

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİNAMİK SINIR KOŞULLARINA SAHİP LİNEER OLMAYAN BİR
PARABOLİK PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN KONUM KRİTİK
NOKTALARI

DENİZ DEMİRCANLI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2019

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİNAMİK SINIR KOŞULLARINA SAHİP
LİNEER OLMAYAN BİR PARABOLİK
PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN KONUM KRİTİK
NOKTALARI

DENİZ DEMİRCANLI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. MANSUR İSGENDER OĞLU

GEBZE
2019

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**SPATIAL CRITICAL POINTS OF
SOLUTIONS OF A NONLINEAR PARABOLIC
PROBLEM WITH DYNAMIC BOUNDARY
CONDITIONS**

DENİZ DEMİRCANLI
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS ADVISOR
PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

GEBZE
2019

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 30/05/2019 tarih ve 2019/25 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 25/06/2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Deniz DEMİRCANLI'nın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU

ÜYE

: Doç. Dr. Oğul ESEN

ÜYE

: Doç. Dr. Cihangir ÖZEMİR

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

ÖZET

Bu çalışmada dinamik sınır koşullu lineer olmayan parabolik tipli bir problemin pozitif çözümünün konum kritik noktalarının sayısının zaman içindeki değişimi incelenmiştir. Bu problemin pozitif çözümünün mevcudluğu ve konum kritik noktalarının monotonluğu sırasıyla maksimum-minimum prensibi ve Taylor açılımı ile birleştirilmiş Newton poligonları yöntemi uygulanarak gösterilmiştir. Yapılan bu tez çalışmasında, konum kritik noktaların sayısının zaman içindeki değişimi, bu noktaların basit olduğu ve basit olmadığı iki ayrı halde incelenmiş olup, bu kritik noktaların sayısının zaman içinde artmadığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer Olmayan Isı Denklemi, Konum Kritik Nokta, Dinamik Sınır Koşul, Newton Poligonları Yöntemi.

SUMMARY

In this work, the variation in time of the number of spatial critical points of the positive solution for a nonlinear parabolic problem with the dynamic boundary conditions is examined. The availability of the positive solution and monotonicity of spatial critical points for this problem are shown by applying the maximum-minimum principle and Newton polygons method combined with the Taylor series expansion, respectively. In this thesis, the variation of the number of critical points in time has been examined in two possible cases in which these points are simple and not simple, and it has been proved that the number of these critical points does not increase in time.

Keywords: Nonlinear Heat Equation, Spatial Critical Point, Dynamic Boundary Condition, Newton Polygons Method.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca bana her konuda destek olan, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan değerli danışmanım Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU'na,

Çalışmalarım boyunca değerli yardımları ve katkılarıyla beni yönlendiren, matematiğe olan ilgimin artmasındaki baş etken, değerli hocam Doç. Dr. Oğul ESEN'e,

Bütün çalışmam boyunca yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan değerli arkadaşım Tayfun ACAR'a,

Grafik çizimlerinde katkısı bulunan ve tavsiyelerini benimle paylaşan değerli arkadaşım Muhammet Fatih EREN'e,

Tezimin yazım kurallarına uygunluğunun kontrol edilmesinde katkısı bulunan değerli arkadaşım Şeyma KORKMAZ'a,

Tezimin özet kısmının ingilizceye çevrilmesinde katkısı bulunan değerli arkadaşlarım Yeliz UÇAR ve Elif AVCI'ya,

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman benden esirgemeyen, başta annem olmak üzere aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ	xi
1.GİRİŞ	1
2.EK BİLGİLER	3
2.1.Isı Denklemi İçin Maksimum-Minimum Prensibi ve Sınır Nokta Hakkındaki Hopf Lemması	3
2.2.Isı Polinomları	4
2.3.Newton Poligonları Yöntemi ve Onun Lineer Olmayan Denklemlere Uygulaması	6
2.4.Reel Analitik Fonksiyonlar	15
3.PARABOLİK TİPLİ PROBLEMLERİN KONUM KRİTİK NOKTALARI	17
3.1.Robin Sınır Koşullarına Sahip Lineer Olmayan Bir Parabolik Tipli Problemin Konum Kritik Noktaları	17
3.2.Dinamik (Wentzell) Sınır Koşullarına Sahip Lineer Olmayan Bir Parabolik Tipli Problemin Konum Kritik Noktaları	23
4.SONUÇ	44
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	47

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler ve</u> <u>Kisaltmalar</u>	<u>Açıklamalar</u>
α	: Alfa
β	: Beta
$C^p(D)$	: D bölgesinde p. mertebeye kadar türe ve sahip ve bu türevleri sürekli olan fonksiyonlar sınıfı
$C^w(D)$	: D bölgesinde reel analitik olan fonksiyonlar sınıfı
$C^0(D)$	: D bölgesinde sürekli fonksiyonlar sınıfı
δ	: Delta
$\overline{D}$	: D Kümesinin Kapanışı
$\in$	: Elemanıdır
$\exists$	: En az bir
ε	: Epsilon
η	: Eta
γ	: Gama
$\forall$	: Her
$\Rightarrow$	: İse
■	: İspat Sonu
$\cap$	: Kesişim
ξ	: Ksi
λ	: Lamda
:	: Öyleki
	: Öyleki
$\equiv$	: Özdeş tir
$\neq$	: Özdeş Değildir
φ	: Phi
$\#\varphi(*)$	: φ fonksiyonunun kritik noktalarının sayısı
π	: Pi
$\llbracket r \rrbracket$	: r Sayısının Tam Değeri
σ	: Sigma

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
2.1: Newton Poligonu.	8
2.2: Örnek 2.1 İçin Newton Poligonu.	10
2.3: Denklem (2.40) İçin Newton Poligonu.	12
2.4: Denklem (2.47) İçin Newton Poligonu.	14
3.4: Denklem (3.92) İçin Newton Poligonu.	34
3.5: Denklem (3.108) İçin Newton Poligonu.	38
3.6: Örnek 3.1 deki Dinamik Sınır Koşullu Problemin Konum Kritik Noktaları.	43

TABLÖLAR DİZİNİ

<u>Tablo No:</u>	<u>Sayfa</u>
2.1: Örnek 2.1 İçin Katsayılar.	10
2.2: Örnek 2.1 İçin Kuvvetler.	10
2.3: Denklem (2.40) İçin Katsayılar.	12
2.4: Denklem (2.40) İçin Kuvvetler.	12
3.1: Denklem (3.92) İçin Katsayılar ve Kuvvetler.	34
3.2: Denklem (3.108) İçin Katsayılar ve Kuvvetler.	38

1. GİRİŞ

Doğadaki fiziksel olayların birçoğu kısmi türevli diferansiyel denklemler için başlangıç değer ve sınır değer problemleri ile verilmekle beraber son dönemlerde sınırlı bir bölgede lineer olmayan parabolik tipli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bazı niteliksel özelliklerine ilgi artmıştır. Bu niteliksel özellikler arasında verilen bir parabolik tipli problemlerin çözümlerinin konum kritik noktaları ve bu noktaların monotonluk özellikleri önem arz etmektedir. Konunun zorluğuna binaen, bu konuya dair pek fazla literatür bulunmamaktadır. Mevcut literatürler içerisinde bir boyutlu ısı denklemi için konum ekstremum noktaların zaman içinde artmaması [12,20] de verilmiş olup, bu sonuçlardan matematiksel anlamda kararlı ve kararlı olmayan iki durağan hiperbolik manifoldun enine kesişmelerini ispatlamakta faydalanılır [1,6]. Konum kritik noktaların fiziksel anlamı [2] makalesinde ifade edilmiş olup, bu noktaların monotonluğu, referans noktanın ağırlık merkezi ile çakıştığı durumda parçacık aşınmasında gözlemlenen miktarı ifade etmektedir.

Parabolik denklemlerin konum kritik noktaları hakkında diğer makalelerde [8,9,16] ele alınan konular şu şekildedir: [8] makalesinde $\mathbb{R}^N$ de orijin merkezli bir Ω bölgesinde Robin sınır koşullu ısı denklemi için, başlangıç ve sınır verileri belli bir integral eşitliğini sağladığında orijinin, zaman içinde değişmeyen bir konum kritik nokta olduğu gösterilmiştir. Daha genel durumda, [9] makalesinde $\mathbb{R}^N$ de orijine göre merkezi-simetrik bir Ω bölgesinde başlangıç veri ve sınır verisi konuma göre çift fonksiyon olduğu durumda orijinin, zaman içinde değişmeyen bir konum kritik nokta olduğu gösterilmiştir. Aynı makalede dalga denklemi için de verilen Robin sınır koşullu başlangıç sınır değer problemi için benzer simetri teoremlerinin sağlandığı gösterilmiştir. [16] makalesinde ise bazı difüzyon denklemlerinin çözümünün konum kritik noktalarının ve konum sıfırlarının davranışı çalışılmış olup, $N \geq 2$ durumunda bir $G \subset \mathbb{R}^N$ bölgesinde ısı denkleminin çözümü için, bu bölgeye dahil olan bir noktanın zamana göre değişmeyen konum kritik nokta olabilmesi için, çözümün denge kanunu tipli bir integral eşitliğini sağlanmasının gerekli ve yeterli bir koşul olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca ısı denkleminin çözümünün konum sıfırları hakkında bazı makaleler de [9,17] mevcut olup, [17] de ısı denklemi lineer ve homojen olduğu durumda analitik

çözümün konum sıfırlarının sayısının zaman içinde artmaması, lineer olmayan durumda ise denklemin verilen herhangi iki çözümün farkının konum sıfırlarının artmaması, bu sıfırların sayısının sabit olduğu durumda ise farkın yalnızca basit konum sıfırına sahip olduğu gösterilmiştir. [9] makalesinde ise denge kanunu olarak adlandırılan bir integral tipli eşitlik sağlandığında, orijinin verilen lineer ısı denkleminin çözümü için zamana göre değişmeyen bir konum sıfırı olduğu gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında bir boyutlu lineer olmayan ısı denklemi için bir dinamik sınır koşulları altında pozitif çözümlerinin mevcutluğu maksimum-minimum prensibi uygulanarak, konum kritik noktaların sayısının artmama özelliği ise Taylor serisi ve Newton poligonları [4,14] yöntemi birlikte uygulanarak gösterilecektir. Bu çalışmadaki problemin Robin sınır koşullu hali [13] makalesinde ele alınmış olup sınır koşulunun dinamik sınır koşullu olduğu durumda zamana göre konum kritik noktaların sayısı üzerine bir çalışma yapılmamış olması bu çalışmayı konum kritik noktalar hakkında literatürdeki bilgi eksikliğini gidermeye hedeflemiştir.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm ise bazı yardımcı teoremler ve öngörülen problemin çözümünü analiz etmekte kullanılacak olan Newton poligonları yöntemine ayrılmıştır. Üçüncü bölümde ise ilk olarak [13] makalesinde verilen bir boyutlu lineer olmayan Robin sınır koşullu problemin konum kritik noktaları göz önüne alınmış olup benzer çalışma bazı ek koşullar altında aynı problemin dinamik sınır koşullu haline uyarlanabileceği bu bölümün ikinci kısmında verilmiştir.

2. EK BİLGİLER

Bu bölümde öncelikle ilerde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler ardından ise parabolik problemin konum kritik noktalarını taylor serisi ile analiz ederken kullanılacak olan Newton poligonları yöntemi olarak bilinen çok kullanışlı bir yöntem verilecektir.

2.1. Isı Denklemi İçin Maksimum-Minimum Prensibi ve Sınır Nokta Hakkındaki Hopf Lemması [5,10,15]

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + F(x, t, u, u_x) \quad (2.1)$$

denklemini verilmiş olsun.

$$D = (0,1) \times (0, \infty) \quad (2.2)$$

$$D_T = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < T\} \quad (2.3)$$

$$\gamma_1 = \{(x, t) \mid x = 0, \quad 0 \leq t < T\} \quad (2.4)$$

$$\gamma_0 = \{(x, t) \mid t = 0, \quad 0 \leq x < 1\} \quad (2.5)$$

$$\gamma_2 = \{(x, t) \mid x = 1, \quad 0 \leq t < T\} \quad (2.6)$$

olsun.

Teorem 2.1 (Minimum Prensibi): $u(x, t) \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$ olmak üzere (2.1) denklemini sağlayan bir fonksiyon olsun. F negatif olmasın. O halde

$$u(x, t) \geq \min\{0, \min_{\gamma_0} u(x, t), \min_{\gamma_1} u(x, t), \min_{\gamma_2} u(x, t)\}, \forall (x, t) \in \bar{D}_T, \quad \forall T > 0. \quad (2.7)$$

Lemma 2.1 (Sınır Nokta Hakkındaki Hopf Lemması): u fonksiyonu (2.1) denkleminin D_T bölgesinde negatif olmayan ve sabitten farklı bir çözümü olsun. Ayrıca u fonksiyonu $t > 0$ olmakla bu bölgenin sınırında bir $p = (x_0, t_0) \in \{0,1\} \times (0, T)$ noktasında minimum değerine ulaşsın. O halde

$$\frac{\partial u}{\partial n}(p) < 0 \quad (2.8)$$

dır.

2.2. Isı Polinomları [11]

Tanım 2.1: Aşağıdaki şekilde

$$u_n(x, t) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{n-2k} t^k}{(n-2k)! k!}, \quad n \geq 1 \quad (2.9)$$

polinomlarına ısı polinomları denir.

Bu polinomların ısı polinomları ismini alması $u_t = u_{xx}$ ısı denklemini sağlamasından kaynaklanmaktadır. Bir çok durumda olduğu gibi bu tezde de bu polinomların $x = 1$ de değerleri olan

$$q_n(v) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{v^k}{(n-2k)! k!}, \quad n \geq 1 \quad (2.10)$$

şekilleri önem arz eder. Sonuncu polinomlar için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$(n+1)q_{n+1}(v) - 2vq_{n-1}(v) = q_n(v), \quad n \geq 2 \quad (2.11)$$

$$q'_{n+1}(v) = q_{n-1}(v), \quad n \geq 2 \quad (2.12)$$

Ayrıca her $n \geq 2$ için $q_n(v)$ polinomu yalnızca basit sifıra sahiptir. Bu eşitliklerin doğruluğu kolaylıkla gösterilir. $n = 2$ halinde bu polinomun yalnızca basit sifıra sahip olduğu açıktır. Aksi varsayılın. Bu polinomun basit sifıra sahip olmadığı en küçük tam sayı $N + 1$ olsun. O halde öyle v_0 sayısı vardır ki

$$q_{N+1}(v_0) = q'_{N+1}(v_0) = 0 \quad (2.13)$$

dır. Tanımdan $v_0 \neq 0$ dır. O halde (2.11) ve (2.12) den $q_N(v_0) = 0$ elde edilir.

Gerçektende

$$0 = q'_{N+1}(v_0) \stackrel{(2.12)}{\cong} q_{N-1}(v_0) \Rightarrow q_{N-1}(v_0) = 0 \quad (2.14)$$

$$(N + 1) \underbrace{q_{N+1}(v_0)}_{=0 \text{ (2.13)}} - 2v_0 \underbrace{q_{N-1}(v_0)}_{=0 \text{ (2.14)}} \stackrel{(2.11)}{\cong} q_N(v_0) \Rightarrow q_N(v_0) = 0. \quad (2.15)$$

$q_N(v)$ yalnızca basit sifıra sahip olduğundan $q'_N(v_0) \neq 0$ dır. Dolayısıyla

$$q'_N(v_0) \neq 0 \stackrel{(2.12)}{\cong} q_{N-2}(v_0) \neq 0 \quad (2.16)$$

$$Nq_N(v_0) - 2v_0q_{N-2}(v_0) \stackrel{(2.11)}{\cong} q_{N-1}(v_0) \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow 2 \underbrace{v_0}_{\neq 0} \underbrace{q_{N-2}(v_0)}_{\neq 0 \text{ (2.16)}} = N \underbrace{q_N(v_0)}_{=0 \text{ (2.15)}} - \underbrace{q_{N-1}(v_0)}_{=0 \text{ (2.14)}} \quad (2.18)$$

eşitliği ile çelişir.

2.3. Newton Poligonları Yöntemi ve Onun Lineer Olmayan Denklemlere Uygulaması [4,14]

Aşağıdaki şekilde bir polinom verilmiş olsun:

$$F(\lambda, \xi) = \sum_{s=0}^n F_s(\lambda) \xi^s \quad (2.19)$$

Burada

$$F_s(\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} F_{rs} \lambda^{p_s + \frac{r}{q}} \quad (2.20)$$

ve F_{rs} kompleks sayılardır. Ayrıca λ ve ξ kompleks değişken, p_s negatif olmayan rasyonel sayı, q pozitif tam sayı, $F_n(\lambda) \neq 0$ ve $F_0(\lambda) \neq 0$ dır. Genelliği bozmadan $F_{00} \neq 0$ ve $F_{0n} \neq 0$ olsun.

$$F(\lambda, \xi) = 0 \quad (2.21)$$

denklemini göz önüne alınsın. Bu denklemin ξ ye göre çözümü

$$\xi = \xi_\varepsilon \lambda^\varepsilon + \xi_{\varepsilon'} \lambda^{\varepsilon'} + \xi_{\varepsilon''} \lambda^{\varepsilon''} + \dots \quad (2.22)$$

şeklinde olsun. Burada $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \dots$ ve $\xi_\varepsilon \neq 0$ dır. Yada daha kısa bir şekilde ifade etmek gerekirse

$$\xi = \xi_\varepsilon \lambda^\varepsilon + V \quad (2.23)$$

dir. Burada $V = o(\lambda^\varepsilon)$, $\lambda \rightarrow 0$.

ξ ve ξ_ε değerlerinin bulunması için (2.23) deki eşitlik (2.21) de yerine yazılsın. λ ya göre eşit dereceli terimler bir araya toplanıp katsayıları sıfıra eşitlensin. En küçük dereceli terimle başlansın. ε sayısı belirlenmiş olmadığı için hangi terimlerin λ ya göre en küçük dereceye sahip olduğu bilinmemektedir.

Eğer $F_{0i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ise λ ya göre en küçük dereceli terim

$$F_{00}\lambda^{p_0}, F_{01}\xi_\varepsilon\lambda^{p_1+\varepsilon}, F_{02}\xi_\varepsilon^2\lambda^{p_2+2\varepsilon}, \dots, F_{0n}\xi_\varepsilon^n\lambda^{p_n+n\varepsilon} \quad (2.24)$$

terimleri arasındadır. Başka sözle eğer $k = 1, 2, \dots, n - 1$ için $F_k(\lambda) \neq 0$ ise λ ya göre en küçük dereceli terim

$$F_{00}\lambda^{p_0}, F_{0k}\xi_\varepsilon^k\lambda^{p_k+k\varepsilon}, F_{0n}\xi_\varepsilon^n\lambda^{p_n+n\varepsilon} \quad (2.25)$$

terimleri arasındadır. (2.24) de $F_{0s} \neq 0$ ($s = 1, 2, \dots, n$) olduğundan en küçük dereceli terimlerin yok olması için

$$p_0, p_k + k\varepsilon, p_n + n\varepsilon \quad (2.26)$$

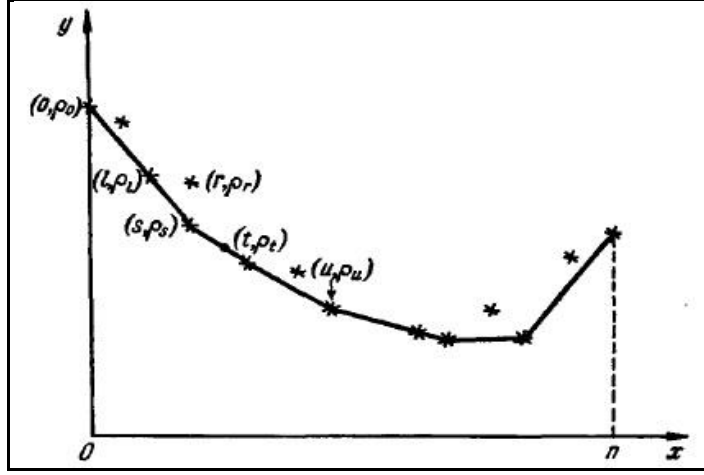
kuvvetlerinin en az ikisi eşit ve diğerlerinden büyük olmamalıdır.

Kuvvetlerin eşitlenmesiyle ε sayısının tüm mümkün değerleri belirlenir. Daha sonra (2.25) deki terimlerde eşit dereceli (en küçük) kuvvetlere sahip katsayıların toplamı sıfıra eşitlenerek ξ_ε belirlenir. Böylece ε sayısı aşağıdaki lineer denklemlerden birinin bir kökü olur.

$$p_s + s\varepsilon = p_i + i\varepsilon \quad (s \neq i, F_s(\lambda) \neq 0, F_i(\lambda) \neq 0) \quad (2.27)$$

Ayrıca bu ε sayısı (2.26) daki kalan ifadelerde yerine yazıldığında bu ifadeler $p_s + s\varepsilon$ dan daha küçük bir değer olmamalıdır.

Bu değerleri bulmak için Newton diyagramı olarak bilinen aşağıdaki geometriksel yöntem kullanılır. (2.25) de olduğu gibi aynı k sayıları için $(0, p_0)$, (k, p_k) , (n, p_n) noktaları koordinat düzleminde yazılsın.



Şekil 2.1: Newton Poligonu.

y eksenini $(0, p_0)$ noktası civarında şekilde çizili olan bir başka nokta içerisinde $((l, p_l)$ denilen) geçene kadar saatin tersi yönünde döndürülsün. $(0, p_0)$ ve (l, p_l) noktalarından geçen L doğrusu ile x ekseninin negatif yönde yaptığı açının tanjantı ε nun mümkün değerlerinden biridir. Çünkü bu ε sayısı için $p_0 - p_l = l\varepsilon$ yani $p_0 = p_l + l\varepsilon$ eşitliği sağlanır ve ikinci olarak eğer (k, p_k) noktası bu L doğrusu üzerinden geçmiyorsa inşası gereği bu doğrunun yukarısında kalır. Bu noktadan geçen L doğrusuna paralel bir doğru çizilirse bu doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı $k\varepsilon + p_k$ olur öyle ki

$$k\varepsilon + p_k > p_l + l\varepsilon = p_0 \quad (2.28)$$

dır.

L doğrusunun üzerinde bahsedilen noktalar daha fazla olabilir. (s, p_s) noktası L doğrusu üzerinde olan en büyük apsisli nokta olsun. Daha sonra L doğrusunu (s, p_s) noktası etrafında saatin tersi yönünde şekilde çizili olan $(t > s)$ olmak üzere (t, p_t) denilen) bir başka noktadan geçene kadar döndürülsün. L' doğrusu (s, p_s) ve (t, p_t) den geçen doğru olsun. Daha önce olduğu gibi düşünülerek, L' doğrusu ile x eksenin negatif yönde yaptığı açının tanjantı ε nun bir başka mümkün değeri olur. (u, p_u) noktası L' doğrusu üzerinde olan en büyük apsisli nokta olsun. Daha sonra L' doğrusu (u, p_u) noktası etrafında döndürülerek bu şekilde devam edilirse Şekil 1 de Newton diagramı olarak bilinen $(0, p_0), (s, p_s), (u, p_u), \dots$, noktalarından geçen bir konveks poligon elde edilir.

Şimdi ξ_ε değeri belirlenmelidir. $(i, p_i), (j, p_j)$ noktaları Newton diagramındaki doğru parçalarının son noktaları olsun. Bu doğru parçaları üzerinde bulunan (k, p_k) noktaları için $k\varepsilon + p_k$ bir σ sabit sayısıdır. λ^σ lı terimlerin katsayıları bir araya getirilip toplanır ve sıfıra eşitlenirse

$$\sum_{k=i}^j F_{0k} \xi_\varepsilon^k = 0 \quad (2.29)$$

elde edilir. Burada $'$ sembolü yukarıdaki toplamın $k\varepsilon + p_k = \sigma$ eşitliğini sağlayan k indeksleri üzerine olduğunu göstermektedir. Bu denklem $j - i$ tane sıfır olmayan çözümlere (tamamı farklı yada tekrar eden) sahiptir. Başka sözle çözümlerin sayısı bu doğru parçasının x eksenine izdüşümünün uzunluğuna eşittir. ξ nin açılımındaki bir sonraki terimin bulunması için (2.23) deki eşitlik (2.21) de yerine yazılır ve V deki en küçük dereceli terim benzer yol takip edilerek bulunur. Süreç böyle devam ettirilerek (2.22) deki toplam elde edilir.

Teorem 2.2: $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \dots$ olmak üzere (2.21) nin tüm çözümleri (2.22) şeklindedir. Burada $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \dots$ sonlu ortak paydalı kesirlerdir ve (2.22) serisi $\varepsilon < 0$ iken $\lambda = 0$ haricinde $\lambda = 0$ in bir komşuluğunda yakınsaktır.

Örnek 2.1: Aşağıdaki şekilde bir denklem verilmiş olsun.

$$\lambda^3 - 3\lambda\xi + \xi^3 = 0 \quad (2.30)$$

Burada

$$F(\lambda, \xi) = \sum_{s=0}^3 F_s(\lambda) \xi^s = 0 \quad (2.31)$$

$$F_s(\lambda) = \sum_{r=0} F_{rs} \lambda^{p_s + \frac{r}{q}} \quad (2.32)$$

olmak üzere

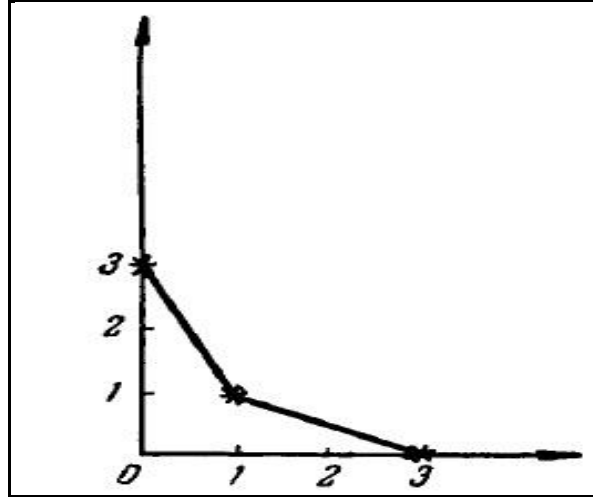
Tablo 2.1: Örnek 2.1 İçin Katsayılar.

$F_0(\lambda) = \lambda^3$	$F_1(\lambda) = -3\lambda$	$F_2(\lambda) = 0$	$F_3(\lambda) = 1$
$F_{00}(\lambda) = 1$	$F_{01}(\lambda) = -3$	$F_{02}(\lambda) = 0$	$F_{03}(\lambda) = 1$

Tablo 2.2: Örnek 2.1 İçin Kuvvetler.

$p_0 = 3$	$p_1 = 1$	$p_3 = 0$
-----------	-----------	-----------

olarak elde edilir. Diagramın oluşturulması için (0,3) , (1,1) ve (3,0) noktaları çizilsin. (Şekil 2.2).



Şekil 2.2: Örnek 2.1 İçin Newton Poligonu.

ε sayısının mümkün değerleri doğru parçalarının x ekseni ile negatif yönde yaptığı açının tanjantı olduğundan Şekil 2.2 ye göre

$$\varepsilon_1 = 2, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \quad (2.33)$$

dir. Şekil 2.2 ye göre eşit kuvvetli terimlerin katsayılarını toplanır ve sifıra eşitlenirse

$$\sum_{k=0}^1 F_{0k} \xi_{\varepsilon}^k = 0 \quad (2.34)$$

ve

$$\sum_{k=1}^3 F_{0k} \xi_{\varepsilon}^k = 0 \quad (2.35)$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$1 - 3\xi_2 = 0, \quad -3\xi_{\frac{1}{2}} + \xi_{\frac{1}{2}}^3 = 0 \quad (2.36)$$

ve

$$\xi_2 = \frac{1}{3}, \quad \xi_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3} \quad (2.37)$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.23) e göre çözümler

$$\xi = \frac{1}{3}\lambda^2 + o(\lambda^2) \quad (2.38)$$

$$\xi = \pm\sqrt{3}\lambda^{\frac{1}{2}} + o\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\right) \quad (2.39)$$

olarak elde edilir.

Bir sonraki yaklaşımın kurulması için $\xi = \frac{1}{3}\lambda^2 + V$ nin Örnek 2.1 de verilen (2.30) denklemde yerine yazılmasıyla

$$\frac{1}{27}\lambda^6 + \left(-3\lambda + \frac{1}{3}\lambda^4\right)V + \lambda^2V^2 + V^3 = 0 \quad (2.40)$$

elde edilir. Bu denklemden elde edilen katsayılar ve kuvvetler aşağıda verilmiştir.

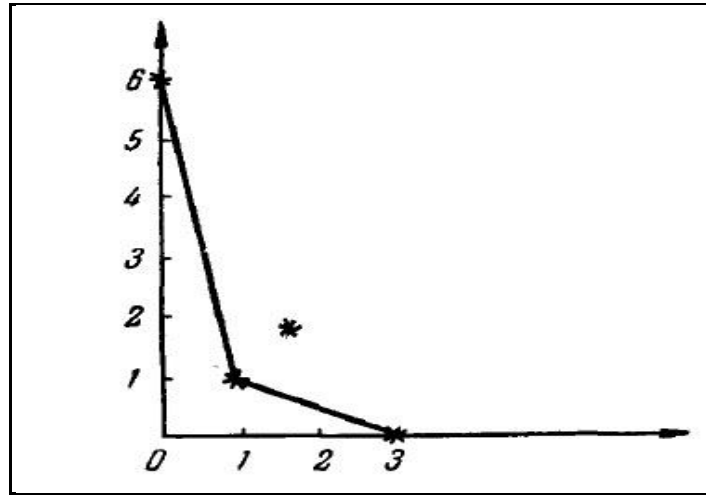
Tablo 2.3: Denklem (2.40) İçin Katsayılar.

$F_0(\lambda) = \frac{1}{27}\lambda^6$	$F_1(\lambda) = -3\lambda + \frac{1}{3}\lambda^4$	$F_2(\lambda) = \lambda^2$	$F_3(\lambda) = 1$
$F_{00}(\lambda) = \frac{1}{27}$	$F_{01}(\lambda) = -3$	$F_{02}(\lambda) = 1$	$F_{03}(\lambda) = 1$

Tablo 2.4: Denklem (2.40) İçin Kuvvetler.

$p_0 = 6$	$p_1 = 1$	$p_2 = 2$	$p_3 = 0$
-----------	-----------	-----------	-----------

Diagramın oluşturulması için (0,6), (1,1), (2,2) ve (3,0) noktaları çizilsin. (Şekil 2.3).



Şekil 2.3: Denklem (2.40) İçin Newton Poligonu.

Benzer şekilde yukarıdaki diagrama göre

$$\varepsilon_1' = 5, \quad \varepsilon_2' = \frac{1}{2} \quad (2.41)$$

olarak elde edilir. Burada ε_2' sayısı $\varepsilon' > \varepsilon$ şartını sağlamadığı için atılır. Daha önceki aşamalara benzer şekilde aynı dereceli kuvvetlerin katsayıları toplanır ve sıfıra eşitlenirse

$$\sum_{k=0}^1 F_{0k} V_{\varepsilon}^k = 0 \quad (2.42)$$

yani

$$\sum_{k=0}^1 F_{0k} V_5^k = 0 \quad (2.43)$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{27} - 3V_5 = 0 \quad (2.44)$$

yani

$$V_5 = \frac{1}{81} \quad (2.45)$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.23) e göre çözüm

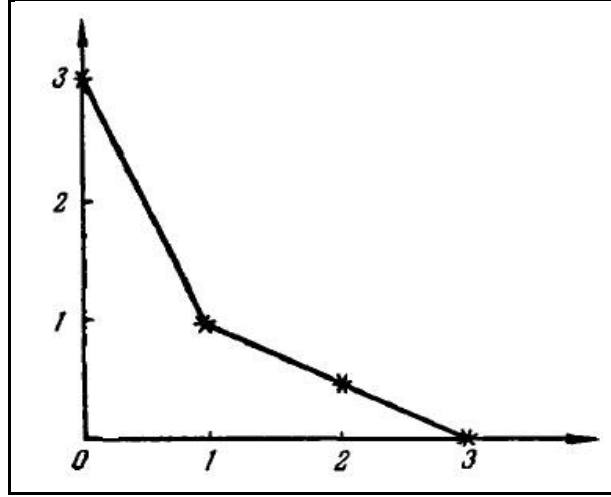
$$\xi = \frac{1}{3} \lambda^2 + \frac{1}{81} \lambda^5 + o(\lambda^5) \quad (2.46)$$

olarak elde edilir. Böylece denklem (2.30) için bulunan ilk çözüm için bir sonraki yaklaşımın nasıl kurulacağı verilmiş olur.

Şimdi denklem (2.30) için verilen ikinci çözümün bir sonraki yaklaşımı kurulsun. Bunun için $\xi = \pm \sqrt{3} \lambda^{\frac{1}{2}} + V$ ifadesi Örnek 2.1 deki denklemde yerine yazılarak

$$\lambda^3 + 6\lambda V \pm 3\sqrt{3} \lambda^{\frac{1}{2}} V^2 + V^3 = 0 \quad (2.47)$$

denklemini elde edilir. Diagramın oluşturulması için (0,3), (1,1), $(2, \frac{1}{2})$ ve (3,0) noktaları çizilsin. (Şekil 2.4).



Şekil 2.4: Denklem (2.47) İçin Newton Poligonu.

ε sayısı diagramdan hesaplanırsa

$$\varepsilon_1' = 2, \quad \varepsilon_2' = \frac{1}{2} \quad (2.48)$$

elde edilir. İkinci değer olarak bulunan ε_2' sayısı $\varepsilon' > \varepsilon$ şartını sağlamadığı için atılır. Benzer işlemlerle

$$1 + 6V_2 = 0 \quad (2.49)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemden V_2 belirlenir ve (2.22) eşitliği göz önüne alınırsa çözüm

$$\xi = \pm\sqrt{3}\lambda^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\lambda^2 + o(\lambda^2) \quad (2.50)$$

olarak elde edilir. Bir sonraki yaklaşım için yukarıdaki süreç benzer şekilde devam ettirilir.

2.4. Reel Analitik Fonksiyonlar [19]

Tanım 2.2: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. $y \in \Omega$ için

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} (x - y)^{\alpha}, \quad \forall x \in N \quad (2.51)$$

olacak şekilde en az bir c_{α} ve y nin bir $N = N_y(x)$ komşuluğu varsa f fonksiyonuna y noktasında reel analitiktir denir. Eğer her $y \in \Omega$ için f fonksiyonu y noktasında reel analitik ise f fonksiyonuna Ω bölgesinde reel analitiktir denir ve $f \in C^w(\Omega)$ ile gösterilir. $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ vektörü Ω da verilmiş bir vektör olsun. Eğer tüm $f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ fonksiyonları reel analitik ise f reel analitiktir denir.

Teorem 2.3: $f = (f_1, \dots, f_m) \in C^w(\Omega)$ olsun. O halde $f \in C^{\infty}(\Omega)$ dır. Ayrıca her $y \in \Omega$ için y nin bir $N = N_y(x)$ komşuluğu ve pozitif M, r sayıları vardır ki her $x \in N$ için

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (D^{\alpha} f(y)) (x - y)^{\alpha} \quad (2.52)$$

ve

$$|D^{\beta} f_k(x)| \leq M |\beta|! r^{-|\beta|}, \quad \forall \beta \in \mathbb{Z}^n, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (2.53)$$

dir.

Teorem 2.4: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık ve bağlantılı bir küme $f \in C^w(\Omega)$ ve $z \in \Omega$ olsun. O halde eğer her $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ için $D^{\alpha} f(z)$ biliniyorsa f fonksiyonunu Ω bölgesinde tek türlü belirlemek mümkündür.

Tanım 2.3: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık kümesinde tanımlı bir $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ verilmiş olsun. $y \in \Omega$ ve M, r pozitif sayılar olmak üzere eğer y nin bir $N = N_y(x)$ komşuluğunda

$$f \in C^\infty(N) \quad (2.54)$$

ve

$$|D^\beta f_k(x)| \leq M|\beta|!r^{-|\beta|}, \forall \beta \in \mathbb{Z}^n, \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (2.55)$$

ise $f \in C_{M,r}(y)$ dir denir.

Teorem 2.5: f fonksiyonu Ω açık kümesinde tanımlı olsun. $f \in C^w(\Omega)$ olması için $f \in C^\infty(\Omega)$ ve her kompakt $S \subset \Omega$ için $f \in C_{M,r}(y)$, $\forall y \in S$ olacak şekilde M, r pozitif sayılarının mevcut olması gerek ve yeterdir.

3. PARABOLİK TİPLİ PROBLEMLERİN KONUM KRİTİK NOKTALARI

Bilindiği üzere ikinci bölümde parabolik problemin konum kritik noktalarının zaman içindeki değişimi incelemek için gerekli olan bazı teorem, önerme ve Newton poligonu olarak bilinen çok kullanışlı bir yöntem verilmiştir. Bu bölümde ise parabolik tipli problemin dinamik sınır koşullarına sahip olduğu durumda konum kritik noktalarının sayısındaki değişim incelenecektir. Bunu incelemeden önce daha önce incelenmiş olan robin sınır koşuluna sahip parabolik problem göz önüne alınacaktır [13]. Bu problemin hangi ek koşullar altında dinamik sınır koşullu problem içinde geçerli olduğu belirlenecektir.

3.1. Robin Sınır Koşullarına Sahip Lineer Olmayan Bir Parabolik Tipli Problemin Konum Kritik Noktaları

Aşağıdaki parabolik tipli robin sınır koşullarına sahip başlangıç sınır değer problemi ele alınmış olsun.

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + F_1(x, t, u, u_x)u_x + F_2(t, u), (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty) \quad (3.1)$$

$$u(\bar{x}, t) + A(\bar{x}, t) \frac{\partial u}{\partial n}(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in \{0, 1\}, t > 0 \quad (3.2)$$

$$u = u_0(x), 0 < x < 1, t = 0 \quad (3.3)$$

Burada alt indisler $[0, 1]$ aralığının normali yönündeki $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t)$ kısmi türevini göstermektedir.

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\bar{x}, t) = -(-1)^{\bar{x}} u_x(\bar{x}, t), \bar{x} \in \{0, 1\} \quad (3.4)$$

Yukarıdaki (3.1)-(3.3) probleminin aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin.

$$D = (0, 1) \times (0, \infty) \quad (3.5)$$

olmak üzere;

$$H1) a(x, t) \in C^w(D), a(x, t) > 0.$$

H2) $F = F_1(x, t, u, u_x)u_x + F_2(t, u)$ olmak üzere $F_1 \in C^w(D \times \mathbb{R}^2)$, $F_2 \in C^w((0, \infty) \times \mathbb{R})$ ve $F \geq 0$.

$$H3) A(\bar{x}, t) \in C^w(\{0,1\} \times (0, \infty)) \text{ ve } A(\bar{x}, t) \geq 0.$$

$$H4) u_0 \in C^w([0,1]), u_0 \geq 0 \text{ ve } u_0 \not\equiv 0.$$

H5) u_0 başlangıç koşulu $[0,1]$ de Morse fonksiyonudur. Yani sonlu sayıda $\tilde{x}$ için $\frac{\partial u_0}{\partial x}(\tilde{x}) = 0$ ve $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(\tilde{x}) \neq 0$ dır.

$$H6) \frac{\partial u_0}{\partial x}(\bar{x}) \neq 0, \bar{x} \in \{0,1\}.$$

Verilen u_0 için $[0, T)$, (3.1)-(3.3) probleminin klasik çözümünün varlık aralığıdır.

Teorem 3.1: (H1)-(H6) koşullarının sağlandığı kabul edilsin. $u(x, t)$ (3.1)-(3.3) probleminin bir çözümü olsun. O halde $\#u(*, t)$, $t \in [0, T)$ de artmayandır.

Lemma 3.1: (H1)-(H4) koşullarının sağlandığını kabul edilsin. $u(x, t)$ (3.1)-(3.3) probleminin bir çözümü olsun. O halde

$$i) u(x, t) > 0, (x, t) \in (0,1) \times (0, T)$$

$$ii) \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}, t) \neq 0, (\bar{x}, t) \in \{0,1\} \times (0, T)$$

İspat:

i) *İspat minimum prensibini takip etmekle kolaylıkla elde edilir.*

ii) *Aksi varsayılın. O halde en az bir $(\bar{x}, t_1) \in \{0,1\} \times (0, T)$ için*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}, t_1) = 0 \tag{3.6}$$

dır. Bu durumda

$$u(\bar{x}, t_1) \stackrel{(3.2)}{=} 0 \tag{3.7}$$

dır. Lemma 3.1- i) ye göre $u(x, t)$ fonksiyonu $(\bar{x}, t_1)$ noktasında mutlak minimum değerini alır. Sınır nokta hakkındaki Hopf lemması uyarınca

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\bar{x}, t_1) < 0 \quad (3.8)$$

dır [5,10]. Bu ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}, t_1) = 0 \quad (3.9)$$

ile çelişir. ■

Lemma 3.2: (H1)-(H4) koşullarının sağlandığı kabul edilsin. $(x, t) \in (0,1) \times (0, T)$ olmakla $u(x, t)$ fonksiyonu (3.1)-(3.3) probleminin bir çözümü olsun. Eğer bir $(x_0, t_0) \in (0,1) \times (0, T)$ için

$$u_x(x_0, t_0) = u_{xx}(x_0, t_0) = 0 \quad (3.10)$$

ise o halde öyle $\delta > 0$ sayısı vardır ki $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aralığında

$$u_x(x, t) = 0 \quad (3.11)$$

denkleminin x e göre çözümlerinin sayısı $(t_0, t_0 + \delta)$ aralığında $(t_0 - \delta, t_0)$ kısıyyla iki kat azalır yada sabit kalır.

İspat: $n + 1$ sayısı

$$D_x^{n+1}u(x_0, t_0) \neq 0 \quad (3.12)$$

yapan en küçük tam sayı olsun. Varsayım gereği burada $n > 1$ dir.

$u(x, t)$ fonksiyonu $(0,1) \times (0, T)$ de reel analitiktir [18]. Ayrıca $(0,1) \times (0, T)$ de $u_x(*, t)$ özdeş olarak sıfır değildir. $\alpha = \alpha(x_0, t_0)$, $\xi = x - x_0$, $\eta = t - t_0$ olarak

işaretlensin. Aşağıdaki Taylor serisini analiz etmek için Newton poligonu yöntemini kullanılsın [4,14]. İspat n sayısının çift yada tek olması durumuna göre farklılaşır.

$$0 = u_x(x, t) = \sum_{j=0, k=0}^{\infty} D_x^{j+1} D_t^k u(x_0, t_0) \frac{\xi^j \eta^k}{j! k!} \quad (3.13)$$

Varsayım gereği

$$D_x^{j+1} u(x_0, t_0) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1 \quad (3.14)$$

dır. (3.1) denklemi $n-1$ defa x e göre türetilsin. Daha sonra denkleme dahil olan türevler (x_0, t_0) noktasında (H1), (H2) ve (3.14) göz önünde bulundurularak değerlendirilirse

$$D_x^{j+1} D_t u(x_0, t_0) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-3 \quad (3.15)$$

$$D_x^{n-1} D_t u(x_0, t_0) = \alpha D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olsun. Daha önceki hesaplamalarla benzer şekilde

$$D_x D_t^k u(x_0, t_0) = 0, \quad 0 \leq k < m \quad (3.17)$$

ve

$$D_x^{n-2m+1} D_t^m u(x_0, t_0) = \alpha^m D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde bir polinom dahil edilsin.

$$q_n(v) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{v^k}{(n-2k)! k!}, \quad n \geq 1 \quad (3.19)$$

Şimdi ilk olarak n sayısının çift olduğu varsayılınsın. (3.13) deki ifade $D_x^{n+1} u(x_0, t_0)$

ile bölünerek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$0 = \frac{\xi^n}{n!} + \alpha \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\eta}{1!} + \dots + \alpha^m \frac{\eta^m}{m!} + h.o.t. \quad (3.20)$$

Burada $h.o.t.$ Newton poligonu yöntemine göre ihmal edilebilen yüksek mertebeli terimleri temsil etmektedir. Sonuncu ifadeye Newton poligonu yöntemini uygulamakla (3.20) denkleminin tüm çözümleri

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \xi^2 v \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. Burada v basit sifıra sahip q_n polinomunun sıfırlarıdır. Bu polinomun yalnızca $v < 0$ durumunda sifıra sahip olduğu açıktır. Dolayısıyla $\eta > 0$ durumunda (3.21) in çözümü yoktur. $\eta < 0$ halinde çözüm varsa çift sayıdadır.

İkinci olarak n sayısının tek olduğu varsayalım. $m + l$ sayısı $D_x D_t^{m+l} u(x_0, t_0) \neq 0$ yapan en küçük tam sayı olsun. Eğer böyle bir l sayısı varsa daha önceki tümevarımsal hesaplamalarla $l \geq 1$ olduğu görülür.

Benzer hesaplamalarla (3.13) deki ifadeyi $D_x^{n+1} u(x_0, t_0)$ ile bölmekle aşağıdaki ifade elde edilir.

$$0 = \frac{\xi^n}{n!} + \alpha \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\eta}{1!} + \dots + \alpha^m \frac{\xi \eta^m}{1! m!} + \beta \frac{\eta^{m+l}}{(m+l)!} + h.o.t. \quad (3.22)$$

Buradaki β sabit bir sayıdır. Tekrar Newton poligonu yöntemini uygulamakla (3.22) denkleminin tüm çözümleri $\beta = 0$ durumunda

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \xi^2 v \quad (3.23)$$

olarak $\beta \neq 0$ durumunda ise

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \xi^2 v \quad (3.24)$$

$$\xi = \eta^l w \quad (3.25)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak n sayısı çift olduğu durumda öyle $\delta > 0$ sayısı vardır ki (3.11) denkleminin $(-\delta, +\delta)$ aralığında ξ ye göre çözümlerin sayısı $\eta \in (0, +\delta)$ aralığında $\eta \in (-\delta, 0)$ kıyasla iki kat azalır. Benzer şekilde n sayısı tek olduğu durumda n sayısı çift olduğu durumdaki sonuca ek olarak (3.25) çözümü elde edilir. Bu durumda (3.11) denkleminin $(-\delta, +\delta)$ aralığında ξ ye göre çözümlerin sayısı her $\eta \in (-\delta, +\delta)$ için sabittir. Dolayısıyla (3.11) denkleminin $(-\delta, +\delta)$ aralığında ξ ye göre çözümlerin sayısı ya sabittir yada iki kat azalandır. ■

Teorem 3.1 in İspatı: Eğer

$$u_x(x_0, t_0) = 0 \neq u_{xx}(x_0, t_0) \quad (3.26)$$

ise kapalı fonksiyonlar hakkındaki teorem uyarınca $(x, t) = (x_0, t_0)$ noktasının belli bir civarında

$$u_x(x, t) = 0 \quad (3.27)$$

denkleminin çözümleri bir c sabiti ile

$$x - x_0 = c(t - t_0) + o(|t - t_0|^2) \quad (3.28)$$

analitik eğrisinden meydana gelir. O halde $\delta > 0$ sayısı için $0 \leq |t - t_0| \leq \delta$ aralığında $\#u(*, t)$ sabittir. Son bulunan analitik eğri $|t - t_0| \geq \delta$ için devam ettirilir (H6) ve Lemma 3.1- ii) göz önünde bulundurulursa kritik noktaların sayısının azaldığı görülür. Bu durumda $\#u(*, t)$ yalnızca

$$u_x(x_0, t_0) = u_{xx}(x_0, t_0) = 0 \quad (3.29)$$

durumda artabilir. Ancak bu durum da Lemma 2.2 den dolayı mümkün değildir. ■

3.2. Dinamik (Wentzell) Sınır Koşullarına Sahip Lineer Olmayan Bir Parabolik Tipli Problemin Konum Kritik Noktaları

Aşağıdaki parabolik tipli dinamik sınır koşullarına sahip başlangıç sınır değer problemi ele alınmış olsun.

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + F_1(x, t, u, u_x)u_x + F_2(t, u), (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty) \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} u(0, t) + B_0(t)u_t(0, t) + A_0(t)u_x(0, t) = 0 \\ u(1, t) + B_1(t)u_t(1, t) + A_1(t)u_x(1, t) = 0 \end{cases}, \quad t > 0 \quad (3.31)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < 1 \quad (3.32)$$

Yukarıdaki (3.30)-(3.32) probleminin aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin.

$$D = (0, 1) \times (0, \infty) \quad (3.33)$$

olmak üzere;

$$H1) a(x, t) \in C^w(D), a(x, t) > 0.$$

$$H2) F = F_1(x, t, u, u_x)u_x + F_2(t, u) \text{ olmak üzere } F_1 \in C^w(D \times \mathbb{R}^2), F_2 \in C^w((0, \infty) \times \mathbb{R}) \text{ ve } F > 0.$$

$$H3) A_0(t) > 0, A_1(t), B_0(t), B_1(t) < 0 \text{ ve } A_0, A_1, B_0, B_1 \in C^w((0, \infty)).$$

$$H4) u_0 \in C^w([0, 1]), u_0 \geq 0 \text{ ve } u_0 \not\equiv 0.$$

$$H5) u_0 \text{ başlangıç koşulu } [0, 1] \text{ de Morse fonksiyonudur. Yani sonlu sayıda } \tilde{x} \text{ için } \frac{\partial u_0}{\partial x}(\tilde{x}) = 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(\tilde{x}) \neq 0 \text{ dır.}$$

$$H6) \frac{\partial u_0}{\partial x}(\bar{x}) \neq 0, \bar{x} \in \{0, 1\}.$$

$$H7) u_x(0, t) > 0, u_x(1, t) < 0 \text{ ve } u_0(0) = u_0(1) = 0 \text{ dır.}$$

Teorem 3.2: (H1)-(H7) koşullarının sağlandığını varsayalım. $u(x, t)$ fonksiyonu (3.30)-(3.32) probleminin bir çözümü olsun. O halde $\#u(*, t)$, $t \in [0, T)$ de artmayandır.

Lemma 3.3: (H1)-(H4),(H7) koşullarının sağlandığı kabul edilsin. $u(x, t)$ fonksiyonu (3.30)-(3.32) probleminin bir çözümü olsun. O halde

$$u(x, t) > 0, \forall (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \quad (3.34)$$

dır.

İspat: Minimum prensibi gereği (3.30)-(3.32) probleminin $C^2(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ sınıfından olan $u(x, t)$ çözümü için

$$u(x, t) \geq \min \left\{ 0, \min_{\gamma_0} u(x, t), \min_{\gamma_1} u(x, t), \min_{\gamma_2} u(x, t) \right\}, \forall (x, t) \in \overline{D_T} \quad (3.35)$$

dır.

$$\min_{\gamma_0} u(x, t) = \min_{0 < x < 1} u_0(x) \stackrel{(H4)}{\geq} 0 \quad (3.36)$$

dır. Ayrıca $\forall (x, t) \in \gamma_1$ için

$$u(x, t) \geq 0 \quad (3.37)$$

dır. Aksini varsayarak bu eşitsizliğin doğruluğu gösterilir. Varsayalım ki

$$\exists (0, \bar{t}) \in \gamma_1 : u(0, \bar{t}) < 0 \quad (3.38)$$

dır. O halde

$$\exists t^* : u(0, t^*) > 0 \text{ ve } u_t(0, t^*) = 0 \quad (3.39)$$

yada

$$u_t(0, t) < 0 \quad (3.40)$$

dır.

$$u(0, t^*) + B_0(t^*) \underbrace{u_t(0, t^*)}_{=0} + A_0(t^*) u_x(0, t^*) = 0 \quad (3.41)$$

$$\underbrace{u(0, t^*)}_{>0} + \underbrace{A_0(t^*)}_{>0} \underbrace{u_x(0, t^*)}_{>0} = 0 \quad (3.42)$$

Son eşitlikten çelişki alınır. Şimdi diğer durum incelensin. Yani

$$u_t(0, t) < 0 \quad (3.43)$$

olsun. Bu durumda

$$\underbrace{u(0,0)}_{=0} + \underbrace{B_0(0)}_{<0} \underbrace{u_t(0,0)}_{<0} + \underbrace{A_0(0)}_{>0} \underbrace{u_x(0,0)}_{>0} = 0. \quad (3.44)$$

Bu eşitlikten de çelişki alınır. O halde

$$\forall (x, t) \in \gamma_1 \text{ için } u(x, t) \geq 0 \quad (3.45)$$

dır. Benzer şekilde $\forall (x, t) \in \gamma_2$ için

$$u(x, t) \geq 0 \quad (3.46)$$

dır. Aksi varsayılarak bu eşitsizliğin doğruluğu gösterilir. Varsayılın ki

$$\exists (1, \bar{t}) \in \gamma_2 : u(1, \bar{t}) < 0 \quad (3.47)$$

dır. O halde

$$\exists t^{**} : u(1, t^{**}) > 0 \text{ ve } u_t(1, t^{**}) = 0 \quad (3.48)$$

yada

$$u_t(1, t) < 0 \quad (3.49)$$

dır.

$$u(1, t^{**}) + B_1(t^{**}) \underbrace{u_t(1, t^{**})}_{=0} + A_1(t^{**})u_x(1, t^{**}) = 0 \quad (3.50)$$

$$\underbrace{u(1, t^{**})}_{>0} + \underbrace{A_1(t^{**})}_{<0} \underbrace{u_x(1, t^{**})}_{<0} = 0 \quad (3.51)$$

Son eşitlikten çelişki alınır. Şimdi diğer durum incelensin. Yani

$$u_t(1, t) < 0 \quad (3.52)$$

olsun.

$$\underbrace{u(1,0)}_{=0} + \underbrace{B_1(1)}_{<0} \underbrace{u_t(1,0)}_{<0} + \underbrace{A_1(1)}_{<0} \underbrace{u_x(1,0)}_{<0} = 0 \quad (3.53)$$

Bu eşitlikten de çelişki alınır. O halde

$$\forall (x, t) \in \gamma_2 \text{ için } u(x, t) \geq 0 \quad (3.54)$$

dır. O halde minimum prensibi gereği

$$u(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \overline{D_T} \quad (3.55)$$

dir. Şimdi

$$u(x, t) > 0, \forall (x, t) \in \text{int}D_T = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\} \quad (3.56)$$

olduğu gösterilmelidir. Aksi varsayılın. Varsayılın ki

$$\exists (x_1, t_1) \in \text{int}D_T : u(x, t) \leq 0 \quad (3.57)$$

dır.

O halde $u(x, t)$ fonksiyonu (x_1, t_1) noktasında mutlak minimum değerini alır.

Dolayısıyla

$$u_t(x_1, t_1) = u_x(x_1, t_1) = 0 \quad (3.58)$$

$$u_{tt}(x_1, t_1) \geq 0, u_{xx}(x_1, t_1) \geq 0 \quad (3.59)$$

dır.

(3.30) denklemi $(x, t) = (x_1, t_1)$ noktasında değerlendirilerek

$$u_t(x_1, t_1) = a(x_1, t_1)u_{xx}(x_1, t_1) + F(x_1, t_1, u(x_1, t_1), u_x(x_1, t_1)) \quad (3.60)$$

(H_2)
eşitliği elde edilir. Son eşitlikte $F \gtrsim 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa çelişki elde edilir. ■

Lemma 3.4: (H1)-(H4) koşullarının sağlandığı kabul edilsin. $(x, t) \in (0, 1) \times (0, T)$ olmakla $u(x, t)$ fonksiyonu (3.30)-(3.32) probleminin bir çözümü olsun. Eğer bir $(x_0, t_0) \in (0, 1) \times (0, T)$ için

$$u_x(x_0, t_0) = u_{xx}(x_0, t_0) = 0 \quad (3.61)$$

ise o halde öyle $\delta > 0$ sayısı vardır ki $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aralığında

$$u_x(x, t) = 0 \quad (3.62)$$

denkleminin x e göre çözümlerinin sayısı $(t_0, t_0 + \delta)$ aralığında $(t_0 - \delta, t_0)$ kısıyyla iki kat azalır yada sabit kalır.

İspat: $n + 1$ sayısı

$$D_x^{n+1}u(x_0, t_0) \neq 0 \quad (3.63)$$

yapan en küçük tam sayı olsun. Varsayım gereği burada $n > 1$ dir. $u(x, t)$ fonksiyonu $(0,1) \times (0, T)$ de reel analitiktir [18]. Ayrıca $(0,1) \times (0, T)$ de $u_x(*, t)$ özdeş olarak sıfır değildir.

$\alpha = a(x_0, t_0)$, $\xi = x - x_0$, $\eta = t - t_0$ olarak işaretlensin. Aşağıdaki Taylor serisini analiz etmek için Newton poligonu yöntemi kullanılsın [4,14]. İspat n sayısının çift yada tek olması durumuna göre farklılaşır.

$$0 = u_x(x, t) = \sum_{j=0, k=0}^{\infty} D_x^{j+1} D_t^k u(x_0, t_0) \frac{\xi^j \eta^k}{j! k!} \quad (3.64)$$

Varsayım gereği

$$D_x^{j+1}u(x_0, t_0) = 0, \quad 0 \leq j \leq n - 1 \quad (3.65)$$

dir.

(3.30) denklemi $n - 1$ defa x e göre türetilsin. Daha sonra denkleme dahil olan türevler(x_0, t_0) noktasında (H1), (H2) ve (3.65) göz önünde bulundurularak değerlendirilirse

$$D_x^{j+1}D_t u(x_0, t_0) = 0, \quad 0 \leq j \leq n - 3 \quad (3.66)$$

$$D_x^{n-1}D_t u(x_0, t_0) = \alpha D_x^{n+1}u(x_0, t_0) \neq 0 \quad (3.67)$$

elde edilir. Gerçektende

$$\begin{aligned}
D_x^{p-2} D_t u(x_0, t_0) &= \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p-2}{k} D_x^{p-2-k} a(x_0, t_0) \underbrace{D_x^k u_{xx}(x_0, t_0)}_{=0} \\
&+ \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p-2}{k} D_x^{p-2-k} F_1(x_0, t_0, u(x_0, t_0), u_x(x_0, t_0)) \underbrace{D_x^k u_x(x_0, t_0)}_{=0} \\
&+ \sum_{k=0}^{p-3} \binom{p-3}{k} D_x^{p-3-k} F_{2u}(t_0, u(x_0, t_0)) \underbrace{D_x^k u_x(x_0, t_0)}_{=0} = 0,
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^{p-2}} \right\} \quad (3.68)$$

$p = 3, 4, \dots, n$

ve

$$\begin{aligned}
D_x^{n-1} D_t u(x_0, t_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} D_x^{n-1-k} a(x_0, t_0) \underbrace{D_x^k u_{xx}(x_0, t_0)}_{=0, k \leq n-2} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} D_x^{n-1-k} F_1(x_0, t_0, u(x_0, t_0), u_x(x_0, t_0)) \underbrace{D_x^k u_x(x_0, t_0)}_{=0, k \leq n-2} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} D_x^{n-2-k} F_{2u}(t_0, u(x_0, t_0)) \underbrace{D_x^k u_x(x_0, t_0)}_{=0, k \leq n-2}
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^{n-1}} \right\} \quad (3.69)$$

$k = n - 1$ durumunda

$$D_x^{n-1} D_t u(x_0, t_0) = \underbrace{a(x_0, t_0)}_{>0} \underbrace{D_x^{n+1} u(x_0, t_0)}_{\neq 0} \neq 0 \quad (3.70)$$

olduğu görülür.

$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olsun. Daha önceki hesaplamalarla benzer şekilde

$$D_x D_t^k u(x_0, t_0) = 0, \quad 0 \leq k < m \quad (3.71)$$

ve

$$D_x^{n-2m+1} D_t^m u(x_0, t_0) = \alpha^m D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0 \quad (3.72)$$

elde edilir. Son eşitlik daha açık şekilde ifade edilirse
 n sayısı tek ise

$$D_x^2 D_t^m u(x_0, t_0) = \alpha^m D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0, \quad m = \frac{n-1}{2} \quad (3.73)$$

n sayısı çift ise

$$D_x D_t^m u(x_0, t_0) = \alpha^m D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0, \quad m = \frac{n}{2} \quad (3.74)$$

dir. Şimdi aşağıdaki türevler hesaplınsın.

$$\left. \begin{aligned} D_x D_t u(x_0, t_0) &= D_x a(x_0, t_0) u_{xx}(x_0, t_0) + a(x_0, t_0) \underbrace{D_x u_{xx}(x_0, t_0)}_{=D_x^3 u(x_0, t_0)=0} \\ &+ D_x F_1(x_0, t_0, u(x_0, t_0), u_x(x_0, t_0)) \underbrace{u_x(x_0, t_0)}_{=0} \\ &+ F_1(x_0, t_0, u(x_0, t_0), u_x(x_0, t_0)) D_x u_x(x_0, t_0) \\ &+ \underbrace{D_x F_2(t_0, u(x_0, t_0))}_{=F_{2u}(t_0, u(x_0, t_0)) u_x(x_0, t_0)=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned}
D_x D_t^2 u(x_0, t_0) &= D_t a(x_0, t_0) D_x^3 u(x_0, t_0) + a(x_0, t_0) \underbrace{D_t D_x^3 u(x_0, t_0)}_{=D_x^3 D_t u(x_0, t_0)=0} \\
&+ D_x D_t a(x_0, t_0) u_{xx}(x_0, t_0) + D_x a(x_0, t_0) \underbrace{D_t u_{xx}(x_0, t_0)}_{=D_x^2 D_t u(x_0, t_0)=0} \\
&+ D_t F_{1x}(x_0, t_0, u(x_0, t_0), u_x(x_0, t_0)) \underbrace{u_x(x_0, t_0)}_{=0} \\
&+ F_1(x_0, t_0, u(x_0, t_0), u_x(x_0, t_0)) \underbrace{D_t u_{xx}(x_0, t_0)}_{=D_x^2 D_t u(x_0, t_0)=0} \\
&+ \underbrace{D_t F_{2x}(t_0, u(x_0, t_0))}_{=D_t[F_{2u}(t_0, u(x_0, t_0))u_x(x_0, t_0)]=0} = 0
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
D_x D_t^2 u(x_0, t_0) &= D_t a(x_0, t_0) D_x^3 u(x_0, t_0) + a(x_0, t_0) D_t D_x^3 u(x_0, t_0) + \dots \\
&= a(x_0, t_0) [a(x_0, t_0) u_{xx}(x_0, t_0) + F]_{xxx} + \dots
\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$D_x D_t^2 u(x_0, t_0) = a^2(x_0, t_0) D_x^5 u(x_0, t_0) + \dots \tag{3.78}$$

n sayısının tek olduğu durumda ($m = \frac{n-1}{2}$)

$$\begin{aligned}
D_x D_t^m u(x_0, t_0) &= a^m(x_0, t_0) D_x^{2m+1} u(x_0, t_0) + \dots \\
&= a^m(x_0, t_0) D_x^n u(x_0, t_0) + \dots = 0
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
D_x^2 D_t^m u(x_0, t_0) &= a^m(x_0, t_0) D_x^{2m+2} u(x_0, t_0) + \dots \\
&= a^m(x_0, t_0) \underbrace{D_x^{n+1} u(x_0, t_0)}_{\neq 0} + \underbrace{\dots}_{=0}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$D_x^2 D_t^m u(x_0, t_0) = a^m(x_0, t_0) D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \tag{3.81}$$

n sayısının çift olduğu durumda ($m = \frac{n}{2}$)

$$\left. \begin{aligned} D_x D_t^m u(x_0, t_0) &= a^m(x_0, t_0) D_x^{2m+1} u(x_0, t_0) + \dots \\ &= a^m(x_0, t_0) \underbrace{D_x^{n+1} u(x_0, t_0)}_{\neq 0} \underbrace{+ \dots}_{=0} \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

$$D_x D_t^m u(x_0, t_0) = a^m(x_0, t_0) D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \quad (3.83)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$D_x^i u(x_0, t_0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.84)$$

$$D_x^j D_t u(x_0, t_0) = 0, \quad 1 \leq j \leq n-2 \quad (3.85)$$

$$D_x D_t^k u(x_0, t_0) = 0, \quad 0 \leq k \leq m-1 \quad (3.86)$$

$$D_x^{n-1} D_t u(x_0, t_0) = \alpha D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0 \quad (3.87)$$

$$D_x^2 D_t^m u(x_0, t_0) = \alpha^m D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0, \quad m = \frac{n-1}{2}, \quad n \text{ sayısı tek} \quad (3.88)$$

$$D_x D_t^m u(x_0, t_0) = \alpha^m D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0, \quad m = \frac{n}{2}, \quad n \text{ sayısı çift} \quad (3.89)$$

dir. Aşağıdaki şekilde bir polinom dahil edilsin.

$$q_n(v) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{v^k}{(n-2k)! k!}, \quad n \geq 1 \quad (3.90)$$

Şimdi ilk olarak n sayısının çift olduğu varsayalım ($m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$). Hesaplanmış olan türevler (3.64) deki denklemde göz önüne alırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$$\begin{aligned}
0 = u_x(x, t) &= \sum_{j=0, k=0}^{\infty} D_x^{j+1} D_t^k u(x_0, t_0) \frac{\xi^j \eta^k}{j! k!} \\
&= \underbrace{D_x u(x_0, t_0) + \dots + \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} D_x^n u(x_0, t_0)}_{=0} + \frac{\xi^n}{n!} \underbrace{D_x^{n+1} u(x_0, t_0)}_{\neq 0} + \dots \\
&\quad + \underbrace{\eta D_x D_t u(x_0, t_0) + \dots + \frac{\xi^{n-3} \eta}{(n-3)!} D_x^{n-2} D_t u(x_0, t_0)}_{=0} \\
&\quad + \frac{\xi^{n-2} \eta}{(n-2)!} \underbrace{D_x^{n-1} D_t u(x_0, t_0)}_{= \alpha D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0} + \dots \\
&\quad + \underbrace{\frac{\eta^2}{2!} D_x D_t^2 u(x_0, t_0) + \dots + \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} D_x D_t^{m-1} u(x_0, t_0)}_{=0} \\
&\quad + \frac{\eta^m}{m!} \underbrace{D_x D_t^m u(x_0, t_0)}_{= \alpha^m D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0} + \dots
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Son denklem $D_x^{n+1} u(x_0, t_0)$ ile bölünerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$0 = \frac{\xi^n}{n!} + \alpha \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\eta}{1!} + \dots + \alpha^m \frac{\eta^m}{m!} + h.o.t. \tag{3.92}$$

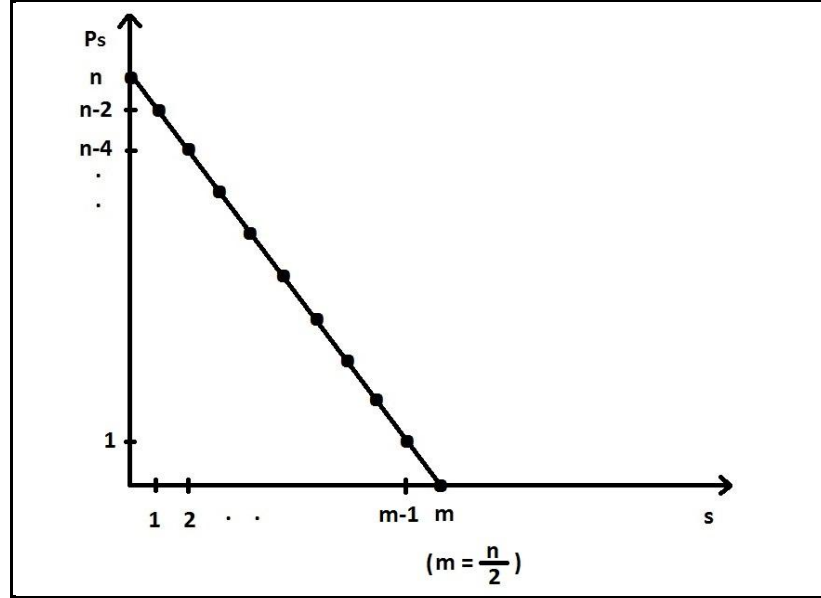
Burada $h.o.t.$ Newton poligonu yöntemine göre ihmal edilebilen yüksek mertebeli terimleri temsil etmektedir. Sonuncu ifadeye Newton poligonu yöntemi uygulansın.

$$F(\xi, \eta) = \sum_{s=0}^m F_s(\xi) \eta^s = \frac{\xi^n}{n!} + \alpha \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\eta}{1!} + \dots + \alpha^m \frac{\eta^m}{m!} = 0 \tag{3.93}$$

$$F_s(\xi) = \sum_{r=0} F_{rs} \xi^{p_s + \frac{r}{q}} \tag{3.94}$$

Tablo 3.1: Denklem (3.92) İçin Katsayılar ve Kuvvetler.

$F_0(\xi) = \frac{\xi^n}{n!}$	$F_1(\xi) = \alpha \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)! 1!}$	$F_2(\xi) = \alpha^2 \frac{\xi^{n-4}}{(n-4)! 2!}$	$F_m(\xi) = \frac{\alpha^m}{m!}$
$F_{00}(\xi) = \frac{1}{n!}$	$F_{01}(\xi) = \frac{\alpha}{(n-2)!}$	$F_{02}(\xi) = \frac{\alpha^2}{(n-4)! 2!}$	$F_{0m}(\xi) = \frac{\alpha^m}{m!}$
$p_0 = n$	$p_1 = n - 2$	$p_2 = n - 4$	$p_m = 0$



Şekil 3.4: Denklem (3.92) İçin Newton Poligonu.

$$p_0 + 0\varepsilon = p_1 + 1\varepsilon = p_2 + 2\varepsilon = \dots = p_m + m\varepsilon \quad (3.95)$$

Diagram ve (3.95) lineer denklemleri göz önüne alınırsa

$$\varepsilon = 2 \quad (3.96)$$

olarak bulunur. O halde çözüm

$$\eta = \eta_\varepsilon \xi^\varepsilon + o(\xi^\varepsilon) = \eta_2 \xi^2 + o(\xi^2) \quad (3.97)$$

şeklindedir. Şimdi η_2 sayısı belirlenmelidir. Bunun için ξ ye göre dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları toplamı sıfıra eşitlensin.

$$\sum_{k=0}^m F_{0k} \eta_2^k = 0 \quad (3.98)$$

$$\frac{1}{n!} + \frac{\alpha}{(n-2)!} \eta_2 + \frac{\alpha^2}{(n-4)! 2!} \eta_2^2 + \dots + \frac{\alpha^m}{m!} \eta_2^m = 0 \quad (3.99)$$

$\alpha \eta_2 = v$ olarak işaretlenirse

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-2)!} v + \frac{1}{(n-4)! 2!} v^2 + \dots + \frac{v^m}{m!} = 0 \quad (3.100)$$

elde edilir. Bu ise $q_n(v)$ polinomunun kendisidir. Yukarıdaki denklemin çözümü bu polinomun sıfırlarına karşılık gelir. O halde çözüm

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \xi^2 v \quad (3.101)$$

olarak elde edilir. Burada v basit sifira sahip q_n polinomunun sıfırlarıdır. Bu polinomun yalnızca $v < 0$ durumunda sifira sahip olduğu açıktır. Dolayısıyla $\eta > 0$ durumunda (3.101) denkleminin çözümü yoktur. $\eta < 0$ halinde çözüm varsa çift sayıdadır. İkinci olarak n sayısının tek olduğu varsayalım. $m + l$ sayısı

$$D_x D_t^{m+l} u(x_0, t_0) \neq 0 \quad (3.102)$$

yapan en küçük tam sayı olsun. Eğer böyle bir l sayısı varsa daha önceki tümevarımsal hesaplamalarla $l \geq 1$ olduğu görülür.

$$\left. \begin{aligned} D_x D_t^m u(x_0, t_0) &= a^m(x_0, t_0) D_x^{2m+1} u(x_0, t_0) + \dots \\ &= a^m(x_0, t_0) D_x^n u(x_0, t_0) + \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.103)$$

$$\left. \begin{aligned} D_x D_t^{m+l} u(x_0, t_0) &= a^m(x_0, t_0) D_x^{2m+2l+1} u(x_0, t_0) + \dots \\ &= a^m(x_0, t_0) D_x^{n+2l} u(x_0, t_0) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.104)$$

Daha önceki hesaplamalarla

$$D_x^2 D_t^m u(x_0, t_0) = \alpha^m D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0 \quad (3.105)$$

$$D_x^2 D_t^k u(x_0, t_0) = 0, \quad 0 \leq k < m, \quad m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} \quad (3.106)$$

olduğu bilinmektedir. Hesaplanmış olan türevler (3.64) de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 0 = u_x(x, t) &= \sum_{j=0, k=0}^{\infty} D_x^{j+1} D_t^k u(x_0, t_0) \frac{\xi^j \eta^k}{j! k!} \\
 &= \underbrace{D_x u(x_0, t_0) + \dots + \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} D_x^n u(x_0, t_0)}_{=0} + \frac{\xi^n}{n!} \underbrace{D_x^{n+1} u(x_0, t_0)}_{\neq 0} + \dots \\
 &\quad + \underbrace{\eta D_x D_t u(x_0, t_0) + \dots + \frac{\xi^{n-3} \eta}{(n-3)!} D_x^{n-2} D_t u(x_0, t_0)}_{=0} \\
 &\quad + \frac{\xi^{n-2} \eta}{(n-2)!} \underbrace{D_x^{n-1} D_t u(x_0, t_0)}_{= \alpha D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0} + \dots \\
 &\quad \underbrace{\frac{\eta^2}{2!} D_x D_t^2 u(x_0, t_0) + \dots + \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} D_x D_t^{m-1} u(x_0, t_0)}_{=0} + \frac{\eta^m}{m!} \underbrace{D_x D_t^m u(x_0, t_0)}_{= \alpha^m D_x^n u(x_0, t_0) = 0} \\
 &\quad + \frac{\eta^{m+1}}{(m+1)!} \underbrace{D_x D_t^{m+1} u(x_0, t_0)}_{= \alpha^{m+1} D_x^{n+2} u(x_0, t_0)} + \dots + \frac{\eta^{m+l}}{(m+l)!} \underbrace{D_x D_t^{m+l} u(x_0, t_0)}_{= \alpha^{m+l} D_x^{n+2l} u(x_0, t_0)} + \dots \\
 &\quad + \underbrace{\xi \frac{\eta^2}{2!} D_x^2 D_t^2 u(x_0, t_0) + \dots + \xi \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} D_x^2 D_t^{m-1} u(x_0, t_0)}_{=0} \\
 &\quad + \xi \frac{\eta^m}{m!} \underbrace{D_x^2 D_t^m u(x_0, t_0)}_{= \alpha^m D_x^{n+1} u(x_0, t_0) \neq 0}
 \end{aligned} \quad (3.107)$$

(3.107) deki denklem bulunur ve bu denklem $D_x^{n+1}u(x_0, t_0)$ ile bölünürse aşağıdaki denklem elde edilir ($m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$).

$$0 = \frac{\xi^n}{n!} + \alpha \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\eta}{1!} + \dots + \alpha^m \frac{\xi \eta^m}{1! m!} + \beta \frac{\eta^{m+l}}{(m+l)!} + h. o. t. \quad (3.108)$$

Buradaki β sabiti $\alpha^{m+l} \frac{D_x^{n+2l}u(x_0, t_0)}{D_x^{n+1}u(x_0, t_0)}$ olan bir reel sayıdır. Tekrar Newton poligonu yöntemini uygulamakla (3.108) denkleminin tüm çözümleri

$\beta = 0$ durumunda

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \xi^2 v \quad (3.109)$$

$\beta \neq 0$ durumunda

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \xi^2 v \quad (3.110)$$

$$\xi = \eta^l w \quad (3.111)$$

olarak elde edilir. Burada

$$w = -\frac{\beta m!}{\alpha^m (m+l)!} \quad (3.112)$$

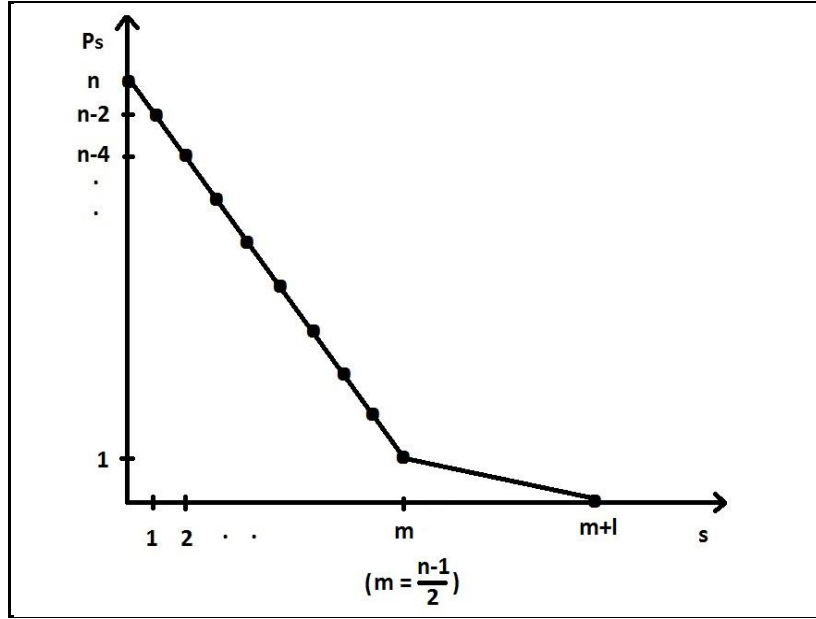
dir. (3.108) deki ifadeye Newton poligonu yöntemi uygulansın.

$$F(\xi, \eta) = \sum_{s=0}^m F_s(\xi) \eta^s = \frac{\xi^n}{n!} + \alpha \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\eta}{1!} + \dots + \alpha^m \frac{\xi \eta^m}{1! m!} + \beta \frac{\eta^{m+l}}{(m+l)!} = 0 \quad (3.113)$$

$$F_s(\xi) = \sum_{r=0} F_{rs} \xi^{p_s + \frac{r}{q}} \quad (3.114)$$

Tablo 3.2: Denklem (3.108) İçin Katsayılar ve Kuvvetler.

$F_0(\xi) = \frac{\xi^n}{n!}$	$F_1(\xi) = \alpha \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!}$	$F_m(\xi) = \alpha^m \frac{\xi}{m!}$	$F_{m+l}(\xi) = \frac{\beta}{(m+l)!}$
$F_{00} = \frac{1}{n!}$	$F_{01} = \frac{\alpha}{(n-2)!}$	$F_{0m} = \frac{\alpha^m}{m!}$	$F_{0m+l} = \frac{\beta}{(m+l)!}$
$p_0 = n$	$p_1 = n-2$	$p_m = 1$	$p_{m+l} = 0$



Şekil 3.5: Denklem (3.108) İçin Newton Poligonu.

$$p_0 + 0\varepsilon = p_1 + 1\varepsilon = p_2 + 2\varepsilon = \dots = p_m + m\varepsilon \quad (3.115)$$

$$p_m + m\varepsilon = p_{m+l} + (m+l)\varepsilon \quad (3.116)$$

Diagram ve (3.115)-(3.116) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\varepsilon_1 = 2 \quad (3.117)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{l} \quad (3.118)$$

olarak bulunur. O halde çözümler

$$\eta = \eta_\varepsilon \xi^\varepsilon + o(\xi^\varepsilon) = \eta_2 \xi^2 + o(\xi^2) \quad (3.119)$$

ve

$$\eta = \eta_\varepsilon \xi^\varepsilon + o(\xi^\varepsilon) = \eta_{\frac{1}{l}} \xi^{\frac{1}{l}} + o\left(\xi^{\frac{1}{l}}\right) \quad (3.120)$$

şeklindedir. Şimdi η_2 ve $\eta_{\frac{1}{l}}$ sayıları belirlenmelidir. Bunun için ξ ye göre dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları toplamı sıfıra eşitlensin.

$$\sum_{k=0}^m F_{0k} \eta_2^k = 0 \quad (3.121)$$

$$\frac{1}{n!} + \frac{\alpha}{(n-2)!} \eta_2 + \frac{\alpha^2}{(n-4)! 2!} \eta_2^2 + \dots + \frac{\alpha^m}{m!} \eta_2^m = 0 \quad (3.122)$$

$\alpha \eta_2 = v$ olarak işaretlemekle

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-2)!} v + \frac{1}{(n-4)! 2!} v^2 + \dots + \frac{v^m}{m!} = 0 \quad (3.123)$$

elde edilir. Bu ise $q_n(v)$ polinomunun kendisidir. Yukarıdaki denklemin çözümü bu polinomun sıfırlarına karşılık gelir.

O halde ilk çözüm

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \xi^2 v \quad (3.124)$$

şeklindedir. Daha sonra $\eta_{\frac{1}{l}}$ sayısının belirlenmesiyle diğer çözüm elde edilir.

$$F_{0m} \eta_{\frac{1}{l}}^m + F_{0m+l} \eta_{\frac{1}{l}}^{m+l} = 0 \quad (3.125)$$

$$\frac{\alpha^m}{m!} \eta_{\frac{1}{l}}^m + \frac{\beta}{(m+l)!} \eta_{\frac{1}{l}}^{m+l} = 0 \quad (3.126)$$

$$\eta_{\frac{1}{l}}^m \left[\frac{\alpha^m}{m!} + \frac{\beta}{(m+l)!} \eta_{\frac{1}{l}}^l \right] = 0 \quad (3.127)$$

Dolayısıyla

$$\eta_{\frac{1}{l}} = \left[-\frac{\alpha^m (m+l)!}{\beta m!} \right]^{\frac{1}{l}} \quad (3.128)$$

dir. O halde diğer çözüm

$$\eta = \eta_{\frac{1}{l}} \xi^{\frac{1}{l}} + o\left(\xi^{\frac{1}{l}}\right) \quad (3.129)$$

şeklindedir. Yani

$$\xi = -\frac{\beta m!}{\alpha^m (m+l)!} \eta^l \quad (3.130)$$

dir. Sonuç olarak n sayısı çift olduğu durumda öyle $\delta > 0$ sayısı vardır ki

$$u_x(x, t) = 0 \quad (3.131)$$

denkleminin $(-\delta, +\delta)$ aralığında ξ ye göre çözümlerin sayısı $\eta \in (0, +\delta)$ aralığında $\eta \in (-\delta, 0)$ kıyasla iki kat azalır. Çünkü $\eta \in (-\delta, 0)$ iken

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \xi^2 v \quad (3.132)$$

denkleminin ξ ye göre çözüm varsa bu çözümlerin sayısı ikidir. $\eta \in (0, +\delta)$ iken (3.132) denkleminin ξ ye çözümü yoktur. Yani çözümlerin sayısı sıfırdır.

Benzer şekilde n sayısı tek olduğu durumda n sayısı çift olduğu durumdaki sonuca ek olarak (3.130) çözümü alınır. Bu durumda (3.131) denkleminin $(-\delta, +\delta)$ aralığında ξ ye göre çözümlerin sayısı her $\eta \in (-\delta, +\delta)$ için sabittir.

Dolayısı ile (3.131) denkleminin $(-\delta, +\delta)$ aralığında ξ ye göre çözümlerin sayısı ya sabittir yada iki kat azalandır. ■

Teorem 3.2 in İspatı: Eğer

$$u_x(x_0, t_0) = 0 \neq u_{xx}(x_0, t_0) \quad (3.133)$$

ise kapalı fonksiyonlar hakkındaki teoremi uyarınca $(x, t) = (x_0, t_0)$ noktasının bir civarında

$$u_x(x, t) = 0 \quad (3.134)$$

denkleminin çözümleri bir c sabiti ile

$$x - x_0 = c(t - t_0) + o(|t - t_0|^2) \quad (3.135)$$

analitik eğrisinden meydana gelir. Yani bu denklemin tüm çözümleri bu analitik eğri üzerindedir.

O halde $\delta > 0$ sayısı için $0 \leq |t - t_0| \leq \delta$ aralığında $\#u(*, t)$ sabittir. Son bulunan analitik eğri $|t - t_0| \geq \delta$ için devam ettirilir (H6) ve (H7) göz önünde bulundurulursa kritik noktaların sayısının azaldığı görülür.

Bu durumda $\#u(*, t)$ yalnızca

$$u_x(x_0, t_0) = u_{xx}(x_0, t_0) = 0 \quad (3.136)$$

durumda artabilir. Ancak bu durum da Lemma 3.4 den dolayı mümkün değildir. ■

Örnek 3.1: Aşağıdaki şekilde bir problem verilmiş olsun.

$$u_t = u_{xx} + 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3.137)$$

$$u(0, t) - (e^{-8\pi^2 t} + t + 1)u_t(0, t) + \frac{1}{3\pi} e^{\pi^2 t} u_x(0, t) = 0 \quad (3.138)$$

$$u(1, t) - (e^{-8\pi^2 t} + t + 1)u_t(1, t) - \frac{1}{3\pi} e^{\pi^2 t} u_x(1, t) = 0 \quad (3.139)$$

$$u_0(x) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \quad (3.140)$$

Bu problemin çözümü

$$\tilde{u}(x, t) = 3e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + e^{-9\pi^2 t} \sin(3\pi x) + t \quad (3.141)$$

dir. Bu problem (H1)-(H7) koşullarının tamamını sağlar. Bu problemin konum kritik noktaları incelensin.

$$\tilde{u}_x(x, t) = 0 \implies e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) + e^{-9\pi^2 t} \cos(3\pi x) = 0 \quad (3.142)$$

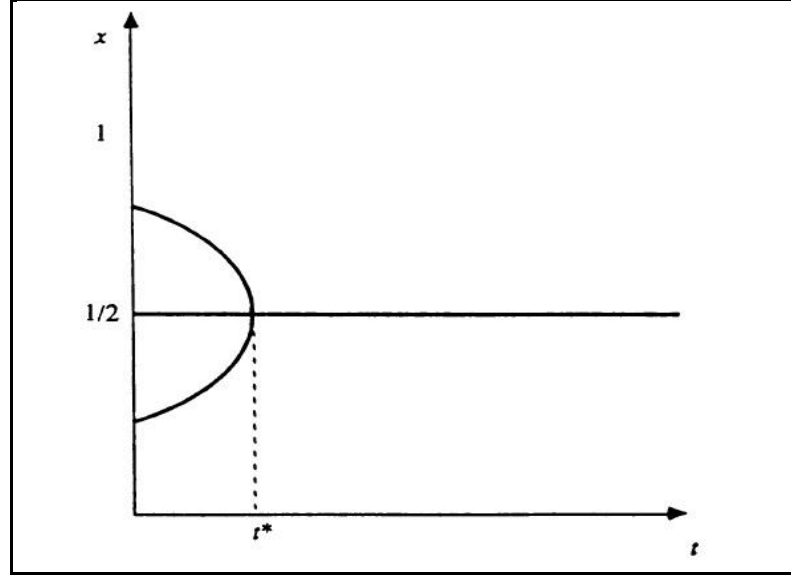
$$\begin{aligned} \cos(3\pi x) &= 4\cos^3(\pi x) - 3\cos(\pi x) \\ \implies \cos(\pi x) [4\cos^2(\pi x)e^{-8\pi^2 t} - 3e^{-8\pi^2 t} + 1] &= 0 \end{aligned} \quad (3.143)$$

Buradan

$$\cos(\pi x) = 0 \quad (3.144)$$

$$\cos(\pi x) = \pm \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} e^{8\pi^2 t}} \quad (3.145)$$

olarak elde edilir. $t^* = \frac{\ln 3}{8\pi^2}$ olarak işaretlensin.



Şekil 3.6: Örnek 3.1 deki Dinamik Sınır Koşullu Problemin Konum Kritik Noktaları.

Dolayısıyla Örnek 3.1 de verilen problemin $\tilde{u}(x, t)$ çözümü için $0 \leq t < t^* = \frac{\ln 3}{8\pi^2}$ iken konum kritik noktalarının sayısı ($x = \frac{\pi}{2}$ dahil) üç, $t \geq t^*$ iken ise birdir.

4. SONUÇ

Bu çalışmanın esas amacı dinamik sınır koşullu lineer olmayan parabolik tipli bir problemin çözümünün konum kritik noktalarının sayısının zaman içindeki değişimi incelemektir. Yapılan bu çalışmanın sonucunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- Bir boyutlu lineer olmayan ısı denklemi için bir dinamik sınır koşulları altında problemin çözümleri pozitifdir.
- Dinamik sınır koşuluna sahip lineer olmayan bir boyutlu ısı denkleminin çözümünün konum kritik noktaların sayısı zaman içinde artmayandır.
- Sonuçlar kesin çözüme sahip dinamik sınır koşullu bir parabolik problem ile desteklenmiştir.

Bu sonuçlar neticesinde bir öneri aşağıdaki şekilde verilebilir.

Merkezi-simetrik bir bölgede dinamik sınır koşullarına sahip ısı denkleminin çözümünün konum kritik noktalarının monotonluk özelliğine sahip olması incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Angenent S. B., (1986), "The Morse-Smale property for a semi-linear parabolic equation", J. Differantiel Equations, 62 (3), 427-442.
- [2] Domokos G, (2015), "Monotonicity of spatial critical points evolving under curvature-driven flows", J. Nonlinear Sci., 25 (2), 247-275.
- [3] Cannon J. R., (1984), "The one-dimensional heat equation", Addison-Wesley Publishing Company, 1st Edition, Menlo Park, California.
- [4] Chow S. N., Hale J. K., (1982), "Methods of bifurcation theory", Springer-Verlag, 1st Edition, New York.
- [5] Li P., Yau S. T., (1986), "On the Parabolic Kernel of the Schrödinger Operator", Acta Math, 156 (4), 153-201.
- [6] Henry D., (1985), "Some infinite dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic partial differential equations", J. Differantiel Equations, 59 (2), 165-205.
- [7] Matano H., (1982), "Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 29 (2), 401-441.
- [8] Magnanini R., Sakaguchi S., (1997), "The spatial critical points not moving along the heat flow", J. Anal. Math., 71 (1), 237-261.
- [9] Magnanini R., Sakaguchi S., (1999), "The spatial critical points not moving along the heat flow. II. The centrosymmetric case", Mathematische Zeitschrift, 230 (4), 695-712.
- [10] Protter M. H., Weinberger H. F., (1967), "Maximum principles in differential equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [11] Rosenbloom P. C., Widder D. V., (1959), "Expansions in terms of heat polynomials and associated functions", Trans. Amer. Math. Soc., 92 (1), 220-266.
- [12] Walter W., (1970), "Differential and integral inequalities", Springer-Verlag, 1st Edition, New York.
- [13] Turyn L., (1989), "Spatial critical points of solutions of a one-dimensional nonlinear parabolic problem", Proc. Amer. Math. Soc., 106 (4), 1003-1009.

- [14] Vainberg M. M., Trenogin V. A., (1962), "The methods of Lyapunov and Schmidt in the theory of non-linear equations and their further development", Russian Math. Surveys, 17 (2), 1-60.
- [15] Vladimirov V.S., (1983), "Equations of mathematical physics", Pure and Applied Mathematics, 2nd Edition, Moscow.
- [16] Sakaguchi S., (2002), "Behaviors of the spatial critical points and zeros of solutions to diffusion equations", Amer. Math. Soc., 54 (3), 249-264.
- [17] Angenent S. B, Fiedler B., (1988), "The dynamics of rotating waves in scalar reaction diffusion equations", Trans. Amer. Math. Soc., 307 (2), 545-568.
- [18] Friedman A., (1958), "On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations", J. Math. Mech., 7 (1), 43-59.
- [19] John F., (1982), "Partial Differential Equations", Springer-Verlag, 4th Edition, New York.
- [20] Nickel K., (1962), "Gestaltaussagen über Lösungen parabolischer Differentialgleichungen", J. Reine Angew Math., 211 (1), 78-94.

ÖZGEÇMİŞ

Deniz DEMİRCANLI 1992 yılında İstanbul ilinin Kadıköy ilçesinde dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Gebze’de tamamladı. 2011 yılında Gebze Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü’nde lisans eğitime başladı. 2015 yılında lisans eğitimini başarı ile tamamlayarak aynı yıl yüksek lisans eğitime Gebze Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda başladı. Halen eğitime devam etmektedir.