı belirtilecek olursa, ölçeklendirilmiş sonuç olan  $\phi$  elemanı boyutsuz bir eleman olur. Ölçeklendirilmiş Dirichlet sınır değer problemi,

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2\phi_m(\mathbf{r}) + \kappa_m^2\phi_m(\mathbf{r}) &= 0, \\ \phi_m(\mathbf{r})|_L &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

olarak yazılabilir. Normalizasyon koşulu

$$\frac{\mathcal{N}'_m}{S} \int_S |\phi_m(\mathbf{r})|^2 ds = N \rightarrow \mathcal{N}'_m = \sqrt{N / \frac{1}{S} \int_S |\phi_m(\mathbf{r})|^2 ds} \quad (6.8)$$

şeklinde belirtilebilir. (6.8) için boyut analizi yapılırsa  $\mathcal{N}'_m$ ,  $\kappa_n^{-1} N^{1/2}$  fiziksel boyutuna sahiptir.

$E(z, t)$  ile ifade edilen genlik elemanı da  $\kappa_n$  ile birlikte

$$E(z, t) = \kappa_m e_m(z, t) \quad (6.9)$$

olarak ölçeklendirilebilir. Denklem (6.9)'da görüldüğü gibi  $E(z, t)$  ifadesi, şu an için bilinmeyen  $e_m(z, t)$  ile ifade edilmektedir. (6.6)'daki ölçeklendirme ve (6.7)'deki Dirichlet sınır değer problemi kullanılıp, (6.3) ve (6.4)'teki  $\Phi(\mathbf{r})$  potansiyel ifadesi yerine  $\phi_m(\mathbf{r})$  öz fonksiyonları yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{zm}(\mathbf{r}, z, t) &= \kappa_m e_m \mathcal{N}'_m \phi_m(\mathbf{r}) \\ \mathcal{I}_m''(z, t) (-\kappa_m^2 \mathcal{N}'_m \phi_m(\mathbf{r})) &= \left[ \frac{1}{c} \partial_t \kappa_m e_m + 2\gamma \frac{1}{c} \kappa_m e_m \right] \mathcal{N}'_m \phi_m(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

elde edilir. Basit manipülasyonlar ile

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{zm}(\mathbf{r}, z, t) &= \kappa_m e_m \mathcal{N}'_m \phi_m(\mathbf{r}) \\ \mathcal{I}_m''(z, t) &= (-\kappa_m c)^{-1} [\partial_t e_m + 2\gamma e_m] \end{aligned} \quad (6.11)$$

denklemleri elde edilebilir. Böylece, bilinmeyen  $\mathbb{E}_{zm}(\mathbf{r}, z, t)$  ve  $\mathcal{I}_m''(z, t)$  ifadeleri,  $e_m(z, t)$  cinsinden ifade edilmiştir.

TM modları için kullanılan (4.16)'daki üçüncü denklem, şu an için bilinmeyen ifadeler olan  $\mathcal{V}''(z, t)$  ve  $e_m(z, t)$  arasında bir ilişki ortaya koymak için kullanılabilir. Normalizasyon koşulu ile birlikte

$$\mathcal{V}_m''(z,t) - \kappa_m^{-1} \partial_z e_m(z,t) + 2\gamma \int_0^t \left[ \mathcal{V}_m''(z,t') - \kappa_m^{-1} \partial_z e_m(z,t') \right] dt' \quad (6.12)$$

eşitliği elde edilir. Açıklayıcı olması açısından, denklem (6.12) içerisindeki integral ifadesi  $f(z,t)$  olarak ele alındığında; (6.12)'nin ilk parçasının  $\partial_t f(z,t)$  olduğu görülebilir. Bu bağlamda denklem (6.12) yeniden yazılırsa

$$\partial_t f(z,t) + 2\gamma f(z,t) = 0 \quad (6.13)$$

elde edilmiş olur. Uygun başlangıç koşulu ile  $f(z,t)$  için bir başlangıç değer problemi

$$\partial_t f(z,t) + 2\gamma f(z,t) = 0, \quad f(z,t)|_{t=0} \quad (6.14)$$

elde edilir. Bu başlangıç değer problemi çözüldüğünde  $f(z,t) \equiv 0$  olduğu görülür. Böylece

$$\mathcal{V}_m''(z,t) = \kappa_m^{-1} \partial_z e_m(z,t) \quad (6.15)$$

olarak yazılır.

$\mathcal{V}_m''(z,t)$ ,  $\mathcal{I}_m''(z,t)$  ve  $E(z,t)$  bilinmeyen ifadeleri  $e_m(z,t)$  cinsinden yazılmıştır. Bu sayede (6.1), (6.2) ve (6.3)'deki denklemler tekrardan yazılabilir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\perp m}''(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{V}_m''(z, t) \mathcal{N}_m'[\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})] \\ \mathbb{H}_{\perp m}''(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{I}_m''(z, t) \mathcal{N}_m'[\mathbf{z} \times \nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})] \\ \mathbb{E}_{zm}(\mathbf{r}, z, t) &= \kappa_m e_m \mathcal{N}_m' \phi_m(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Bu denklem seti;  $[\mathbf{z} \times [\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}]]$  ifadesi yerine  $[\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})]$  kullanılarak, TM modları için kullanılan (4.16)'daki grup denklemlerin ikincisinde ilgili yerlerine yerleştirildiğinde

$$\kappa_m e_m \mathcal{N}_m' \nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r}) = \partial_z \mathcal{V}_m''(z, t) \mathcal{N}_m' [\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})] + \frac{1}{c} \partial_t \mathcal{I}_m''(z, t) \mathcal{N}_m' [\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})] \quad (6.17)$$

elde edilir. Basitleştirme işlemlerinden sonra

$$\partial_z \mathcal{V}_m''(z, t) + c^{-1} \partial_t \mathcal{I}_m''(z, t) - \kappa_m e_m(z, t) = 0 \quad (6.18)$$

sonucuna ulaşılır. (6.11) de görülen  $\mathcal{I}_m''(z, t)$  ve (6.15) de açıklanmış olan  $\mathcal{V}_m''(z, t)$  ifadeleri burada yerlerine yerleştirildiğinde

$$\partial_z \kappa_m^{-1} \partial_z e_m + c^{-1} \partial_t (-\kappa_m c)^{-1} [\partial_t e_m + 2\gamma e_m] - \kappa_m e_m = 0 \quad (6.19)$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\kappa_m^{-1} \partial_z^2 e_m - c^{-2} (\kappa_m)^{-1} \partial_t^2 e_m - 2\gamma c^{-2} (\kappa_m)^{-1} \partial_t e_m - \kappa_m e_m = 0 \quad (6.20)$$

denklemine ulaşılır. Burada  $\partial_z^2 = \partial\partial / \partial z \partial z$  ve  $\partial_t^2 = \partial\partial / \partial t \partial t$  olarak kullanılmaktadır.

Denklem (6.20)'nin her iki tarafı  $-\kappa_m$  terimine bölüldüğünde

$$\kappa_m^{-2} \partial_z^2 e_m - (\kappa_m c)^{-2} \partial_t^2 e_m - 2\gamma (\kappa_m c)^{-2} \partial_t e_m - e_m = 0 \quad (6.21)$$

Klein-Gordon denklemi elde edilir. (6.21) denklemi Telegraf denklemi olarak da isimlendirilir [3]. Klein-Gordon denkleminin kolay görülebilir olması açısından denklem (6.21)

$$\partial_{\xi}^2 e_m - \partial_{\tau}^2 e_m - 2\hat{\gamma} \partial_{\tau} e_m - e_m = 0 \quad (6.22)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\tau = \kappa_m c t$  ve  $\xi = \kappa_m z$  ve  $\hat{\gamma} = \gamma (\kappa_m c)^{-1}$  kayıp parametresidir.

(6.16)'da tanımlanan denklemler ve Dirichlet sınır değer problemi

$$\begin{aligned} h_m''(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}_m' [\mathbf{z} \times \nabla_{\perp} \phi_n(\mathbf{r})] \\ e_m''(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}_m' \nabla_{\perp} \phi_n(\mathbf{r}) \\ Z_m''(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}_m' \kappa_m \phi_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

şeklinde modal bazı oluşturur.

## 6.2. TM Modal Alanlar

(6.23) ile tanımlanan modal baz elemanları incelendiğinde,  $h_m''(\mathbf{r})$  ve  $e_m''(\mathbf{r})$  iki bileşenli enine vektörler,  $Z_m''(\mathbf{r})$  ise tek bileşenli bir vektördür. TM modal alanları  $\tau = \kappa_m c t$  ve  $\xi = \kappa_m z$  ölçeklemeleri ile birlikte

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_m'' &= \mathcal{I}_m''(\xi, \tau) h_m''(\mathbf{r}) \\ \mathbb{E}_m'' &= \mathcal{V}_m''(\xi, \tau) e_m''(\mathbf{r}) + e_m(\xi, \tau) Z_m''(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.24)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Denklem (6.22)'de elde edilmiş olan KGD'nin çözümüyle beraber, bilinmeyen  $e_m$  elde edilir. Bunun ardından, bilinmeyen diğer  $\mathcal{I}_m''(z, t)$  ve  $\mathcal{V}_m''(z, t)$  modal genlikleri

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_m''(z,t) &= -\frac{\partial}{v_n c \partial t} e_m(z,t) \equiv -\frac{\partial}{\partial \tau} e_m(\xi, \tau) \\ \mathcal{I}_m''(z,t) &= \frac{\partial}{v_n \partial z} e_m(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} e_m(\xi, \tau)\end{aligned}\tag{6.25}$$

$e_m$  modal genliklerinden faydanılarak bulunabilirler.

### 6.3. Durum 1 İçin Gerçek Değerli Çözümler

TM modları için KGD, Miller'ın zaman-harmonik çözümüne denk gelen "durum 1" kapsamında çözüldüğünde kompleks değerli eksponansiyel ifadelerin olduğu klasik zaman-harmonik yönteminin aksine gerçek değerli çözüm

$$e_m(z,t) = \sin(\omega t - \beta z + \mathcal{G}) \exp(-\alpha t)\tag{6.26}$$

olarak elde edilmektedir [4], [28]. Burada;  $\omega$  değişkeni frekans,  $\beta = \pm \sqrt{(w/c)^2 - v_n^2}$  ve  $\mathcal{G}$  ise gerçek değerli sayısal bir parametrelerdir.  $\mathcal{G}=0$  geçerlidir.  $\beta=0$  kesim frekansını vermektedir.  $e_m$  ifadesinin elde edilmesiyle beraber tam sonuç için gerekli olan diğer modal genlik ifadeleri de (6.25)'ten bulunabilirler.

### 6.4. Durum 2 İçin Gerçek Değerli Çözümler

Miller'ın on bir simetri durumundan Durum 2 uygulanarak çözüm arandığında Bessel fonksiyonları türünden ifade edilen

$$e_m(z,t) \equiv e_m^k(z,t) = \tilde{e}_m^k(z,t) \exp(-\alpha t)\tag{6.27}$$

gerçek değerli sonuç elde edilir [4], [28]. Burada  $k = 0,1,2,\dots$  şeklinde yazılabilir.

Durum 2 çözümünde  $e_m^k(z,t)$

$$e_m^k(z, t) = \left( \frac{ct - |z|}{ct + |z|} \right)^{k/2} J_k \left( \kappa_m \beta_m \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \quad (6.28)$$

olarak kullanılmaktadır.

## 7. ENERJİ ÖZELLİKLERİ

### 7.1. Poynting Vektörü ve Enerji Yoğunluğu

Uzayda yayılırken enerji taşıma özelliğine sahip elektromanyetik dalgalar için enerji akış oranı

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = [\mathcal{E} \times \mathcal{H}] \quad (7.1)$$

şeklinde Poynting vektörü ile ifade edilebilir. İlk olarak 1884 yılında John Henry Poynting tarafından ifade edilen ve kendisinin adıyla anılan bu tanımın, birçok kaynak tarafından elektromanyetik güç akışının iyi bir tanımlaması olduğu düşünülmektedir. Oliver Heaviside'in de bu vektörü, J. H. Poynting'den bağımsız olarak kendi çalışmalarında elde ettiği bilinmektedir.

Birçok kaynak (7.1)'deki Poynting vektörünün, elektromanyetik dalgadaki güç akışı konseptini açıkladığını belirtmektedir.  $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$  vektörünün büyüklüğü, dalga yayılma yönüne dik olan birim alandan akan enerji oranını gösterir (alan başına zamana göre enerji); yani  $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$ , "birim alan başına güç" ifadesini açıklar.  $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$  vektörünün yönü de elektromanyetik dalganın yayılma yönüyle aynıdır. (2.5)'de görülen ölçeklendirilme işlemi uygulanmış olan alan vektörleri kullanılarak güç akış yoğunluğunu (Poynting vektörünü) tanımlayan denklem oluşturulduğunda

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = [\mathcal{E} \times \mathcal{H}] = Nc [\mathbb{E} \times \mathbb{H}] \equiv \mathbb{S}(\mathbf{r}, t) \quad (7.2)$$

elde edilir. Burada  $c$  ışık hızı,  $N$  ise *newton* kuvvet birimidir.  $\mathbb{S}$  güç akış yoğunluğunun fiziksel boyutunun  $[Nms^{-1}m^{-2}]$  olduğu görülebilir; ayrıca belirtilen boyutun standart tanım olan *watt /metre* 'ye karşılık geldiği gösterilebilir;  $[Nms^{-1}m^{-2}] = [Js^{-1}m^{-2}] = [Wm^{-2}]$ .

Enerji yoğunluğunun standart olarak tanımı

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} + \mu_0 \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}) \quad (7.3)$$

şeklinde ifade edilir. Poynting vektöründe olduğu gibi ölçeklendirilmiş alan vektörleri kullanılarak enerji yoğunluğu denklemi yeniden yazılırsa

$$\mathbb{W}(\mathbf{r}, t) = \frac{1N}{2}(\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} + \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}) \quad (7.4)$$

eşitliği elde edilir. Burada  $\mathbb{W}(\mathbf{r}, t)$  enerji yoğunluğunun boyutunun *joule / metre küp* olduğu kolayca görülebilir;  $[Nm^{-2}] = [Nmm^{-3}] = [Jm^{-3}]$ .

Elektromanyetik alan enerjisinin herhangi bir dalga kılavuzunun kesit alanındaki taşınma hızı  $\mathbb{V}(\mathbf{r}, t)$ , Umov teoremine göre [29] Poynting vektörü ve enerji yoğunluğu ile ilişkilidir ve (7.2)'deki güç akış yoğunluğu ve (7.3)'deki enerji yoğunluğu eşitlikleri türünden

$$\mathbb{V}(\mathbf{r}, t) = c \frac{\mathbb{S}(\mathbf{r}, t)}{\mathbb{W}(\mathbf{r}, t)} \quad (7.5)$$

olarak gösterilir.

## 7.2. TE Modları İçin Enerji Özellikleri

Hesaplamalarda kolaylık olması açısından; zaman  $t$  ve konum  $z$  değişkenleri yerine bunların boyutsuz karşılıkları olan  $\tau$  ve  $\xi$  değişkenleri;  $\tau = v_n ct$  ve  $\xi = v_n z$  şeklinde kullanılsın.

(7.2) ve (7.4)'te açıklanmış olan enerji özellikleri de (5.16)'daki modal genlikler yardımıyla tanımlanan elektrik ve manyetik alan vektörlerinden faydalanılarak dalga kılavuzunun kesit alanında ortalaması alındıktan sonra yeniden yazılacak olursa

$$\begin{aligned} S'_n &= Nc \left[ \mathcal{V}'_n(\tau, \xi) \mathcal{I}'_n(\tau, \xi) \right] \\ W(\mathbf{r}, t) &= \frac{1N}{2} \left( \mathcal{V}'_n{}^2(\tau, \xi) + \mathcal{I}'_n{}^2(\tau, \xi) + h_n^2(\tau, \xi) \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

şeklinde elde edilirler.

### 7.3. TM Modları İçin Enerji Özellikleri

TM Modları için de hesaplamaların kolaylığı açısından  $\tau = v_n ct$  ve  $\xi = v_n z$  eşitlikleri kullanılsın. (7.2) ve (7.4)'teki enerji özellikleri de, (6.24)'te ilgili modal genlikler yardımıyla tanımlanan elektrik ve manyetik alan vektörlerinden faydalanılarak dalga kılavuzunun kesit alanında ortalaması alındıktan sonra yeniden yazılacak olursa

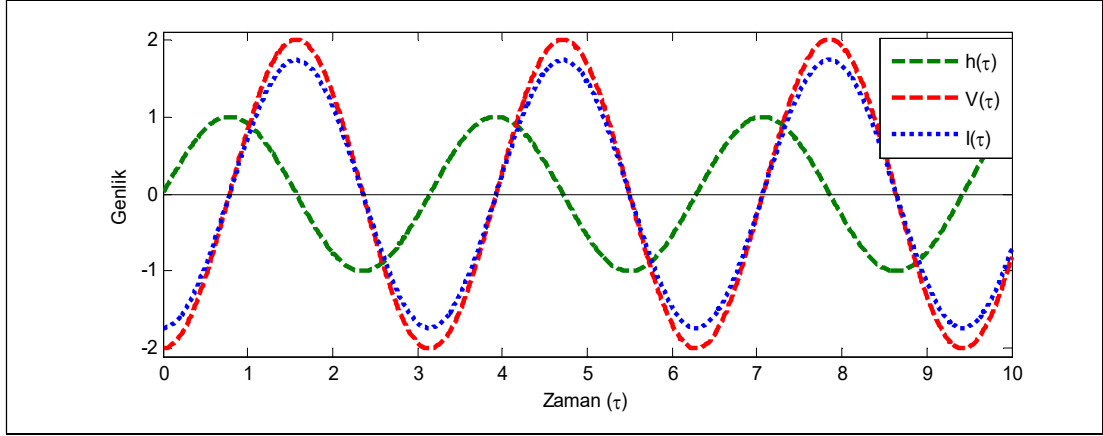
$$\begin{aligned} S'_n &= Nc \left[ \mathcal{V}'_m(\tau, \xi) \mathcal{I}'_m(\tau, \xi) \right] \\ W(\mathbf{r}, t) &= \frac{1N}{2} \left( \mathcal{V}'_m{}^2(\tau, \xi) + \mathcal{I}'_m{}^2(\tau, \xi) + e_m^2(\tau, \xi) \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

şeklinde ifade edilirler.

### 7.4. Enerji Özellikleri İçin Grafiksel Sonuçlar

Enerji özellikleri ile ilgili grafiklerin elde edilebilmesi için gerekli olan elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin modal genlikleri  $\mathcal{V}'_n(z, t)$  ve  $\mathcal{I}'_n(z, t)$  denklem (5.32),  $h_n(z, t)$  denklem (5.33),  $\mathcal{V}'_m(z, t)$  ve  $\mathcal{I}'_m(z, t)$  denklem (6.25),  $e_m(z, t)$  denklem (6.26) ile birlikte elde edilmiştir [30], [31].

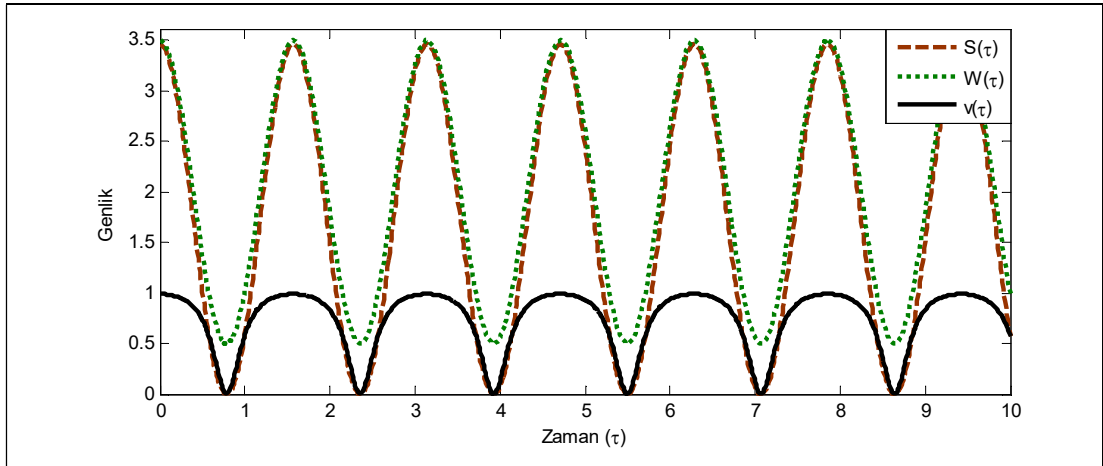
Öncelikle Miller'ın simetri durumlarından Durum 1'e ait sonuçlar TE modu için kayıpsız ortamda incelenebilir. Şekil 7.1'de TE modu modal genliklerin zamanla değişimi sergilenmektedir.



Şekil 7.1: Kayıpsız ortam için TE Modu modal genlikleri, (Durum 1).

Çözüm, Miller'ın Durum 1'i için incelenmiş olduğundan sonuç sinüzoidal formda elde edilmiştir.  $\mathcal{I}'_n(z,t)$  ve  $\mathcal{V}'_n(z,t)$  enine alan genliklerinin maksimum olduğu noktada  $h_n(z,t)$  boyuna alan genliğinin minimum olduğu grafikten görülmektedir.

Bölüm 7.2'de elde edilmiş olan formüller kullanılarak oluşturulan  $\mathcal{S}(\mathbf{r},t)$  güç akış yoğunluğu,  $\mathcal{W}(\mathbf{r},t)$  enerji yoğunluğu ve  $\mathcal{V}(\mathbf{r},t)$  enerji iletim hızının zamanla değişimine ilişkin grafik Şekil 7.2'de sergilenmiştir.

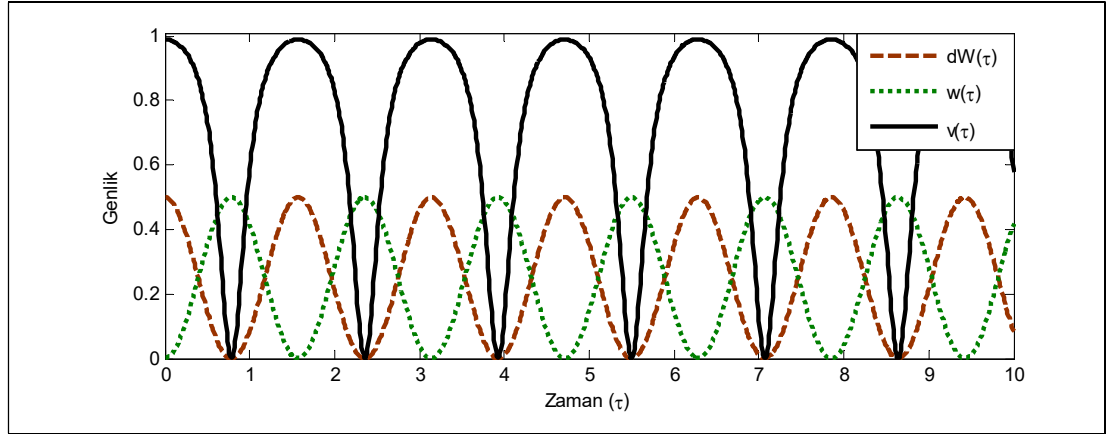


Şekil 7.2: Kayıpsız ortam için güç akış yoğunluğu, enerji yoğunluğu ve enerji iletim hızının zamanla değişimi, (Durum 1).

Şekil 7.2 incelendiğinde güç akış yoğunluğu ve enerji yoğunluğu ifadelerinin zamanla değişim gösterdiği görülmektedir.  $\mathcal{S}(\mathbf{r},t)$  Poynting vektörü, denklem (7.6)'da görülen  $\mathcal{V}'_n(\tau, \xi) \mathcal{I}'_n(\tau, \xi)$ , yani modal genliklerin çarpımına doğrudan bağlı

olduğundan bazı noktalarda sıfır olmaktadır. Enerji iletim hızının da aynı  $t$  anlarında sıfır olarak görülmesinin nedeni denklem (7.5) ile açıklanabilir. Enerji iletim hızının  $c$  ile normalize edilmiş halinin Şekil 7.2’de görüldüğü üzere hiçbir zaman ışık hızını geçmediği de görülmektedir.

Dalga kılavuzundaki enine ve boyuna alanların enerji yoğunluklarının zamanla değişimini inceleyerek, enerjinin korunumundan istifade ile, elde edilen sonuçların doğruluğunu incelemek mümkündür. Enine alanların enerji yoğunluğu  $dW'_n = \frac{1}{2}[\mathcal{V}_n'^2(\tau, \xi) - \mathcal{I}_n'^2(\tau, \xi)]$  olarak tanımlansın. Boyuna alanların enerji yoğunluğu ise  $w'_n = \frac{1}{2}h_n^2(\tau, \xi)$  ile ifade edilsin. Şekil 7.3’te görülen grafikte enine alanlar ile boyuna alanlar arasındaki enerji geçişi görülmektedir.



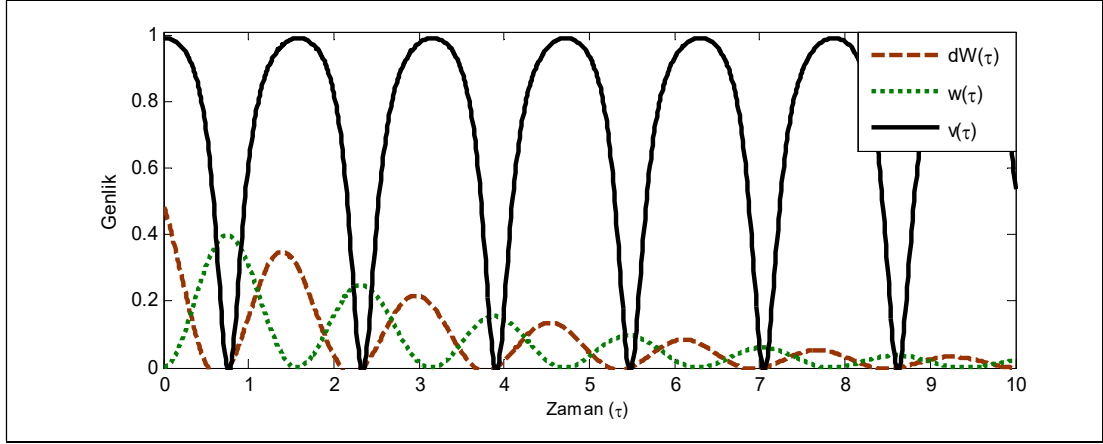
Şekil 7.3: Kayıpsız ortam için enine ve boyuna enerji yoğunlukları, (Durum 1).

Kayıpsız ortamda genlik maksimum değerinin zamanla azalmaksızın,  $dW'_n$  enine ve  $w'_n$  boyuna alanları arasındaki enerji değişimi Şekil 7.3’te görülmektedir. Şekil 7.2’deki enerji iletim hızının sıfır olduğu noktalarda enine alanların enerji yoğunluğunun sıfır olduğu da Şekil 7.3’te görülmektedir.

Şekil 7.4’te TE modu için modal genliklerin zamanla değişim grafiği kayıplı ortam durumu için gösterilmektedir.



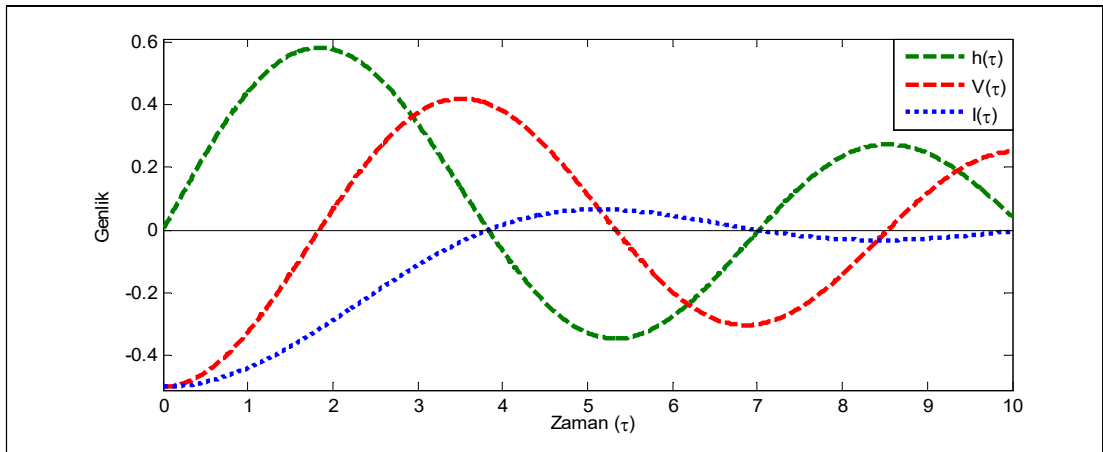
Şekil 7.3'te olduğu gibi dalga kılavuzundaki enine ve boyuna alanların enerji yoğunluklarının zamanla değişimini inceleyerek, enerjinin korunumundan istifade ile, elde edilen sonuçların doğruluğunu kayıplı durumlarda da incelemek mümkündür.



Şekil 7.6: Kayıplı ortamda enine ve boyuna enerji yoğunlukları, (Durum 1).

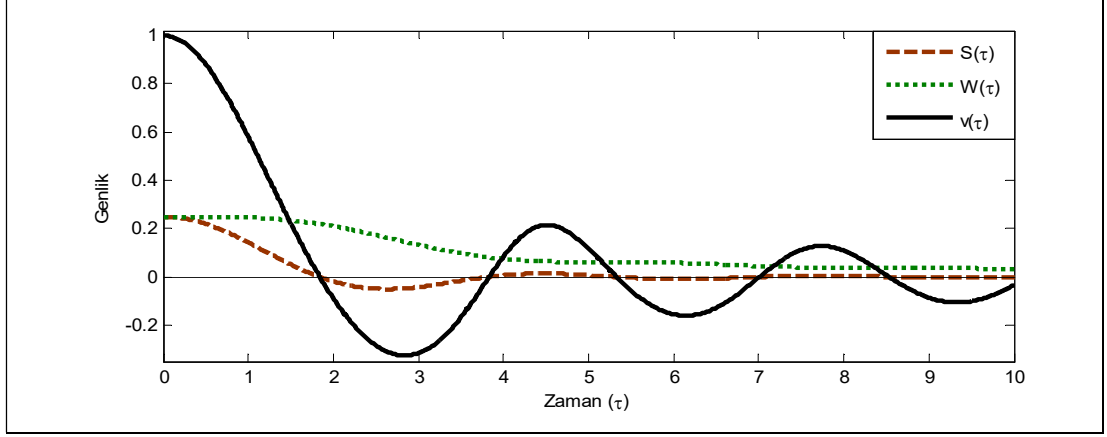
Şekil 7.6'dan enine alanlar için enerji yoğunluğu  $dW_n'$  ile boyuna alanlar için  $w_n'$  enerji yoğunluğu arasında enerji transferi olduğu görülmektedir. Kayıplı ortamdan dolayı toplam enerji zaman içerisinde azalmaktadır.

Miller'in simetri durumlarından ikincisi Bessel fonksiyonları türünden ifade edilen çözümdür. TE modlarına ait kayıpsız ortamda Durum 2 için Bessel fonksiyonları türünden elde edilen modal genliklerin zamanla değişimi Şekil 7.7'de sergilenmiştir.



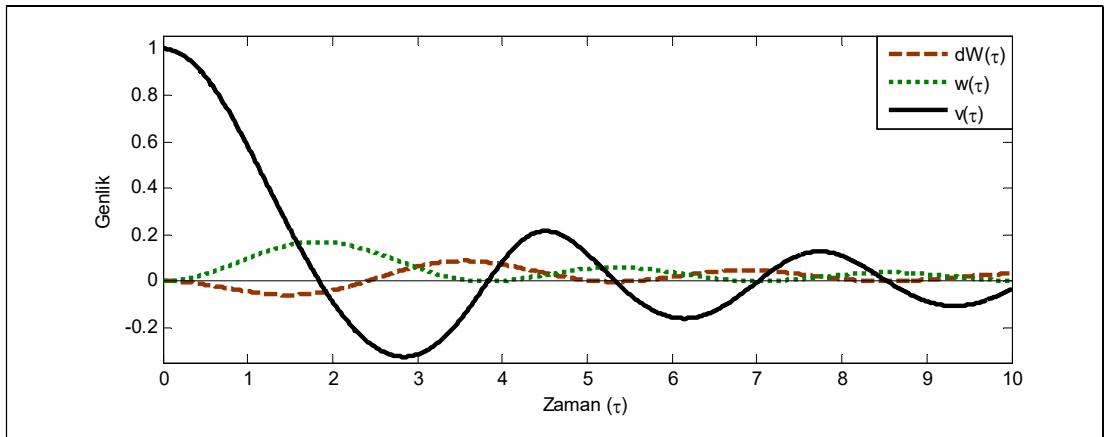
Şekil 7.7: Kayıpsız ortamda için TE Modu için modal genlikler, (Durum 2).

Durum 2 için  $\mathbb{S}(\mathbf{r},t)$  güç akış yoğunluğu,  $\mathbb{W}(\mathbf{r},t)$  enerji yoğunluğu ve  $\mathbb{V}(\mathbf{r},t)$  enerji iletim hızının yine Bessel fonksiyonları türünden elde edilen zamanla değişimleri Şekil 7.8’de sergilenmiştir.



Şekil 7.8: Kayıpsız ortamda güç akış yoğunluğu, enerji yoğunluğu ve enerji iletim hızının zamanla değişimi (Durum 2).

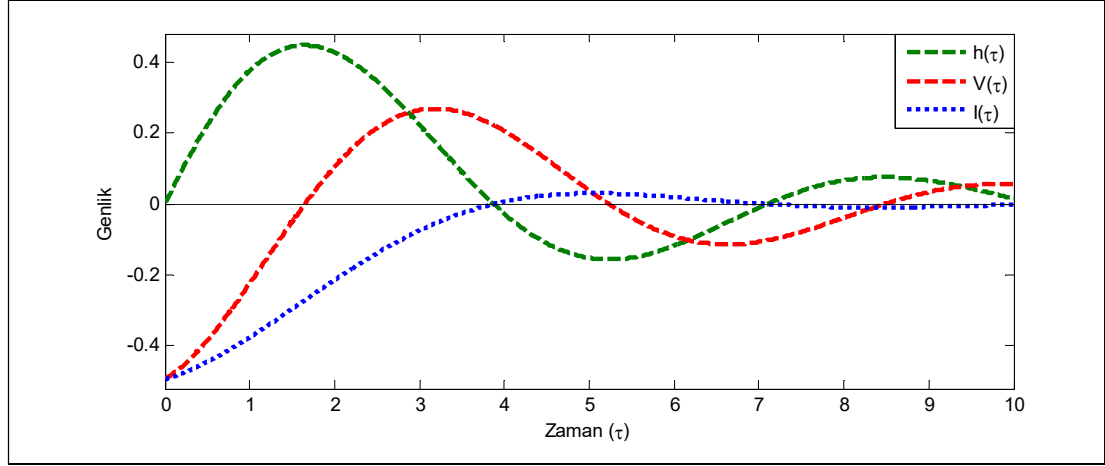
Şekil 7.8’de enerji iletim hızının belirli anlarda negatif olduğu görülmektedir. Denklem (7.6) ve Şekil 7.7’deki  $\mathcal{V}(\tau, \xi)$  ve  $\mathcal{I}(\tau, \xi)$ ’nin işaretlerinin birbirlerinden farklı oldukları anlarda  $\mathbb{S}(\tau, \xi)$  ve  $\mathbb{V}(\mathbf{r}, t)$ ’nin negatif elde edilmesi durumu; geriye yürüyen dalga osilatörlerindeki (Backward Wave Oscillator, BWO) durum ile benzerlik taşımaktadır. Geriye yürüyen dalga osilatörlerinde de elektromanyetik dalga bir yönde ilerlerken dalganın enerjisi ters yönde ilerlemektedir.



Şekil 7.9: Kayıpsız ortam için enine ve boyuna enerji yoğunlukları, (Durum 2).

Şekil 7.9’da Durum 2 için enerjinin enine alanlar ile boyuna alanlar arasındaki transferi kayıpsız ortam için sergilenmiştir.

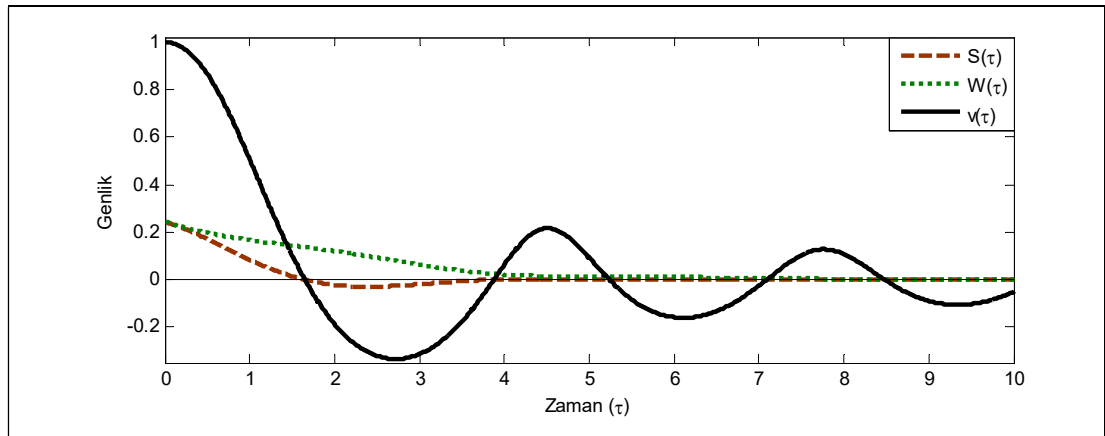
Kayıplı ortamda TE modu için Durum 2’ye ait modal alanların zamanla değişimi Şekil 7.10’da sergilenmiştir.



Şekil 7.10: Kayıplı ortamda TE modu için modal genlikler, (Durum 2).

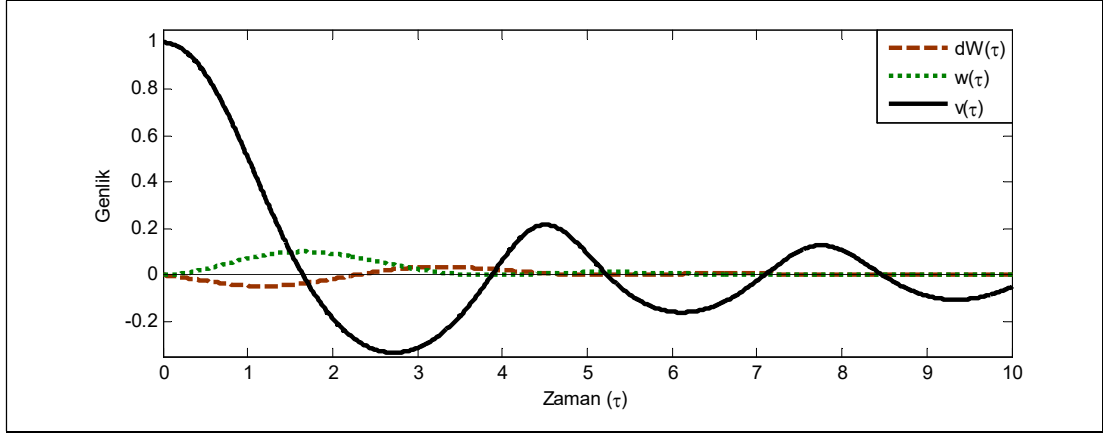
Durum 2 için Bessel fonksiyonları türünden elde edilen genliklerin aynı zamanda kayıplı ortam nedeniyle de zamanla azalmakta oldukları görülmektedir.

Kayıplı ortamda Durum 2’ye ait çözümden elde edilen  $S(\mathbf{r},t)$  güç akış yoğunluğu ve  $W(\mathbf{r},t)$  enerji yoğunluğunun da zamanla azaldıkları Şekil 7.11’de görülmektedir.



Şekil 7.11: Kayıplı ortamda güç akış yoğunluğu, enerji yoğunluğu ve enerji iletim hızının zamanla değişimi, (Durum 2).

Şekil 7.11’de kayıplı ortamın enerji özellikleri üzerindeki zayıflama etkisi görülmektedir. Ayrıca  $\nabla(\mathbf{r}, t)$  enerji iletim hızının ortamın kayıp parametresinden bağımsız olduğu da Şekil 7.11 Şekil 7.8 ile karşılaştırıldığında görülmektedir.



Şekil 7.12: Kayıplı ortam için enine ve boyuna enerji yoğunlukları, (Durum 2).

Şekil 7.12’de kayıplı ortam için Durum 2 çözümüne ilişkin  $dW'_n$  enine enerji bileşeni ile  $w'_n$  boyuna enerji bileşeni arasındaki enerji değişimi görülmektedir. Ancak ortamın kayıplı olması nedeniyle enerji yoğunluğu zaman içerisinde azalmaktadır.

## 8. MEKANİK ÖZELLİKLER

### 8.1. Mekanik Özellikler ve Gerçek Değerli Çözümler

SI birim sistemi içerisinde elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin aynı boyuta ( $[m^{-1}]$ ) sahip olarak elde edilmiş olmaları sayesinde, denklemler elektromanyetik dalgaların mekanik özelliklerini incelemeye uygun kolay hale getirilmiştir. Kaiser, yapmış olduğu çalışma içerisinde Maxwell denklemlerini Heaviside-Lorentz sisteminde kullanmış; elektrik ve manyetik alan vektörlerinin boyutlarının aynı olmasını ise kendi yaptığı **tanımlama** ile sağlamıştır [32]. Bu çalışma içerisinde ise aynı boyutlara sahip alan vektörleri **doğrudan** SI birim sisteminde (2.5)'te bulunmuştur. Kaiser çalışmasında, durağan enerji yoğunluğu (reaktif enerji yoğunluğu), moment ve açısal moment gibi konularda incelemeler yapmıştır. Kaiser, öncelikle elektromanyetik atalet yoğunluğu ifadesini elde ederek başlamış ve durağan enerji yoğunluğunu bularak çalışmasını devam ettirmiştir.

Bu tez çalışmasında elektromanyetik kütle ve momentum özelliklerini elde etmek amacıyla görelilik kuramı mekanikleri göz önünde bulundurularak Hamiltonian fonksiyonundan

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2} \quad (8.1)$$

faydalanılmaktadır [33]. Hamiltonian fonksiyonu, mekanik cisimlerin enerjisi ve momentumu arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Burada  $p$  momentum,  $m$  ise referans çerçevesindeki parçacık kütlesidir. Elektromanyetik kütle ve mekanik momentumun elde edilebilmesi için (8.1) kullanılarak, elektromanyetik dalgalara mekanik bir fonksiyon kazandırılmaktadır.

Öncelikle Kaiser'in önermiş olduğu  $R(\mathbf{r}, t)$ , durağan (rest) enerji yoğunluğuna ulaşmak için denklem (7.2)'de açıklanmış olan Poynting vektörü  $\mathbb{S}(\mathbf{r}, t)$  ve denklem (7.4)'te gösterilmiş olan enerji yoğunluğu  $\mathbb{W}(\mathbf{r}, t)$  ifadelerinden faydalanılmaktadır.

Poynting vektörü  $\mathbb{S}(\mathbf{r}, t)$ ,  $c$  ile normalize edildiğinde,  $\frac{\mathbb{S}}{c} = \mathbb{E} \times \mathbb{H}$  ifadesinin fiziksel

boyutunun  $\left[ \frac{W}{m^2} \frac{s}{m} = Jm^{-3} \right]$  olduğu görülmektedir. Burada önemli olan nokta enerji yoğunluğu  $\mathbb{W}(\mathbf{r}, t)$  ifadesi ve  $\frac{\mathbb{S}}{c} = \mathbb{E} \times \mathbb{H}$  ifadesinin fiziksel boyutları  $[Jm^{-3}]$  olduğudur. Fiziksel boyutların aynı olması sayesinde iki ifade matematiksel işlemlere alınabilir durumdadır.  $\frac{\mathbb{S}}{c} = \mathbb{E} \times \mathbb{H}$  karesi alındığında

$$\left( \frac{\mathbb{S}}{c} \right)^2 = (\mathbb{E} \times \mathbb{H})^2 = \mathbb{E}^2 \mathbb{H}^2 - (\mathbb{E} \cdot \mathbb{H})^2 \quad (8.2)$$

olduğu görülebilir. Burada  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$  olarak bilinen vektör eşitliğinden faydalanılmıştır [34].

Aynı şekilde enerji yoğunluğu  $\mathbb{W}(\mathbf{r}, t)$  ifadesinin karesi de

$$\mathbb{W}^2 = \left( \frac{1}{2} (\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} + \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}) \right)^2 \quad (8.3)$$

şeklinde elde edilmektedir. Kaiser'in yapmış olduğu gibi öncelikle

$$\mathbb{W}^2 - \left( \frac{\mathbb{S}}{c} \right)^2 = \left( \frac{1}{2} (\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} + \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}) \right)^2 - \mathbb{E}^2 \mathbb{H}^2 + (\mathbb{E} \cdot \mathbb{H})^2 \quad (8.4)$$

eşitliği elde edilmesi gerekmektedir. Eşitlik içerisindeki kare ifadesi açıldığında

$$\mathbb{W}^2 - \left( \frac{\mathbb{S}}{c} \right)^2 = \frac{1}{4} (\mathbb{E}^4 + \mathbb{H}^4 + 2\mathbb{E}^2 \mathbb{H}^2) - \mathbb{E}^2 \mathbb{H}^2 + (\mathbb{E} \cdot \mathbb{H})^2 \quad (8.5)$$

bulunmaktadır. Sadeleştirme işleminin ardından

$$\mathbb{W}^2 - \left( \frac{\mathbb{S}}{c} \right)^2 = \frac{1}{4} (\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2) + (\mathbb{E} \cdot \mathbb{H})^2 \quad (8.6)$$

olarak bulunur.  $R(\mathbf{r}, t)$ , Kaiser tarafından durağan enerji yoğunluğu (reaktif enerji yoğunluğu) olarak

$$R(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\mathbb{W}^2 - \left(\frac{\mathbb{S}}{c}\right)^2} = \frac{1}{4}(\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2) + (\mathbb{E} \cdot \mathbb{H})^2 \left[ Jm^{-3} \right] \quad (8.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır [32].

Kütle ile ilgili ifadenin elde edilmesi için denklem (8.1)'de görülen Hamiltonian fonksiyonunun durağan durumda, yani  $\mathbf{v} = 0$  olduğu durumda, incelenmesi gerekmektedir. Durağan  $\mathbf{v} = 0$  durumunda denklem (8.1) içerisinde görülen momentum ifadesi kaybolup Hamiltonian fonksiyonu,  $E = mc^2$  durumuna gelir. Denklem (8.1)'deki mekanik cisimlerin enerjisini ifade eden  $E$  yerine denklem (8.7)'da görülen elektromanyetik açıdan enerji ifadesi olan durağan enerji yoğunluğu,  $R(\mathbf{r}, t)$ , yerleştirildiğinde Hamiltonian fonksiyonunun,  $R = mc^2$  durumu elde edilir. Burada, elektromanyetik mekanik özelliklerinin ilki olan elektromanyetik kütle ifadesi,  $R(\mathbf{r}, t)$  durağan enerji yoğunluğuyla ilişkili elektromanyetik ataletin bir çeşit yorumu olarak tanımlanabilir

$$m(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r}, t) / c^2 = \frac{1}{2c_0^2} \sqrt{(\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2)^2 + 4(\mathbb{E} \cdot \mathbb{H})^2} \left[ kg / m^3 \right]. \quad (8.8)$$

Burada elektromanyetik kütle ifadesi ile ilgili önemli bir nokta göze çarpmaktadır. Denklem (8.8)'de görülen kütle denklemi elektromanyetik alan değişmezleri (invariants of electromagnetic field) olan  $\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2$  ve  $\mathbb{E} \cdot \mathbb{H}$  ifadelerinden başka eleman içermemektedir. Bu değişmezler, bütün referans sistemlerinde değişmeyen nicelikler olarak bilinmektedirler [33]. Dolayısıyla durağan  $\mathbf{v} = 0$  referans sisteminde elde edilen kütle denklemi (8.8), diğer tüm referans sistemlerinde geçerlidir.

Elektrik alan ile manyetik alan vektörlerinin birbirlerine dik olduğu durumda,  $(\mathbb{E} \cdot \mathbb{H}) = 0$  olacağından bu durumda elektromanyetik kütle incelenirse

$$m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2c_0^2} \sqrt{(\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2)^2} = \frac{1}{2c_0^2} |\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2| \quad (8.9)$$

şeklinde ifade edilir. Dalga kılavuzu içerisinde TE ve TM modları için elektrik alan ve manyetik alan vektörleri birbirlerine her durumda diktir; ancak bu vektörlerin hareket yönüne de dik olduğu söylenemez. Bu nedenle  $(\mathbb{E} \cdot \mathbb{H}) = 0$  olarak kullanılabilir.

Elektromanyetik momentum ifadesini elde etmek için tekrar Hamiltonian fonksiyonundan faydalanmak gereklidir. Hamiltonian fonksiyonu

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2 \quad (8.10)$$

formatında yazılıp bu eşitlik içerisinde momentum

$$p = \sqrt{\frac{1}{c^2} (E^2 - (mc^2)^2)} \quad (8.11)$$

olarak çekilir.  $E^2$  ifadesi yerine ikinci bir enerji kaynağı olarak denklem (8.2)'de görülen Poynting vektörü ile ilişkili enerji ifadesi  $\left(\frac{\mathbb{S}}{c}\right)^2 = \mathbb{E}^2 \mathbb{H}^2 - (\mathbb{E} \cdot \mathbb{H})^2$  ifadesi yerleştirilebilir. Elektromanyetik kütle ifadesi denklem (8.8)'de elde edilmiş olduğundan ve bu kütle ifadesi tüm referans sistemlerinde geçerli olduğundan  $mc^2$  yerine,  $R = mc^2$  kullanılır. Denklem (8.11)'de  $(mc^2)^2$  yerine  $(mc^2)^2 = \frac{1}{4} (\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2)^2 + (\mathbb{E} \cdot \mathbb{H})^2$  eşitliği koyulmak durumunda olur. Elektromanyetik momentum ifadesi gerekli yerleşimlerin ardından ilk olarak

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c_0} \sqrt{|\mathbb{E}|^2 |\mathbb{H}|^2 - \frac{1}{4} (\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2)^2 - (\mathbb{E} \cdot \mathbb{H})^2} \left[ kg \frac{m}{s} / m^3 \right] \quad (8.12)$$

şeklinde elde edilir. Elektrik alan ile manyetik alan vektörlerinin birbirlerine dik olduğu durumda,  $(\mathbb{E} \bullet \mathbb{H}) = 0$  olacağından bu durumda momentum ifadesi incelenirse

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c_0} \sqrt{|\mathbb{E}|^2 |\mathbb{H}|^2 - \frac{1}{4} (\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2)^2} \left[ kg \frac{m}{s} / m^3 \right] \quad (8.13)$$

olduğu görülmektedir.

TE modları için  $\mathbb{E}^2$  ve  $\mathbb{H}^2$  ifadeleri (5.16)'da görülen alan denklemleri kullanılarak elde edilmesi gerekmektedir. İlk olarak  $\mathbb{E}^2$

$$\mathbb{E}_n'^2 = \mathcal{V}_n' e_n' \cdot \mathcal{V}_n' e_n' = \mathcal{V}_n'^2 e_n' \cdot e_n' \quad (8.14)$$

olarak elde edilir. Burada görülen modal baz elemanı denklem (5.15)'te görüldüğü şekliyle yerine yerleştirildiğinde

$$\mathbb{E}_n'^2 = \mathcal{V}_n'^2 [\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \cdot [\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] = \mathcal{V}_n'^2 \nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \quad (8.15)$$

denklemine ulaşılır. İhtiyaç duyulan  $\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r})$  ifadesini elde etmek için öncelikle

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \cdot (\psi_n \nabla_{\perp} \psi_n) &= \nabla_{\perp} \psi_n \cdot \nabla_{\perp} \psi_n + \psi_n \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi_n \\ &= \nabla_{\perp} \psi_n \cdot \nabla_{\perp} \psi_n + \psi_n \nabla_{\perp}^2 \psi_n \end{aligned} \quad (8.16)$$

eşitliği elde edilir. Buradan ihtiyaç duyulan  $\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \psi_n \cdot \nabla_{\perp} \psi_n &= \psi_n (-\nabla_{\perp}^2 \psi_n) + \nabla_{\perp} \cdot (\psi_n \nabla_{\perp} \psi_n) \\ &= \psi_n^2 \nabla_{\perp}^2 + \nabla_{\perp} \cdot (\psi_n \nabla_{\perp} \psi_n) \end{aligned} \quad (8.17)$$

olarak bulunur. Bu sayede denklem (8.15)'ten

$$\mathbb{E}_n^{2'} = \mathcal{V}_n'^2 \mathcal{V}_n^2 \psi_n^2 + \mathcal{V}_n'^2 \nabla_{\perp} \cdot (\psi_n \nabla_{\perp} \psi_n) \quad (8.18)$$

oluşturulur. Dalga kılavuzu kesit alanında integral

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n'^2 &= \frac{1}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \mathbb{E}_n'^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \mathcal{V}_n'^2 \mathcal{V}_n^2 \psi_n^2 d\varphi + \frac{1}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \mathcal{V}_n'^2 \nabla_{\perp} \cdot (\psi_n \nabla_{\perp} \psi_n) d\varphi \end{aligned} \quad (8.19)$$

şeklinde gelir. Burada  $\mathcal{V}_n'^2 \mathcal{V}_n^2$  ifadesi integral dışına çıkarıldığında

$$\mathbb{E}_n'^2 = \mathcal{V}_n'^2 \frac{\mathcal{V}_n^2}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \psi_n^2 d\varphi + \mathcal{V}_n'^2 \frac{1}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \nabla_{\perp} \cdot (\psi_n \nabla_{\perp} \psi_n) d\varphi \quad (8.20)$$

denklemini görülür.  $\frac{\mathcal{V}_n^2}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \psi_n^2 d\varphi = 1$  olduğundan

$$\mathbb{E}_n'^2(t, z) = \mathcal{V}_n'^2 \quad (8.21)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde  $\mathbb{H}^2$  ifadesi de incelenebilir. İlk olarak

$$\mathbb{H}_n^2 = \mathcal{I}_n'^2 h_n' \cdot h_n' + h_n'^2 \mathcal{V}_n^2 \psi_n^2 \quad (8.22)$$

yazılır. Buradan  $h_n' \cdot h_n'$  ifadesi

$$h_n' \cdot h_n' = \nabla_{\perp} \psi_n \cdot \nabla_{\perp} \psi_n \quad (8.23)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (8.17) ile beraber kullanıldığında  $\mathbb{H}^2$  ifadesi

$$\mathbb{H}_n'^2 = \mathcal{I}_n'^2 h_n' \psi_n'^2 + h_n'^2 \mathcal{V}_n'^2 \psi_n'^2 + \mathcal{I}_n'^2 \nabla_{\perp} \cdot (\psi_n' \cdot \nabla_{\perp} \psi_n') \quad (8.24)$$

olarak elde edilir. İntegral işlemiyle dalga kılavuzu kesit alanında ortalama alındığında

$$\mathbb{H}_n'^2 = \frac{1}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \mathbb{H}_n'^2 d\varphi = (\mathcal{I}_n'^2 + h_n'^2) \frac{1}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \mathcal{V}_n'^2 \psi_n'^2 d\varphi \quad (8.25)$$

ve sonrasında

$$\mathbb{H}_n'^2 = (\mathcal{I}_n'^2 + h_n'^2) \frac{\mathcal{V}_n'^2}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \psi_n'^2 d\varphi \quad (8.26)$$

elde edilir. Buradan,  $\frac{\mathcal{V}_n'^2}{na^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \psi_n'^2 d\varphi = 1$  eşitliği ile birlikte  $\mathbb{H}^2$  ifadesi

$$\mathbb{H}_n'^2(t, z) = (\mathcal{I}_n'^2 + h_n'^2) \quad (8.27)$$

olarak elde edilir.

(8.21) ve (8.27) denklemleri, (8.9)'da yerine yerleştirildiğinde, elektromanyetik kütle denklemi

$$m(z, t) = \frac{1}{2c_0^2} \left| (\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2) \right| = \frac{1}{2c_0^2} \left| \mathcal{V}_n'^2 - (\mathcal{I}_n'^2 + h_n'^2) \right| \quad (8.28)$$

olarak bulunur.

Denklem (8.21)'deki elektrik alanın ifadesi modal genlikler ile birlikte

$$\mathbb{E}_n'^2(t, z) = \mathcal{V}_n'^2 = \left( \frac{\omega}{\mathcal{V}_n' c} \right)^2 \cos^2(\omega t - \beta z + \vartheta) \quad (8.29)$$

şeklinde elde edilmektedir. Benzer şekilde denklem (8.25)'teki manyetik alan ifadesi de

$$\mathbb{H}_n'^2(t, z) = (\mathcal{I}_n'^2 + h_n'^2) = \left( \left( \frac{\omega}{v_n c} \right)^2 - 1 \right) \cos^2(\omega t - \beta z + \mathcal{G}) + \sin^2(\omega t - \beta z + \mathcal{G}) \quad (8.30)$$

olarak bulunmaktadır.

Denklem (8.28)'de bulunan elektromanyetik kütle denklemindeki  $\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2$  ifadesi (8.29) ve (8.30) ile birlikte kullanılarak yazılacak olursa

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2 &= \left[ \left( \frac{\omega}{v_n c} \right)^2 - \left( \left( \frac{\omega}{v_n c} \right)^2 - 1 \right) \right] \cos^2(\omega t - \beta z + \mathcal{G}) - \sin^2(\omega t - \beta z + \mathcal{G}) \\ &= \cos^2(\omega t - \beta z + \mathcal{G}) - \sin^2(\omega t - \beta z + \mathcal{G}) \end{aligned} \quad (8.31)$$

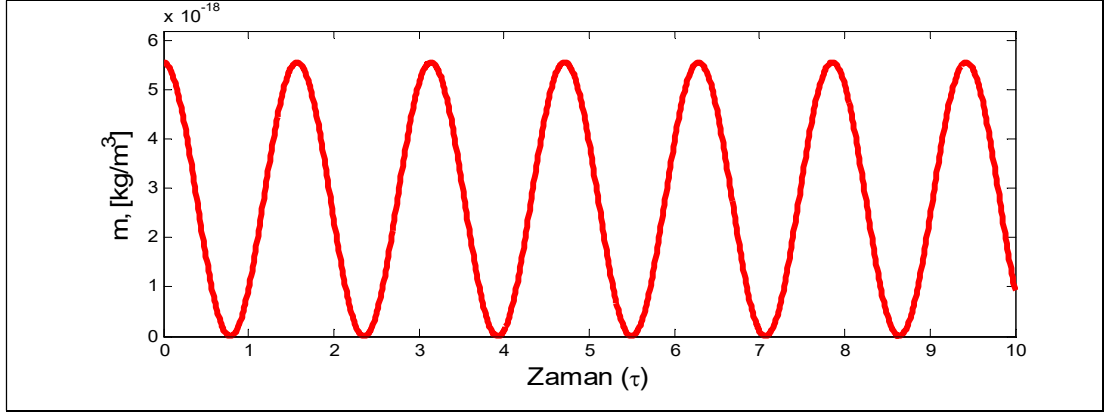
elde edilir. Buradan  $\Theta(z, t) = \omega t - \beta z + \mathcal{G}$  ile birlikte düzenleme yapılacak olursa

$$\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2 = \cos^2(\Theta) - \sin^2(\Theta) = \cos(2\Theta) \quad (8.32)$$

şeklinde oluşturulmuş olur. Denklem (8.32) kullanılarak elektromanyetik kütle denklemini (8.28) düzenlenirse

$$\begin{aligned} m(z, t) &= \frac{1}{2c_0^2} \left| (\mathbb{E}^2 - \mathbb{H}^2) \right| = \frac{1}{2c_0^2} \left| \cos(2\Theta) \right| \\ &= \frac{1}{2c_0^2} \left| \cos[2(\omega t - \beta z + \mathcal{G})] \right| \end{aligned} \quad (8.33)$$

şeklinde geçek değerli sonuçlar elde edilir. Şekil 8.1'de kayıpsız ortamda elektromanyetik kütle zamanla değişimi grafiksel olarak sergilenmiştir.



Şekil 8.1: Kayıpsız ortamda elektromanyetik kütleinin zamanla değişimi.

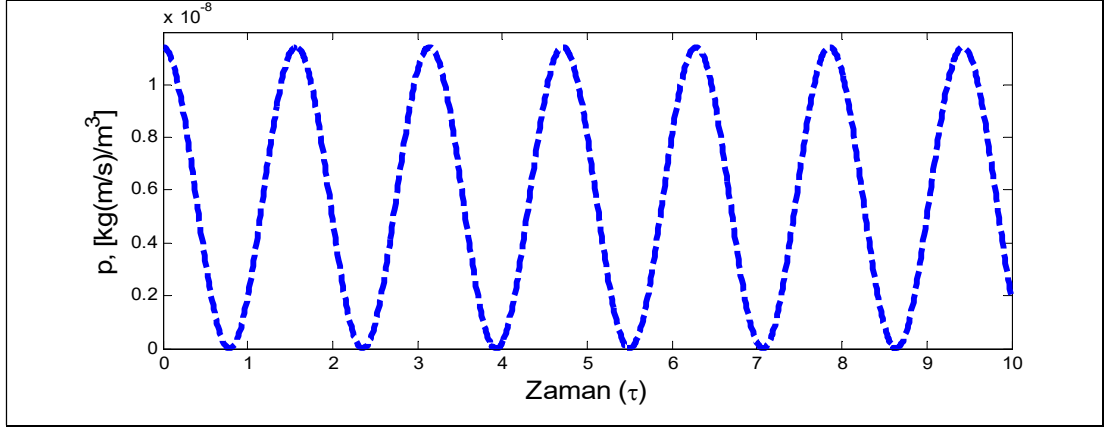
Elektromanyetik alanın mekanik momentumunun hacimsel değerini tanımlayan eşitlik ise; denklem (8.13) ile  $\mathcal{I}'_n(z, t)$  ve  $\mathcal{V}'_n(z, t)$  modal genlikleri kullanılarak ve dalga kılavuzu kesit alanında ortalaması alınarak

$$p(z, t) = \frac{1}{c_0} \sqrt{\mathcal{V}'_n{}^2 (\mathcal{I}'_n{}^2 + h_n^2) - \frac{1}{4} (\mathcal{V}'_n{}^2 - (\mathcal{I}'_n{}^2 + h_n^2))^2} \quad (8.34)$$

$z$  ve  $t$ 'ye bağlı olarak elde edilir. Denklem (8.29)'da görülen  $\mathbb{E}'_n{}^2(t, z) = \mathcal{V}'_n{}^2$  ve denklem (8.30)'da görülen  $\mathbb{H}'_n{}^2(t, z) = (\mathcal{I}'_n{}^2 + h_n^2)$  ifadelerinin karşılıkları kullanılır.  $\Theta = \omega t - \beta z + \mathcal{G}$  iadesi ile birlikte elde edilen sonuç

$$p(z, t) = \frac{1}{c_0} \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_n c}\right)^2 \cos^2(\Theta) \left( \left( \left(\frac{\omega}{v_n c}\right)^2 - 1 \right) \cos^2(\Theta) + \sin^2(\Theta) \right) - \frac{1}{4} (\cos(2\Theta))^2} \quad (8.35)$$

ile oluşturulan kayıpsız ortam için momentumun zamanla değişimi Şekil 8.3'te sergilenmiştir.



Şekil 8.2: Kayıpsız ortamda elektromanyetik momentumun zamanla değişimi.

Grafikler incelendiğinde kütle ifadesinin mekanik momentuma oranla çok daha küçük değerlere sahip olduğu görülmektedir. Elektrik alan ve manyetik alan vektörleri genlikleri sinüzoidal ifadeler cinsinden açıklanıyor olmasından dolayı, kütle ve mekanik momentumun da sinüzoidal karakteristiklerde oldukları söylenebilir.

## 9. SONUÇ

Bu çalışmada öne çıkan yöntemler ve çözümler, araştırmacıların dikkatini bu kısımlara çekmek açısından aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

a) Tezin konusu ve amacı olan dalga kılavuzlarında elektromanyetik alanların enerji ve mekanik özelliklerini günümüzde kullanılan SI birim sistemi içerisinde incelemek için klasik Maxwell denklemlerinin simetrik hale getirilmesi gerekmektedir. Çalışmada sunulmuş olan elektrik alan ve manyetik alan vektörlerinin fiziksel boyutlarını ölçeklendiren prosedür sayesinde Maxwell denklemleri  $\mu_0^A = \sqrt{N / \mu_0}$  ve  $\varepsilon_0^V = \sqrt{N / \varepsilon_0}$  sabitlerinin yardımıyla simetrik formatta yazılmış; elektrik alan ve manyetik alan vektörleri de fiziksel boyutları aynı olacak hale getirilmiştir. Ölçeklendirilmiş elektrik ve manyetik alan vektörleri  $\mathbb{E}(\mathbf{R}, t)$  ve  $\mathbb{H}(\mathbf{R}, t)$ 'in kullanıldığı simetrik formattaki Maxwell denklemleri,  $\varepsilon_0$  ve  $\mu_0$  katsayılarının yerine sadece temel fiziksel katsayı olan  $c$ 'nin bulunduğu CGS sistemindeki Heaviside-Lorentz denklemlerinin formatındadır. Simetrik Maxwell denklemleri, enerji ve mekanik özelliklerin araştırılmasında geniş bir kapı aralamaktadır.

b) Dalga kılavuzlarında elektromanyetik dalgaların enerji ve mekanik özelliklerini gerçek değerli sonuçlar olarak zaman uzayında ortaya koyabilmek için problemin doğrudan zaman uzayında çözülmesi gerekmektedir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ETEY yöntemi kullanılarak ortaya koyulmuştur.

c) Klein-Gordon denklemi kullanılan yöntem içerisinde önemli bir yere sahiptir. Çözüm Klein-Gordon denklemi formunda evrimsel denklem olarak elde edilmekte ve evrimsel denklemin çözülmesiyle alanların zamanla değişimlerine ulaşılmaktadır. Çözümler, Miller'ın ortaya koyduğu simetri durumlarından Durum 1 ve Durum 2 çerçevesinde çözüm elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında elektromanyetik dalgaların enerji ve mekanik özellikleri dalga kılavuzları için ayrı ayrı incelenmiştir. Kayıplı dalga kılavuzu durumunda enerji özellikleri incelenirken, kayıpları sisteme ilave eden  $\sigma$  parametresi dalga kılavuzu içerisinde homojen olarak alınmıştır. İleride, elektromanyetik dalgaların enerji ve mekanik özellikleri, dalga kılavuzu içerisinde parametreleri zamana ve

konuma göre değişen lineer olmayan ortamların bulunması durumları için de incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Tretyakov O.A., (1989), “Evolutionary waveguide equations”, Radiotekhnika i Elektronika, (in Russian), 5 (6), 917-926; (1991), Soviet Journal on Communication Technology and Electronics, (English translation), 35 (2), 7-17.
- [2] Web 1, (2017), <http://www.springer.com/birkhauser/mathematics/journal/28>, (Erişim Tarihi: 08/04/2017)
- [3] Kragh H., (1984), “Equation with the many fathers. The Klein-Gordon equation in 1926”, American Journal of Physics, 52 (11), 1024-1033.
- [4] Miller W.Jr., (1977), “Symmetry and separation of variables”, 1st Edition, Addison-Wesley Publication Co..
- [5] Tretyakov O.A., Akgun O., (2010), “Derivation of Klein-Gordon equation from Maxwell’s equations and study of relativistic time-domain waveguide modes”, Progress In Electromagnetics Research, 105, 171–191.
- [6] Gabriel G.J., (1980), “Theory of electromagnetic transmission structures, Part I: Relativistic foundation and network formalism”, Proceedings of IEEE, 68 (3), 354–366.
- [7] Tretyakov O.A., (1993), “Essentials of nonstationary and nonlinear electromagnetic field theory”, 1st Edition, Science House Co. Ltd.
- [8] Tretyakov O.A., (1994), “Evolutionary equations for the theory of waveguides”. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 1973–1976, Seattle, WA, USA, 20-24 June.
- [9] Kristensson G., (1995), “Transient electromagnetic wave propagation in waveguides”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications., 9 (5/6), 645–671.
- [10] Geyi W., (2006), “A time-domain theory of waveguides”, Progress In Electromagnetics Research, 59, 267–297.
- [11] Tretyakov O. A., Erden F., (2012), “Evolutionary Approach to Electromagnetics as an Alternative to the Time Harmonic Field Method”, 2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio Science Meeting, Chicago, IL, USA, July 8-14.
- [12] Aksoy S., Tretyakov O.A., (2002), “Study of a time variant cavity system”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 16 (11), 1535–1553.

- [13] Aksoy S., Tretyakov O.A., (2003), “Evolution equations for analytical study of digital signals in waveguides”, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 17 (12), 1665-1682.
- [14] Aksoy S., Tretyakov O.A., (2004), “The evolution equations in study of the cavity oscillations excited by a digital signal”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52 (1), 263–270.
- [15] Aksoy S., Antyufeyeva M., Basaran E., Ergin A. A., Tretyakov O. A., (2005), “Time-domain cavity oscillations supported by a temporally dispersive dielectric”, *IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques*, No-8, 2465-2471.
- [16] Sertlek H. Ö., Aksoy S., (2008), “Analytical Time Domain Analysis of an Acoustic Waveguide”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123-5, 3597.
- [17] Erden F., Tretyakov O.A., (2008), “Excitation by a transient signal of the real-valued electromagnetic fields in a cavity”, *Physical Review E*, 77 (5), 056605 1 10.
- [18] Tretyakov O.A., Erden F., (2008), “Temporal cavity oscillations caused by a wide band waveform”, *Progress In Electromagnetics Research*, 6, 183–204.
- [19] Tretyakov O.A., Akgun O., (2011), “Relativistic invariance of the time-domain waveguide modes”, *XXXth URSI-GA: URSI General Assembly and Scientific Symposium*, Turkey, Istanbul, August, 1–4.
- [20] Eroglu E., Aksoy, S., Tretyakov O.A., (2012), “Surplus of energy for time-domain waveguide modes”, *Energy Education Science and Technology Part A, Energy Science and Research*, 29, (1), 495–506.
- [21] Tretyakov O.A., Kaya M., (2012), “The real-valued time-domain TE modes in lossy waveguides”, *Progress In Electromagnetics Research*, 127, 405–426.
- [22] Tretyakov O.A., Kaya M., (2013), “Time-domain real-valued TM modal waves in lossy waveguides”, *Progress In Electromagnetics Research*, 138, 675–696.
- [23] Akgun O., Tretyakov O.A., (2015), “Solution to the Klein–Gordon equation for the study of time-domain waveguide fields and accompanying energetic processes”, *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 9 (12), 1337-1344.
- [24] 11th Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM), (1961), “Comptes Rendus de la 11e CGPM”, 87, Paris, 11-20 Octobre 1960.
- [25] Thompson A., Taylor B.N., (2008), “Guide for the Use of the International System of Units (SI)”, 2008 Edition, US *National Institute of Standards and Technology*.

- [26] Heaviside O., (1899), “Electromagnetic Theory, Vol. II”, 1st Edition, The Electrician Pub. Co., London.
- [27] Lorentz H. A., (1916), “The Theory of Electron”, 1st Edition, B.G. Teubner, Leipzig.
- [28] Polyanin A. D., (2002), “Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists”, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press.
- [29] Umov N.A., (1874), “Ein Theorem über die Wechselwirkung in endlichen Entfernungen”, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 19, 97-114.
- [30] Erden F., Çoşan A. A., Tretyakov O.A., (2017), “Kayıplı Dalga Kılavuzlarında TM Modlarının Zaman Uzayı Enerji Özellikleri”, 25. Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Antalya-Türkiye, 15-18 Mayıs.
- [31] Erden F., Cosan A. A., Tretyakov O.A., (2016), “Properties of the timedomain waveguide modes”, 2016 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio Science Meeting, Fajardo, PR, June 26-July 1.
- [32] Kaiser G., (2011), “Electromagnetic inertia, reactive energy, and energy flow velocity”, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 44 (34), 345206.
- [33] Landau L.D., Lifshitz E.M., (1971), “The Classical Theory of Fields”, 3rd Revised English Edition, Pergamon Press.
- [34] Rothwell E. J., Cloud M. J., (2001), “Electromagnetics”, 1st Edition, CRC Press.

## ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Arda ÇOŞAN 1992 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğretimi Özel Eyüboğlu İlköğretim okulunda tamamladıktan sonra 2010 yılında Kenan Evren Anadolu Lisesi'nden mezun oldu.

Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Bölümü'nü 2014 yılında bitirdi ve 2015 yılında Gebze Teknik Üniversitesi'nde Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı.

Aynı yıl elektromanyetik uyumluluk ve elektriksel güvenlik konuları üzerinde hizmet veren Consept Test ve Teknoloji Merkezi'nde iş hayatına başladı. Aynı yerde laboratuvar sorumlusu olarak çalışmaya devam etmektedir.

## EKLER

### **Ek A: Tez Çalışması Kapsamında Yapılan Yayınlar**

Erden F., Çoşan A. A., Tretyakov O.A., (2017), “Kayıplı Dalga Kılavuzlarında TM Modlarının Zaman Uzayı Enerji Özellikleri”, 25. Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Antalya-Türkiye, 15-18 Mayıs.

Erden F., Cosan A. A, Tretyakov O.A., (2016), “Properties of the timedomain waveguide modes”, 2016 IEEE AP-S/USNC-URSI, Fajardo, PR, June 26-July 1.