

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MÜKEMMEL İLETKEN KEYFİ KESİTLİ SİLİNDİRİK CİSİMLER
İÇİN REGÜLERLEŞTİRİLMİŞ T MATRİSİ YÖNTEMİ

MEHMET EMİN GEÇER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DOÇ. DR. FATİH DİKMEN

ARALIK 2023

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MÜKEMMEL İLETKEN KEYFİ KESİTLİ SİLİNDİRİK
CİSİMLER İÇİN REGÜLERLEŞTİRİLMİŞ T MATRİSİ
YÖNTEMİ

MEHMET EMİN GEÇER

YÜKSEK LİSANS
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMANI: DOÇ. DR. FATİH DİKMEN

ARALIK 2023

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL

**REGULARIZED T MATRIX METHOD FOR PERFECT
ELECTRICALLY CONDUCTING CYLINDRICAL
BODIES WITH ARBITRARY CROSS-SECTION**



MEHMET EMİN GEÇER

A THESIS OF MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF ELECTRONICS ENGINEERING

ADVISOR: DOÇ. DR. FATİH DİKMEN

DECEMBER 2023



YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun 04/12/2023 tarih ve 2023/22 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 22/12/2023 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Mehmet Emin GEÇER'in tez çalışması Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç Dr. Fatih DİKMEN

ÜYE

: Prof. Dr. Ali ALKUMRU

ÜYE

: Dr. Öğr. Üyesi Kamil KARAÇUHA

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun

...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR



*Aileme,
Bilime, İnsanlığa
ve
değerli dostlarıma*

ÖZET

Bu çalışmada, günümüzde elektrik mühendisliği ve matematik alanlarında çalışılan Genişletilmiş Sınır Koşulları (GSK) Yöntemi (sıfır alan yaklaşımı) dairesel silindirik cisimlere T Matrisi Yönteminin Regülerleştiricileri ile keyfi kesitli silindirlere saçılma problemi için uygulanacaktır. Yok oluş teoremi (Extinction Theorem) yardımıyla bulunan integral denklemlerin Green Fonksiyonu ve Maxwell Denklemleri uyarınca T Matrisi Yöntemiyle iki boyutlu (2B) uygulamalardaki durumları incelenecektir. Araştırmada regülerleştiricilerin saçıcı silindir kesitlerinin kapsadığı ve kesitleri kapsayan daireleri üzerlerindeki değerlerinden yararlanılacaktır. Tersine alınan matrislerin koşul sayılarının (terse alınma duyarlılıklarının) belirli özelliklere sahip kesitler için önemli ölçüde azaldığı nümerik sonuçlar ve yorumlarıyla tartışmalı olarak sunulacaktır. Kullanılan yaklaşımın artıları ve eksilerinden bahsedilecektir.



Anahtar Kelimeler: Genişletilmiş Sınır Koşulları Yöntemi, Regülerleştirilmiş T Matrisi Yöntemi, Sıfır Alan Yaklaşımı, T Matrisi Yöntemi, Yok Oluş Teoremi.

SUMMARY

In this work, nowadays Extended Boundary Conditions (EBC) Method (null field approach), which has been studied in electrical engineering and mathematics, will be applied to circular cylindrical objects with the Regularizers of the T-Matrix Method for the problem of scattering from cylinders of arbitrary cross section. The situations of integral equations found with the help of the extinction theorem in two dimensional (2D) applications will be examined with the T-Matrix Method in accordance with Green's Function and Maxwell's Equations. In this study, the values of the levelers on the circles covered by the scattering cylinder sections and on the circles covering the sections will be used. Numerical results and their interpretations will be discussed controversially, where the number of conditions (inversion sensitivities) of inverted matrices are significantly reduced for sections with certain properties. The pros and cons of approach used will be discussed.



Key Words: Extended Boundary Conditions Methods, Extinction Theorem, Null Field Approach, Regularized T-Matrix Methods, T-Matrix Methods.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, tecrübesiyle beni yetiştiren, bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan değerli danışman hocam Doç. Dr. Fatih DİKMEN'e,

Bütün öğrencilik hayatım boyunca yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle severek paylaşan değerli hocam Prof. Dr. Yury A. TUCHKIN'e,

Bilgi ve tecrübelerini paylaşarak yol gösteren kıymetli hocam Dr. Emrah Sever'e,

Araştırmalarım boyunca her türlü yardımda bulunan sayın Murat Enes HATİPOĞLU'na,

Hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemedikleri için haklarını ödeyemeyeceğim babam Hikmet GEÇER ve annem Arzu GEÇER başta olmak üzere tüm aileme,

Bu yolda sürekli yanımda olan Betül Gök, Betül SARSIK ve diğer arkadaşlarıma göstermiş oldukları desteklerinden dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği	2
2. ELEKTROMANYETİK ALANIN TEMELLERİ	4
2.1. Maxwell Denklemleri	4
3. İNTEGRAL GÖSTERİMLER	9
3.1. Green Fonksiyonları ve Dirac Delta Fonksiyonu	9
3.2. Üç Boyutta Helmholtz Denklemi için Green Fonksiyonu	10
3.3. Skaler Alan Problemlerinde İntegral Denklemlerin 2B Problemler İçin Oluşturulması	12
3.4. Vektör Alan Problemleri İçin İntegral Denklemlerin Oluşturulması	20
3.5. Kesit Düzleminde Vektörel İntegral Gösterimler	31
3.6. Eksenel Alan Bileşenleri İçin İntegral Gösterimleri	35
4. T MATRİS YÖNTEMİ	40
4.1. Birçok Saçıcılı Saçılma Problemleri İçin T-Matrisi Yöntemi	47
4.1.1. Çok Saçıcı İçin Çözüm	48
5. T MATRİSİN REGÜLERLEŞTİRİLMESİ	52
5.1. Tek Saçıcı İçin T Matrisin Regülerleştirilmesi	52
5.2. Çok Saçıcı İçin T Matrisin Regülerleştirilmesi	57
6. NÜMERİK SONUÇLAR	63
6.1. Tek Saçıcı Durum İçin Örnekler	64
6.2. İkili Saçıcı Durum İçin Örnekler	77
6.3. Sonuç ve Yorumlar	83
KAYNAKLAR	84
ÖZGEÇMİŞ	87
TEZ METNİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR	88

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

∇	: Nabla operatörü
∇^2	: Laplasyen operatörü
$\mathbf{E}$	: Elektrik alan vektörü
$\mathbf{H}$	: Manyetik alan vektörü
$\mathbf{D}$	: Elektrik akı yoğunluğu
$\mathbf{B}$	: Manyetik akı yoğunluğu
ε	: Elektrik geçirgenlik
μ	: Manyetik geçirgenlik
J_m	: Manyetik akım yoğunluğu
ρ_m	: Manyetik yük yoğunluğu
k	: Dalga sayısı
3B	: Üç boyut
2B	: İki boyut
$\mathbf{K}$	: Elektrik yüzey akımı
$\mathbf{K}_m$	: Manyetik yüzey akımı
η	: Elektrik yüzey kaynağı
η_m	: Manyetik yüzey kaynağı
$\mathbf{r}$	: 3B gözlem noktası
$\mathbf{r}'$	: 3B kaynak noktası
ρ	: 2B gözlem noktası
ρ'	: 2B kaynak noktası
$\mathbf{f}$	: Saçılan alanın genlik vektörü
$\mathbf{a}$	: Gelen alanın genlik vektörü
GSK	: Genişletilmiş Sınır Koşulları
ψ_s	: Saçılan dalga
ψ_g	: Gelen dalga
$\bar{T}_{i(1)}$	: İzole edilmiş saçıcı için T matrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1: S kapalı yüzeyi ve V ve V' bölgeleri.	12
Şekil 3.2: Silindirik saçıcı.	15
Şekil 3.3: Saıcının enine kesit görünüşü.	16
Şekil 3.4: (3.23) ve (3.24) denklemlerinin iç bölgedeki V ve V' için integral gösterimleri.	17
Şekil 3.5: (3.25) ve (3.26) denklemlerinin dış bölgedeki V ve V' için integral gösterimleri.	18
Şekil 3.6: İç bölgeyi ifade eden (3.67) ve (3.68) integral gösterimleri V' 'de (E_1, H_1) ve V' 'de $(0,0)$ değerlerini sınır eğrisi C üzerindeki (E_1, H_1) 'in fonksiyonları olarak verir.	27
Şekil 3.7: Dış bölgeyi ifade eden (3.69) ve (3.70) integral gösterimleri V' 'de (E_2, H_2) ve V 'de $(0,0)$ değerlerini sınır eğrisi C üzerindeki (E_2, H_2) 'in fonksiyonları olarak verir.	28
Şekil 3.8: İlgili koordinatlarda xy -düzlemindeki C sınır eğrisiyle çevrelenmiş olan bir silindirin yüzeyin içindeki ve dışındaki silindirik bölge.	31
Şekil 3.9: İki boyutlu V ve V' bölgeleri ile eğrisel (n, l, z) koordinatlar.	35
Şekil 4.1: T Matris Methodu.	40
Şekil 4.2: Gelen alanın olduğu yerde iki saçıcı.	48
Şekil 6.1: Mükemmel iletken tek altıgenin geometrik yapısı.	64
Şekil 6.2: Tek saçıcılı mükemmel iletken altıgen için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.	65
Şekil 6.3: Tek saçıcılı mükemmel iletken altıgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.	66
Şekil 6.4: Tek saçıcılı mükemmel iletken altıgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma rank.	67
Şekil 6.5: Mükemmel iletken tek karenin geometrik yapısı.	68
Şekil 6.6: Tek saçıcılı mükemmel iletken kare için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.	68
Şekil 6.7: Tek saçıcılı mükemmel iletken karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.	69
Şekil 6.8: Tek saçıcılı mükemmel iletken karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rank.	70
Şekil 6.9: Mükemmel iletken tek uzun dörtgenin geometrik yapısı.	71
Şekil 6.10: Tek saçıcılı mükemmel iletken uzun dörtgen için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.	72
Şekil 6.11: Tek saçıcılı mükemmel iletken uzun dörtgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.	73
Şekil 6.12: Tek saçıcılı mükemmel iletken uzun dörtgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rank.	74
Şekil 6.13: Mükemmel iletken tek deforme karenin geometrik yapısı.	75
Şekil 6.14: Tek saçıcılı mükemmel iletken deforme kare için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.	75

Şekil 6.15: Tek saçıcılı mükemmel iletken deforme karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.	76
Şekil 6.16: Tek saçıcılı mükemmel iletken deforme karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rank.	77
Şekil 6.17: Mükemmel iletken ikili altıgenin geometrik yapısı.	78
Şekil 6.18: İkili saçıcılı mükemmel iletken altıgen için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.	79
Şekil 6.19: İkili saçıcılı mükemmel iletken altıgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.	79
Şekil 6.20: İkili saçıcılı mükemmel iletken altıgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rank.	80
Şekil 6.21: Mükemmel iletken ikili karenin geometrik yapısı.	81
Şekil 6.22: İkili saçıcılı mükemmel iletken kare için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.	81
Şekil 6.23: İkili saçıcılı mükemmel iletken karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.	82
Şekil 6.24: İkili saçıcılı mükemmel iletken karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rank.	82

1. GİRİŞ

İntegral denklemler yüzyılı aşkın süredir mühendislerin ve matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Çoğu integral denklemlerin kapalı form çözümleri olmadığı için bilgisayar yardımıyla çözümleri ve karakteristik yapıları nümerik olarak incelenmiştir.

Elektromanyetik saçılma problemlerinin çözümlerinde, Maxwell Denklemleri yardımıyla elde edilen integral denklemler; ortamın homojensizliği her bölgede parçalı olarak sabit olduğundan, yani saçıcı ve dışındaki ortamın elektromanyetik özellikleri sabit olduğundan yüzey integral denklemleri tekniği yardımıyla çözülmektedir [1]. Monokromatik dalgaların dairesel silindirler tarafından saçılma alanlarının analitik olarak çözümlenmesi elektromanyetik alan konularında çalışan kimseler tarafından iyi bilinmektedir [2]. Saçılma problemlerinin integral denklemlerinin çözümünde kullanılan pek çok yöntemin yanı sıra güçlü bir yaklaşım olarak [3]'de ilk olarak tanıtılan T - Matrisi Yöntemi zamanla kullanılmaya başlanmıştır.

Elektromanyetik saçılma problemleri için geliştirilen T - Matrisi Yöntemi yardımıyla [4]'deki gibi günümüzde pek çok alandaki parçacıktan saçılmanın nümerik sonuçlarının daha iyi alınması ve yorumlanması için problemin iyi anlaşılması gerekmektedir.

1965 yılında Peter C. Waterman'ın ortaya koyduğu ve geliştirilerek geçerliliğini bugüne kadar koruyan T - Matrisi Yöntemi ayrıca Sıfır Alan Yaklaşımı (null field approach) ve Genişletilmiş Sınır Koşulları Yöntemi (Extended Boundary Conditions Method) olarak da bilinmektedir [5], [7]. Geliştirilen bu yöntemle beraber Maxwell Denklemlerinin çözümü için alanların teğet bileşenlerinin sınırda birbirine eşit olması suretiyle sınır koşulları uygulanarak matris - denklem sistemi elde edilir. Günümüzde kullanılmaya devam edilen bu yöntem yüzlerce akademik çalışmada atıf almıştır.

2004 yılında yapılan kaynak derlemesi [8] yöntemin saçılma problemlerinde güçlü bir yaklaşım olduğunu göstermekte olup yapılan ilk derleme daha sonraki çalışmalar ışığında genişletilerek 2017'de [9] halini almıştır. Yapılan bu derlemeler sonucunda T - Matrisi Yönteminin güçlü nümerik sonuçlar alınmasında ne kadar önemli olduğu anlaşılmıştır. Bu yüzden elektromanyetik saçılma problemlerinin nümerik kısmında bu yöntem günümüzde hala kullanılmaya devam etmektedir.

1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği

Yapılan araştırmalar ve literatür derlemeleri [8], [9] T - Matrisi Yönteminin önemini vurgulamaktadır. Saçılma problemleri için kullanılan T - Matrisi Yöntemi bu tezin kapsamı olan mükemmel iletken keyfi kesitli silindirik cisimler için regülerleştirilmiş olup problemin çözümünde kullanılacaktır. Literatürdeki çalışmalarda T - Matrisi Yönteminin küresel ve küresel olmayan parçacıklardan saçılımın incelenmesinde ve benzer 3D elektromanyetik saçılma problemlerinin çözümünde uygulandığı görülmektedir. Bunun yanı sıra, T - Matrisi Yönteminin 2D problemler için kullanımına [10] ve [11]'deki gibi fotonik kristal yapılarının analizi uygulamalarında rastlanır.

Bu çalışmada, T - Matrisi Yönteminin bahsedilen uygulamalar için yararı göz önüne alınarak mükemmel iletken keyfi kesitli silindirik cisimlerden saçılma probleminin çözümü için T - Matrisi Yöntemi, regülerleştirme operasyonu ile nümerik olarak kararlı ve isabetli sonuçlar elde etmek için tercih edilmiştir.

Yok Oluş Teoremine (Extinction Theorem) göre yüzey akımı nesnenin iç kısmı boyunca toplam alanları tam olarak yok eden veya söndüren bir alan katkısı üretir. İlk olarak, Yok Oluş Teoremi [12], Genişletilmiş Sınır Koşulları (GSK) olarak kullanarak nesnenin iç kısmı boyunca geçerli olan Yüzey İntegral Denklemlerini elde etmek için kullanılacaktır. Ancak ikinci olarak, elde edilen integral denklemlerin iç kısım boyunca analitik süreklilikten dolayı herhangi bir kısımda tutulması gerektiğine dikkat etmeliyiz [13]. Bu iki önemli kısım çözüm de kullanılacak T - Matrisin elemanlarını oluşturacaktır. Tüm bu durumları göz önüne alarak bu çalışmada Dirichlet Problemi için sayısal verilerin doğruluğunun regülerleştirilen bu yöntemle incelemesi amaçlanmaktadır.

Elektromanyetik saçılma problemlerinde Helmholtz denklemleri iki boyutta ve üç boyutta T - Matrisi Yöntemi yardımıyla çözülebilir. Çözümün temelleri yukarıda bahsedilen sıfır alan yaklaşımı, genişletilmiş sınır koşulları yöntemine dayanır. Böylece keyfi kesitli silindirik bir cismin sınırından uygun kesitte aranan yüzey akımı yoğunlukları için saçıcı olarak kullanılan cisim üzerinden bir seri elde edilebilir. İki boyutta dairesel, üç boyutta küresel saçıcılar için kullanılan yöntemle bir lineer denklem sistemi üretilir, ancak ortaya çıkan sistem doğası gereği kötü koşullu olduğundan sistemin regüle edilmesi [14]'de bahsedildiği gibi yapıp (analitik

regülerleştirme) ikinci türden iyi koşullu bir lineer denklem sistemine çevrilir. Ters alınarak oluşturulan bu matrislerin koşul sayılarının belirli özelliklere sahip kesitler için önemli ölçüde azaldığı gösterilmiştir [15].

Saçılma problemi için T - Matrisinin Regülerleştirilmesi, yüzeyde yazılan integral denklemlerin Fredholm birinci türden integral denklemi olup kötü koşullu olduğu için gerekmiştir [16], böylece regülerleştirme sonucunda lineer sistemdeki olumsuz koşullar ortadan kaldırılarak nümerik açıdan daha kararlı olan ikinci türden lineer denklem sistemi oluşturulmuştur. Yapılan regülerleştirme işlemi matrislerin kötü koşullu doğasından kaynaklı olan kararsızlıkların terslerinin alınarak giderilmesi için yapılmış olup koşullanma sayısının belirli özelliklere sahip kesitler için önemli ölçüde azaltılması ve artan kesme sayısı ile beraber rankın düzenli olarak artması amaçlanarak yapılmıştır.

Genişletilmiş Sınır Koşulu (GSK) Yönteminin 2B (iki boyutlu) veya 3B (üç boyutlu) uygulamalarındaki radyal öz fonksiyonları, sırasıyla tam veya buçuklu indisleri ile duran ve dışa giden dalgalar için kullanılan Bessel ve Hankel fonksiyonlarından oluşur. Bu silindirik veya küresel harmoniklerin sayısı, kurulan denklem sisteminin matrisinin kötü koşullandırılmış yapısı [14], [17] üzerinde önemli bir rol oynar. Bu sorunun üstesinden gelmek için bu radyal öz fonksiyonların ölçeklenmesi ya sonlu bir statik limit elde etme motivasyonu ile [18] ya da çözümlerin rezonans içeriğini korumak için uygun çarpanlara ayırma [19] ile önerilmektedir. Bu ölçeklemeler, bu radyal fonksiyonların indisleri sonsuza giderken asimptotik seri açılımlarının önde gelen terimlerinden kaynaklanmaktadır [20]. 2B sınır integral gösterimlerinden kaynaklanan bir perspektif, dairesel silindirik bir sistemin saçılma ve iletim katsayılarının radyal fonksiyonlara bağımlılığını ve bunları dengeleyen asimptotik davranışa sahip olan regülerleştiriciler aracılığıyla ilgili saçılma matrislerinin regülerleştirilmesi için bir yordam ortaya koymaktadır [14]. Bu regülerleştiriciler, çok sayıda dairesel silindirik saçılma sisteminde regülerleştirilmiş özyinelemeli T - Matrisi uygulaması sırasında kullanılır [21]. Bu regülerleştirme, probleme dair matris gösterimi için ikinci türden bir lineer cebirsel denklem sistemine ulaşmayı amaçlayan motivasyonu ile yukarıda bahsedilen ölçeklemelerden ayrılır. Bu tür sistemler aracılığıyla elde edilen çözümler yuvarlama hatalarına karşı bağıstıktır [17]. Silindirin kesiti daireden saptığında, daha önce önerilen regülerleştiricilerin geçerliliğinin araştırılması buradaki çalışmanın temel amacıdır.

2. ELEKTROMANYETİK ALANIN TEMELLERİ

Elektromanyetik alanın temel denklemleri Maxwell denklemleridir. Bu kısımda Maxwell denklemlerine genel bir bakışla denklemlerin türev ve integral formları incelenip Helmholtz Denklemlerinin eldesinden bahsedilecektir.

Maxwell Denklemleri, klasik elektromanyetizmanın ve klasik optiğin temellerini oluşturan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Elektromanyetik dalgalarla ilişkili elektrik ve manyetik alanların, yüklerin ve akımların ilişkilerini fiziksel yasalar ile beraber Maxwell Denklemleri inceler [22]. Maxwell Denklemlerinin fazörü yazılırken ω frekansı ile ifade edilir, ayrıca elektromanyetik dalgaların yayıldığı ortamların sabitleri ϵ ve μ 'dür.

2.1. Maxwell Denklemleri

Maxwell Denklemleri aşağıdaki dört diferansiyel denklemden oluşur:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

Burada $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ sırasıyla elektrik ve manyetik alan vektörünü, $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{B}$ sırasıyla elektrik ve manyetik akı yoğunluğunu, $\mathbf{J}$ elektrik akım yoğunluğunu ve ρ ise manyetik yük yoğunluğunu temsil etmektedir.

$\mathbf{D}$ ve $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{H}$ arasındaki ilişki ϵ elektrik geçirgenliği, μ manyetik geçirgenliği ifade edecek şekilde aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \text{ ve } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.5)$$

(2.5) eşitliği (2.1)'den (2.4)'e olan denklemlerde tekrardan yerine koyulduğunda yeni eşitlikler aşağıdaki gibi olur:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0 \quad (2.9)$$

$\mathbf{J}$ ve ρ kaynaklarının ve bunlara bağlı ortaya çıkan elektromanyetik alanların zamanla sinüzoidal olarak değiştiğini, açısal frekansın ω olduğunu varsayarak yukarıda yazılan (2.6)'ten (2.9)'a kadar olan eşitlikleri

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.13)$$

şeklinde yeniden düzenlemek mümkündür.

Maxwell denklemlerinin fiziksel anlamlarının anlaşılması için bu denklemler genellikle integral formda ifade edilir ve böylece fiziksel anlamlarını anlamak kolaylaşır. (2.14)'te yazılan Stokes Teoremi yardımıyla Maxwell denklemlerini kolaylıkla integral formda yazabiliriz. İlk olarak stokes teoremini yeniden hatırlayacak olursak: Stokes Teoremi, $\mathbf{A}$ vektör, da normal yönü $\hat{n}$ işaret eden diferansiyel yüzey elemanı vektörü, dl $\hat{l}$ yönünde olan bir diferansiyel çizgi elemanı vektörü olmak koşuluyla aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot da = \oint \mathbf{A} \cdot dl \quad (2.14)$$

(2.1) ve (2.2)'de yazılan denklemlere (2.14) eşitliği uygulanarak denklemler integral forma aşağıdaki gibi dönüştürülebilir:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.15)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (2.16)$$

Bilindiği gibi elde edilen denklem (2.15), Faraday'ın kapalı bir yol etrafındaki bir elektrik alanın çizgi integrali boyunca toplam manyetik akıdaki değişiminin zamana bağlı olarak negatifine eşit olduğu indüksiyon yasasını temsil eder. Ayrıca elde edilmiş olan (2.16) eşitliği, bir manyetik alanın kapalı bir yol boyunca çizgi integralinin toplam akıma eşit olduğu amper yasasını temsil etmektedir [13].

Gauss Teoremi, S bir V hacmini çevreleyen kapalı bir yüzey olmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv = \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.17)$$

Benzer şekilde (2.3) ve (2.4) denklemlerine (2.17)'deki integral dönüşümü uygulanarak bünye denklemleri aşağıdaki integral forma dönüştürülebilir:

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int \rho \cdot dv \quad (2.18)$$

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (2.19)$$

Bilindiği gibi denklem (2.18), herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı akan toplam elektrik akısının, yüzey tarafından çevrelenen toplam yüke eşit olduğunu söyleyen Gauss Yasasıdır. Ayrıca denklem (2.19)'den yüzeyde manyetik yükün olmadığı belirtilildiğini söylemek mümkündür.

Maxwell denklemleri $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ arasında duallik özelliğine sahiptir. Maxwell denklemlerinde $\mathbf{J}$ ve ρ ya sırasıyla , manyetik akım yoğunluğu $\mathbf{J}_m$ ve manyetik akı yoğunluğu ρ_m karşılık gelecek şekilde yeniden düzenlendiğinde:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_m \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu} \quad (2.23)$$

eşitlikleri elde edilmiş olur.

(2.20) ve (2.21) denklemlerinden, $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ yi sağlayan vektör denklemleri

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{J}_m \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2\mathbf{H} = -j\omega\mu\mathbf{J}_m - \nabla \times \mathbf{J} \quad (2.25)$$

k ortamın dalga sayısı olmak üzere

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (2.26)$$

(2.24) ve (2.25)'te olduğu şeklinde yazılabilir.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.27)$$

(2.22), (2.23) eşitlikleri ve (2.27)'teki vektör özelliği kullanılarak (2.24) ve (2.25) denklemleri yeniden yazıldığında:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{J}_m + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho \quad (2.28)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = j\omega\mu\mathbf{J}_m - \nabla \times \mathbf{J} + \frac{1}{\mu}\nabla\rho_m \quad (2.29)$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu denklemler kaynaksız bölgede aşağıdaki Helmholtz Denklemleri olarak yazılabilir:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (2.31)$$

Elektromanyetik problemler, verilen sınır koşulları altında önce (2.28) veya (2.30) eşitliklerinden $\mathbf{E}$ elde edilerek, ardından (2.20)'den $\mathbf{H}$ çekilerek ya da verilen sınır koşulları altında önce (2.29) veya (2.31) eşitliklerinden $\mathbf{H}$ elde edilerek, daha sonra (2.21)'den $\mathbf{E}$ elde edilerek çözülebilir. Ancak $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ 'yi dolaylı olarak vektör potansiyeli, skaler potansiyel ve Hertz vektörleri gibi yardımcı büyüklükler aracılığıyla çözmek genellikle daha kolaydır.



3. İNTEGRAL GÖSTERİMLER

Elektromanyetikte integral gösterimlerin bir çok farklı formda yazılması mümkündür ancak bu kısımda yazılacak olan integral gösterimler Green Fonksiyonları yardımıyla yapılacaktır.

İntegral gösterimleri hem skaler alan hem de vektörel alan problemleri için ayrı ayrı oluşturabilmek mümkündür. Yüzey integral denklemleri yazılırken homojen/engelsiz bir ortamda Green Fonksiyonları vardır ve bu bölümde integral denklemleri yazarken Green Fonksiyonu Teoremi kullanılacaktır.

3.1. Green Fonksiyonları ve Dirac Delta Fonksiyonu

Elektromanyetik problemlerinin çözümleri yapılırken Green Fonksiyonlarından yararlanılır. Problemin çözümü yapılırken r üç boyutta (3B) koordinat vektörü, $f(r)$ bilinmeyen fonksiyon, L lineer operatör, r' kaynak noktası ve $g(r)$ kaynak olarak kabul edildiğinde aşağıdaki

$$L\{f(r)\} = -g(r) \quad (3.1)$$

eşitlik yazılır.

$G(r - r')$ Green Fonksiyonu $-\delta(r - r')$ Dirac Delta Fonksiyonu yardımıyla denklem (3.1)

$$L(G(r - r')) = -\delta(r - r') \quad (3.2)$$

şeklinde çözülür.

Dirac Delta Fonksiyonu $r = r'$ hariç her yerde sıfıra eşittir. Dolayısıyla bunu ifade etmek için (3.3) eşitliğini rahatlıkla yazmak mümkündür.

$$\delta(r - r') = 0, r \neq r' \quad (3.3)$$

Delta fonksiyonu f sürekli bir fonksiyon, V hacim, dv hacmin diferansiyel elemanı olarak:

$$\int_V f(r)\delta(r-r')dv = \int_V f(r)\delta(r'-r)dv = \begin{cases} f(r'), & r' \in V \\ 0, & r' \notin V \end{cases} \quad (3.4)$$

şeklinde gösterilir.

(3.4) denkleminde $f(r) = 1$ olarak kabul edip, merkezi r' de olan sonsuz ε yarıçaplı V_ε silindirik bölgeyi V için kullanırsak

$$\int_{V_\varepsilon} \delta(r-r')dv = \int_{V_\varepsilon} \delta(r'-r)dv = 1 \quad (3.5)$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

Dirac Delta fonksiyonun matematiksel olarak gösterimi bilindiği üzere oldukça çeşitlidir, ayrıca integral, limit ve seri olarak yazımı da mümkündür [23]. Green fonksiyonu simetri özelliği sağlayan bir fonksiyon olduğu için $G(r-r') = G(r'-r)$ şeklinde yazıldığında sonucu değiştirmeyecektir. Bu bilgi kısım 3.3'te kullanılacaktır.

Green fonksiyonu G 'nin işlevi, bilinmeyen f fonksiyonunun işleviyle aynı sınır koşulunu sağlıyorsa, f 'nin işlevi G kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$f(r) = \int_V g(r')G(r,r')dv' \quad (3.6)$$

3.2. Üç Boyutta Helmholtz Denklemi için Green Fonksiyonu

Üç boyut Helmholtz Denklemi için Green Fonksiyonu aşağıdaki

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(r-r') \quad (3.7)$$

(3.7) denklemini sağlar. Buradaki Green fonksiyonu olarak ifade edilen G , r' konumuna göre küresel simetri olan bir nokta kaynaktan oluşmaktadır. Eğer koordinat

sisteminin orijinini r' konumuna yerleştirirsek G , r 'nin bir fonksiyonu olur ve (3.7) denklemi

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(r) \quad (3.8)$$

olarak yeniden dzenlenir. $\delta(r)$ orijin hariç noktalarda A sabit sayı olmak üzere (3.8) denkleminin çözümleri

$$G = \frac{Ae^{jkr}}{r} \text{ yada } G = \frac{Ae^{-jkr}}{r} \quad (3.9)$$

şeklindedir. (3.8) denkleminin her iki tarafını V_ϵ üzerinden integralini aldığımızda

$$\int_{V_\epsilon} \nabla^2 G dv = \int_{V_\epsilon} \nabla \cdot (\nabla G) dv = -1 \quad (3.10)$$

sonucu elde edilir, burada Gauss teoremini kullandığımızda R_ϵ , V_ϵ sınırının küresel yüzeyi olacak şekilde (3.10) eşitliğini aşağıdaki gibi yeniden yazmak mümkündür:

$$\int_{R_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial r} ds = -1 \quad (3.11)$$

Bu kısımda, $r \rightarrow 0$ (3.9) eşitliğinde $\frac{A}{r}$ ye yöneldiğini ayrıca R_ϵ yüzey alanının $4\pi\epsilon^2$ olduğunu kabul ettiğimizde (3.11) denkleminde $A = \frac{1}{4\pi}$ kullanılarak:

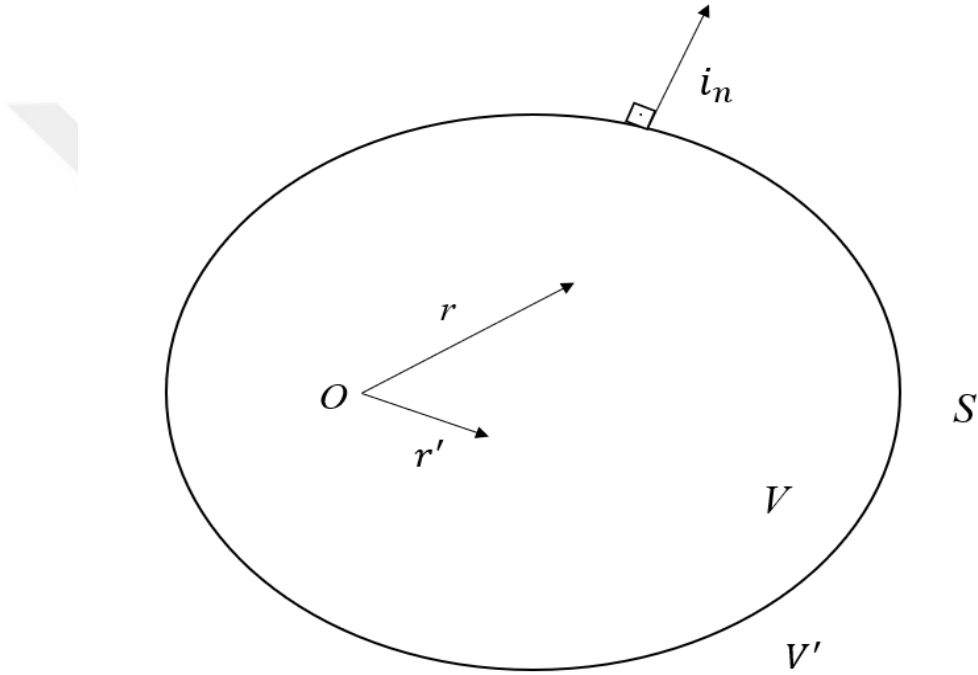
$$G = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (3.12)$$

elde edilmiş olur.

Tüm bu çıkarımlardan anladığımız, G 'nin r orijinden uzaklık olacak şekilde yazılan bir fonksiyon olduğudur. Sonuç olarak, üç boyutta Helmholtz denklemi için Green fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$G = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad (3.13)$$

3.3. Skaler Alan Problemlerinde İntegral Denklemlerin 2B Problemler İçin Oluşturulması



Şekil 3.1: S kapalı yüzeyi ve V ve V' bölgeleri.

V , S yüzeyi tarafından kapalı bir bölge ve V' , V bölgesinin dış bölgesi olacak şekilde gösterilen Şekil 3.1 de f fonksiyonun (3.14) eşitliğini sağlayan bir skaler problem olduğunu kabul edelim:

$$L\{f(r)\} = -g(r) \quad (3.14)$$

Bilindiği gibi skaler elektromanyetik problemlerde L lineer operatörü aşağıdaki gösterimi temsil eder:

$$L = \nabla^2 + k^2 \quad (3.15)$$

f_1 ve f_2 , L domaininde iki fonksiyon olduğunu kabul edip aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$f_1 L(f_2) - f_2 L(f_1) = f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1 = \nabla \cdot (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) \quad (3.16)$$

(3.16) eşitliğini V bölgesinde Gauss Teoremini kullanıp integral alarak, $\mathbf{i}_n$ dışa doğru S 'ye bağlı birim vektör diyecek olursak

$$\begin{aligned} \int_V (f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1) dv &= \int_S (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) \cdot \mathbf{i}_n ds \\ &= \int_S \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitliğine ulaşılır.

Elde ettiğimiz bu eşitlikleri düşünüp, f_1 'i (3.14) eşitliğinde f için çözüm olarak seçip ve yine aynı şekilde f_2 'yi aynı eşitlikte $G(r, r')$ Green fonksiyonu olarak kabul edersek, (3.17) denkleminin sol tarafı delta fonksiyonun özelliği yardımıyla aşağıdaki sonucu elde etmemize olanak tanır:

$$\begin{aligned} -f(r') + \int_V G(r, r') g(r) dv, & \quad r' \in V \\ \int_V G(r, r') g(r) dv, & \quad r' \in V' \end{aligned} \quad (3.18)$$

Böylelikle, (3.17) denkleminin yeni düzenlenmiş halini (3.19) de görebiliriz.

$$\int_S \left\{ f(r) \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} - G(r, r') \frac{\partial f(r)}{\partial n} \right\} ds = \int_V G(r, r') g(r) dv + \begin{cases} -f(r'), & r' \in V \\ 0, & r' \in V' \end{cases} \quad (3.19)$$

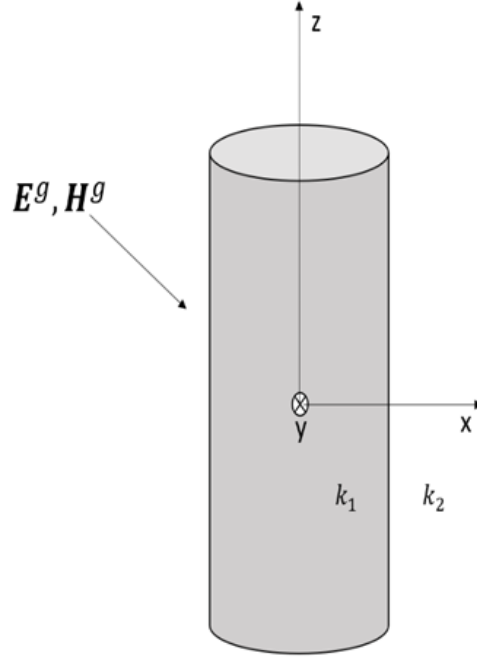
(3.19)'de r ve r' yer deðiřtirdiđimizde ileride kullanılmak üzere aşağıdaki gibi

$$\int_V G(r, r') g(r') dv' + \int_S \left\{ G(r, r') \frac{\partial f(r')}{\partial n'} - f(r') \frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} \right\} ds' = \begin{cases} f(r), & r \in V \\ 0, & r \in V' \end{cases} \quad (3.20)$$

yeniden yazabiliriz.

Elde edilen (3.20) denklemini r' 'nin sadece S yüzeyi üzerinde olması durumunda hiçbir şey ifade etmez. Bu durumda, yüzey integrali özel bir değerlendirme gerektirir ve bu integral denklemlerin türetilmesi ile yakından ilgilidir. Bu eşitlik $r \in V$ için f' 'nin çözümü için kullanılacak olan nihai integral denklemdir. Böylece integral denkleminiz oluşturulmuş oldu. (3.19) eşitliği incelediğimizde, herhangi bir g kaynağı üzerindeki bir hacmin integralini ve S yüzeyinde bir integralin elde edildiğini anlarız. Burada üssü ile gösterilenler hacmi, yüzeyi, r' integral alınacak kısmın koordinat vektörünü ve son olarak r gözlem noktasını ifade etmektedir.

Elektromanyetik dalga problemleri, genellikle alan bileşenlerinin girift bir şekilde ilişkili olduğu vektör alan problemleridir. Bu problemleri için (3.20)'ye karşılık gelen ilişkiler çok daha karmaşıktır.



Şekil 3.2: Silindirik saçıcı.

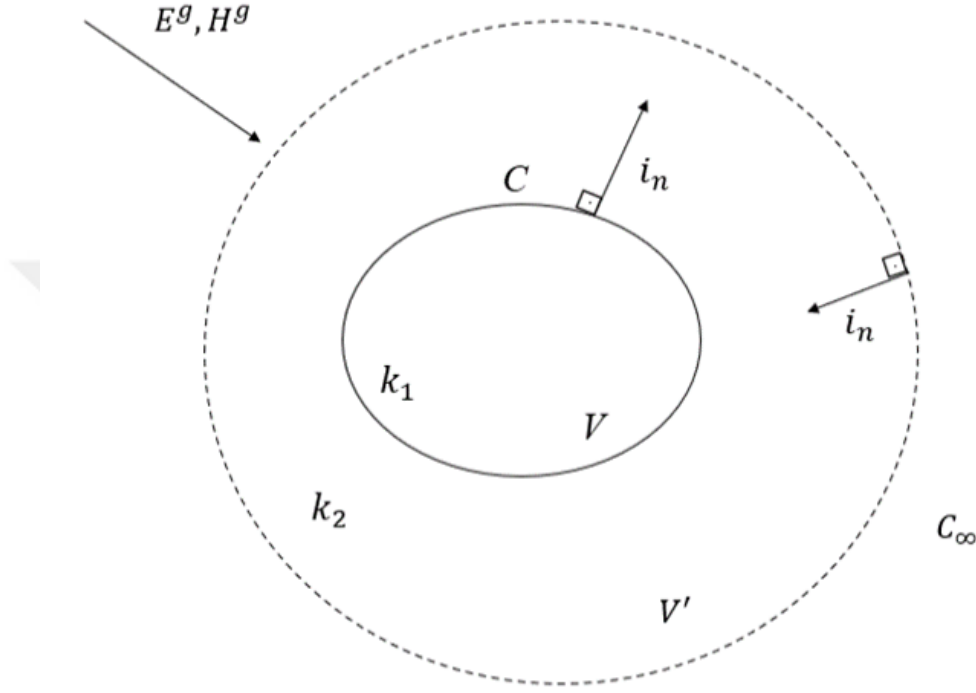
Şimdi silindirik bir nesneden saçılma problemini bir önceki sayfa Şekil 3.2’de gösterildiği gibi: k_2 dalga numaralı sonsuz uzunlukta z eksenı boyunca konumlandırılmış yapıya sahip silindirik k_1 dalga numaralı bir nesne tarafından elektromanyetik saçılma problemini düşünelim. Eğer gelen dalganın yayılma vektörü z eksenine dik ise saçılma problemi elektrik ve magnetik alanın z bileşeni olan f fonksiyonuna göre iki boyutludur (2B) diyebiliriz. Burada hatırlamamız gereken önemli kısım nesnenin iletken bir silindir cisim olduğunda problemin eğik durumlarda bile skaler hale geldiğidir [24]. Böylece Helmholtz Denklemi aracılığıyla f tarafından sağlanan denklem:

$$(\nabla_t^2 + k_i^2)f = 0, \quad i = 1,2 \quad (3.21)$$

olarak yazılır.

Green fonksiyonu radyasyon koşulunu sağlayan ve ρ iki boyutta koordinat vektörünü temsil edecek şekilde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\hat{G} = \frac{1}{4j} H_0^{(2)} k(|\rho - \rho'|) \quad (3.22)$$

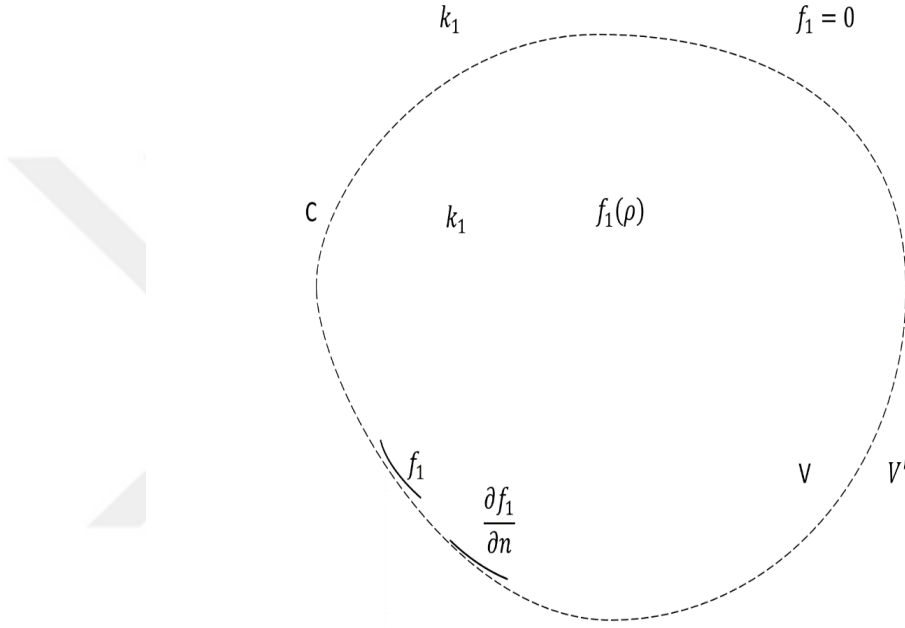


Şekil 3.3: Saçıncının enine kesit görünüşü.

Problemimiz 2B olduğundan (3.20) da elde ettiğimiz temel integral denkleminde ki hacim ve yüzey integralleri sırasıyla yüzey ve çizgi integrallerine indirgenerek yazmak mümkündür. Gelen dalganın kaynakları V bölgesinde olduğu için, gelen dalganın alanı (3.20) denkleminin sol kısmından hesaplanması gerekir. Çözülecek problemin önceki sayfa Şekil 3.3 te olduğu gibi C_∞ kapalı bölgesinde olduğunu kabul edip saçıncının iç bölgesini yukarıdaki (3.20) eşitliğinde olduğu şekilde seçip ρ 'yu gözlem bölgesi olarak kabul ettiğimizde R gözlem noktası ile kaynak noktası arasındaki mesafe ve C saçıncının enine kesitinin çevresel sınır çizgisi olup alt indis 1 iç kısmı temsil etmek üzere aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir:

$$\frac{j}{4} \int_C \left\{ f_1(\rho') \frac{\partial H_0^{(2)}(k_1 R)}{\partial n'} - H_0^{(2)}(k_1 R) \frac{\partial f_1(\rho')}{\partial n'} \right\} dl' = \begin{cases} f_1(\rho), & \rho \in V \\ 0, & \rho \in V' \end{cases} \quad (3.23)$$

Genellikle yukarıda yazılmış olan (3.23) ve (3.24) denklemleri f_1 yerine f cinsinden ifade edilirler. (3.23) ve (3.24) denklemleri Şekil 3.4'te gösterildiği gibi C sınır çizgisi üzerindeki f_1 ve $\frac{\partial}{\partial n}f_1$ kaynaklarının dalga sayısının her yerde k_1 olduğu ortamda V 'de f_1 ve V' 'de 0 olarak üretildiğini belirtmektedir. f_1 ve $\frac{\partial}{\partial n}f_1$ temsil eden iki uzun çizgi Şekil 3.4 hemen C 'nin içinde olmasına rağmen hem f_1 hem de $\frac{\partial}{\partial n}f_1$ 'nin tam olarak C üzerinde olması kastedilmektedir.



Şekil 3.4: (3.23) ve (3.24) denklemlerinin iç bölgedeki V ve V' için integral gösterimleri

(3.20) eşitliğini V 'ye göre değil de V' göre alt indis 2 dış bölgeyi gösterecek şekilde integral alırsak aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur ve burada V' ortamın dalga sayısı k_2 olan ve Şekil 3.5'te gösterildiği gibi C ve C_∞ ile sınırlandırılan bölgedir:

$$-\frac{j}{4} \left(\int_C + \int_{C_\infty} \right) \left\{ f_2(\rho') \frac{\partial H_0^{(2)}(k_2 R)}{\partial n'} - H_0^{(2)}(k_2 R) \frac{\partial f_2(\rho')}{\partial n'} \right\} dl' = \begin{cases} 0, & \rho \in V \\ f_2(\rho), & \rho \in V' \end{cases} \quad (3.25)$$

$$f^g = \frac{j}{4} \int_C \left\{ f^g \frac{\partial H_0^{(2)}(k_2 R)}{\partial n'} - H_0^{(2)}(k_2 R) \frac{\partial f^g}{\partial n'} \right\} dl', \quad \rho \in V \quad (3.28)$$

Benzer şekilde C yerine C_∞ seçilerek yeniden gelen dalga olarak ifade edilen f^g yazılmak istenirse C_∞ sınırlı bölgesinin iç kısmında gelen dalga aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f^g = -\frac{j}{4} \int_{C_\infty} \left\{ f^g \frac{\partial H_0^{(2)}(k_2 R)}{\partial n'} - H_0^{(2)}(k_2 R) \frac{\partial f^g}{\partial n'} \right\} dl' \quad (3.29)$$

İntegral denklemleri gösterimini yaparken $f_2 = f^g$ 'nin (3.25)'e koyulması (3.29) yardımıyla tekrar iç bölgede (3.28) eşitliğini verir ve benzer şekilde $f_2 = f^g$ 'nin (3.26) eşitliğine koyulması sonucu (3.29) yardımıyla dış bölgede aşağıdaki eşitliğin elde edilmesini sağlar:

$$-\frac{j}{4} \int_C \left\{ f^g \frac{\partial H_0^{(2)}(k_2 R)}{\partial n'} - H_0^{(2)}(k_2 R) \frac{\partial f^g}{\partial n'} \right\} dl' = 0 \quad \rho \in V' \quad (3.30)$$

Burada ortamın dalga sayısı k_2 olduğu ortamda yayılan f^g ve $\frac{\partial}{\partial n'} f^g$ kaynaklarının (3.28) eşitliğinde V bölgesinde f^g 'yi ve (3.30) eşitliğinde V' bölgesinde 0 sonuçlarını meydana getirdiğini rahatlıkla görebiliriz.

Eğer herhangi bir saçılma varsa (3.26) denkleminde (3.27) eşitliğini yazıp (3.29) ve (3.30) eşitliklerini kullanırsak saçılan alan f^s aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f^s = -\frac{j}{4} \left(\int_C + \int_{C_\infty} \right) \left\{ f^s \frac{\partial H_0^{(2)}(k_2 R)}{\partial n'} - H_0^{(2)}(k_2 R) \frac{\partial f^s}{\partial n'} \right\} dl', \quad \rho \in V' \quad (3.31)$$

$R \rightarrow \infty$ hem f nin hem de $H_0^{(2)}(k_2 R)$ 'nin $e^{-jk_2 R} / \sqrt{R}$ ile orantılı hale geldiği gerçeğini göz önüne alarak, (3.31) eşitliğinde C_∞ üzerinden intragral aldığımızda C_∞ sonsuza

giderken yok olduğunu söyleyebiliriz ve böylece f^s saçılanın dış bölgedeki integral gösterimi için aşağıdaki eşitliğine ulaşırız:

$$f^s = -\frac{j}{4} \int_C \left\{ f^s \frac{\partial H_0^{(2)}(k_2 R)}{\partial n'} - H_0^{(2)}(k_2 R) \frac{\partial f^s}{\partial n'} \right\} dl', \quad \rho \in V' \quad (3.32)$$

Diğer taraftan V iç bölge için benzer prosedürler uygulanarak:

$$\frac{j}{4} \int_C \left\{ f^s \frac{\partial H_0^{(2)}(k_2 R)}{\partial n'} - H_0^{(2)}(k_2 R) \frac{\partial f^s}{\partial n'} \right\} dl' = 0, \quad \rho \in V \quad (3.33)$$

integral gösterimi elde edilmiş olur.

Sonuç olarak şunu söyleyebiliriz ki elde edilen (3.32) ve (3.33) denklemleriyle saçılan dalganın, (3.28) ve (3.30) denklemleriyle gelen dalganın integral gösterimleri elde edilmiş oldu. Tüm bu eşitlikler göz önüne alındığında (3.30) ve (3.32) eşitlikleri (3.27) ile kullanılarak sıklıkla karşılaşılan aşağıdaki son hal elde edilmiş olur ve burada f_2 genellikle f ile değiştirilir:

$$f_2 = f^g - \frac{j}{4} \int_C \left\{ f^s \frac{\partial H_0^{(2)}(k_2 R)}{\partial n'} - H_0^{(2)}(k_2 R) \frac{\partial f^s}{\partial n'} \right\} dl', \quad \rho \in V' \quad (3.34)$$

3.4. Vektör Alan Problemleri İçin İntegral Denklemlerin Oluşturulması

Elektromanyetik dalga problemlerin $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ 'nin kullanıldığı vektör alan problemleri olup bir önceki kısımda olduğu şekilde L operatörü yardımıyla skalar alan problemlerinde olduğu gibi $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ için integral ifadelerini oluşturabiliriz. Kabul edilen L operatörü aşağıdaki gibi olup bu kısımda kullanılacaktır.

$$L = (\nabla \times \nabla \times) - k^2 \quad (3.35)$$

L domaininde $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ iki fonksiyon olsun. Böylece

$$\mathbf{F}_2 \cdot \nabla(\mathbf{F}_1) - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla(\mathbf{F}_2) = \nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \nabla \times \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_2 \times \nabla \times \mathbf{F}_1) \quad (3.36)$$

vektör eşitliği sayesinde Gauss Teoremi yardımıyla her iki tarafın V üzerinden integralini alırsak aşağıdaki

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_2) dv \\ = \int_S (\mathbf{F}_1 \times \nabla \times \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_2 \times \nabla \times \mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{i}_n ds \end{aligned} \quad (3.37)$$

eşitliği bulunur. Burada $\mathbf{F}_2$ 'yi Green Fonksiyonun herhangi bir skalar ile çarpılmış olan rastgele bir sabit vektörü olarak seçecek olursak aşağıdaki (3.38) ve (3.39) eşitlikleri yazılabilir:

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.38)$$

$$\mathbf{F}_2 = \alpha G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.39)$$

$$\nabla \times (\varphi A) = \nabla \varphi \times A + \varphi (\nabla \times A) \quad (3.40)$$

Burada (3.40) vektör özelliği kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\nabla \times \mathbf{F}_2 = \nabla G \times \alpha \quad (3.41)$$

Burada gerekli çıkarımları yapabilmek için uygun vektörel özelliklerin aşağıdaki gibi uygulandıklarını hatırlamak gerekir:

$$\nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B \quad (3.42)$$

$$\nabla(A \cdot B) = (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) \quad (3.43)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (3.44)$$

(3.42) vektör özelliği, (3.38) eşitliği, (3.43) ve (3.44) vektör özelliklerinin kullanımı aşağıdaki eşitliği yazmamızı kolaylaştırır:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_2 = -\alpha \nabla^2 G + (\alpha \cdot \nabla) \nabla G = \alpha \{k^2 G + \delta(r - r')\} + \nabla(\alpha \cdot \nabla G) \quad (3.45)$$

Yukarıda elde ettiğimiz (3.37) denkleminde $\mathbf{F}_1 = \mathbf{E}$ olarak seçip, bu çalışmanın ikinci kısmında bahsedilen elektromanyetiğin temellerindeki $\mathbf{E}$ ile ilgili yazılan (2.20) ve (2.24), (3.39) ve (3.45) yardımıyla yeniden düzenleyecek olursak (3.46)'da olduğu gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \int_V \{ \alpha G \cdot (-j\omega\mu\mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{J}_m) - \mathbf{E} \cdot \alpha \delta(r - r') - \mathbf{E} \cdot \nabla(\alpha \cdot \nabla G) \} dv \\ = \int_S \{ \mathbf{E} \times (\nabla G \times \alpha) + j\omega\mu G \alpha \times \mathbf{H} + G \alpha \times \mathbf{J}_m \} \cdot \mathbf{i}_n ds \end{aligned} \quad (3.46)$$

Bulunan bu son eşitlik (3.46)'da sol taraftaki son terim vektör özellikleri ve (2.22) eşitliğiyle birlikte kullanılarak aşağıdaki hale dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{E} \cdot \nabla(\alpha \cdot \nabla G) dv = \int_V \{ \nabla \cdot ((\alpha \cdot \nabla G) \mathbf{E}) - (\alpha \cdot \nabla G) \nabla \cdot \mathbf{E} \} dv \\ = \alpha \cdot \int_S \nabla G (\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_n) ds - \alpha \cdot \int_V \frac{\rho}{\epsilon} \nabla G dv \end{aligned} \quad (3.47)$$

Benzer şekilde (3.46) eşitliğindeki sağ tarafındaki ilk terim ise vektör özellikleri kullanılarak aşağıdaki hale dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E} \times (\nabla G \times \alpha) \cdot ds = \int_S (\nabla G \times \alpha) \cdot (\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}) ds \\ = \alpha \cdot \int_S (\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}) \times \nabla G ds \end{aligned} \quad (3.48)$$

Benzer şekilde (3.46) eşitliğindeki sağ tarafındaki son terim ise uygun vektör özellikleri kullanılarak aşağıdaki hale dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}
\int_S (G\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{J}_m) \cdot \mathbf{i}_n ds &= \int_V \nabla \cdot (G\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{J}_m) dv \\
&= \int_V (\mathbf{J}_m \cdot \nabla \times (G\boldsymbol{\alpha}) - G\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \times \mathbf{J}_m) dv \\
&= \boldsymbol{\alpha} \cdot \int_V (\mathbf{J}_m \times \nabla G - G \nabla \times \mathbf{J}_m) dv
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Elde edilen tüm bu eşitlikleri yukarıda bulunan (3.46) denkleminde koyup eşitliğin sol ve sağ taraflarında uygun integralleri alıp yani sol tarafında hacim integral terimlerini ve sağ tarafında yüzey integral terimlerini toplayarak aşağıdaki hale dönüşür:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} \cdot \int_V \left\{ -j\omega\mu\mathbf{J}G - \mathbf{E}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla G - \mathbf{J}_m\nabla G \right\} dv \\
= \boldsymbol{\alpha} \cdot \int_S \{ (\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E})\nabla G + (\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}) \times \nabla G + j\omega\mu G \mathbf{H} \times \mathbf{i}_n \} ds
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Burada $\boldsymbol{\alpha}$ keyfi bir vektör olduğundan (3.50) denkleminde $(\boldsymbol{\alpha} \cdot)$ olmadan sağlanır. $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{r}'$ değiştirerek Green Fonksiyonun karşılıklılık özelliği yardımıyla (3.50)'de elde ettiğimiz denklemi aşağıdaki gibi yeniden düzenleyebiliriz:

$$\begin{aligned}
\int_V \left(-j\omega\mu\mathbf{J}G - \mathbf{J}_m \times \nabla' G + \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla' G \right) dv' \\
+ \int_S \{ j\omega\mu G (\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{H}) - (\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{E}) \times \nabla' G - (\mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{E})\nabla' G \} ds' \\
= \begin{cases} \mathbf{E}, & \mathbf{r} \in V \\ 0, & \mathbf{r} \in V' \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Biliyoruz ki, denklem (3.51) elde edilen bu eşitlik $\mathbf{E}$ elektrik alanının ortamda bulunan bir kaynak üzerinden hacim integralinin ve buna eşdeğer kaynaklar olabilecek ortamlardan yüzey integrali cinsinden ifade edilen genel bir gösterimidir [24].

Şimdi bunlara ek olarak dualiteden yararlanarak benzer şekilde $\mathbf{H}$ manyetik alan için denklemi elde edip aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \int_V \left(-j\omega\mu\mathbf{J}_m G + \mathbf{J} \times \nabla' G + \frac{\rho_m}{\varepsilon} \nabla' G \right) dv' \\ - \int_S \{ j\omega\varepsilon G(\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}) + (\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}) \times \nabla' G + (\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H}) \nabla' G \} ds' \\ = \begin{cases} \mathbf{H}, & r \in V \\ 0, & r \in V' \end{cases} \quad (3.52) \end{aligned}$$

Bu denklemlerde diferansiyel elemanlar dv' ve ds' r' konumunda bulunurlar ve ∇' ise asal koordinatlara göre ∇' 'dir. Ayrıca $\mathbf{i}_n, \mathbf{J}, \mathbf{J}_m, \rho$ ve $\mathbf{H}$ 'de r' 'nin fonksiyonlarıdır. Sol tarafta bulunan $\mathbf{E}$, r' 'nin bir fonksiyonudur ancak sağ taraftaki $\mathbf{E}$, r 'nin bir fonksiyonudur. (3.51) de yazılan $r \in V$ denklemi, elektrik alanı $\mathbf{E}$ 'yi gerçek kaynaklar üzerindeki bir hacim integralinin ve yüzeydeki eşdeğer kaynaklar olarak kabul edilebilecek alanlar üzerindeki bir yüzey integralinin toplamı cinsinden ifade eden genel bir integral gösterimidir.

(3.51) ve (3.52) da bulunan eşitliklerde tüm nicelikleri alt indis 1 ile gösterip bunlara ek olarak birinci kısımdaki notasyonu sırasıyla $\mathbf{K}_1$ ve $\mathbf{K}_{m1}$ elektrik ve manyetik yüzey akımları olacak şekilde değiştirerek, η_1 ve η_{m1} elektromanyetik alanlarda tanımlanan elektrik ve manyetik yüzey kaynaklarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= -\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_1, & \mathbf{K}_{m1} &= \mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_1 \\ \eta_1 &= -\varepsilon_1 \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E}_1, & \eta_{m1} &= -\mu_1 \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H}_1 \end{aligned} \quad (3.53)$$

(3.51) ve (3.52) denklemlerindeki yüzey integrallerinin yine aynı denklemlerde ki hacim integrallerin $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}_m$, ρ ve ρ_m hacim kaynakları sırasıyla $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_{m1}$, η_1 ve η_{m1} yüzey kaynakları ile değiştirildiğinde ne olacağını kolayca bulabiliriz. $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_{m1}$, η_1 , η_{m1} yüzey kaynakları aşağıdaki sınır koşullarındaki $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_m$, η , η_m 'in sırasıyla 0, 0, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_{m1}$, η_1 ve η_{m1} ile değiştirilmesiyle elde edilir.

Bu kısımda temel sınır koşullarını hatırlayacak olursak temel sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

$$-\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{K}_m \quad (3.54)$$

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \eta \quad (3.56)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \eta_m \quad (3.57)$$

(3.54)'ten (3.57)'e kadar olan eşitliklerdeki sınır koşulları yazılırken; 1 ve 2 alt indisleri sırasıyla ortam 1 ve ortam 2'yi; $\mathbf{K}$ ve η sınırdaki sırasıyla elektrik yüzey akım yoğunluğu ve elektrik yüzey yük yoğunluğunu; $\mathbf{K}_m$ ve η_m sınırdaki sırasıyla manyetik yüzey akım yoğunluğu ve manyetik yüzey yük yoğunluğunu ve $\mathbf{i}_n$ ortam 2'yi gösteren birim normal vektörü olduğu bilinmelidir.

$$\nabla_s \cdot \mathbf{K} = -j\omega\eta, \quad \nabla_s \cdot \mathbf{K}_m = -j\omega\eta_m \quad (3.58)$$

(3.58) yazılırken ∇_s aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla_s = \nabla - \mathbf{i}_n \frac{\partial}{\partial n} \quad (3.59)$$

(3.58) eşitliğini, $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E}$ ve $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H}$ alanlarının normal bileşenleri ile $\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}$ ve $\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}$ alanlarının teğet bileşenlerini birleştiren denklemler olarak görebiliriz. Bu ilişkileri (3.51)'deki $\mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{E}$ terimini ve (3.52)'deki $\mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{H}$ terimini alanların teğetsel bileşenleri cinsinden ifade edebilmek için kullanacağız.

Gauss teoreminin iki boyutlu durumlar için ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_S \nabla_s' \cdot (G\mathbf{K}) ds' = 0 \quad (3.60)$$

Daha sonra uygun dönüşümler sayesinde yeniden düzenlersek:

$$\int_S G \nabla'_s \cdot \mathbf{K} ds' = - \int_S \mathbf{K} \nabla'_s G ds' \quad (3.61)$$

eşitliğini yazabiliriz.

(3.58) eşitliğini ve $\mathbf{K} \cdot \mathbf{i}_n = \mathbf{0}$ ilişkisi kullanılarak yeniden düzenleme yaparak aşağıdaki integral gösterimine ulaşırız:

$$\int_S \eta G ds' = - \frac{j}{\omega} \int_S \mathbf{K} \cdot \nabla'_s G ds' = - \frac{j}{\omega} \int_S \mathbf{K} \cdot \nabla' G ds' \quad (3.62)$$

∇ ile işlem yaparak η ve $\mathbf{K}$ 'nin ∇ söz konusu olduğunda sabit olduklarını kabul ederek ∇ ile $\mathbf{K} \cdot \nabla$ operatörlerinin sırasını değiştirdiğimizde

$$\int_S \eta \nabla G ds' = - \frac{j}{\omega} \int_S (\mathbf{K} \cdot \nabla') \nabla G ds' \quad (3.63)$$

eşitliği elde edilir.

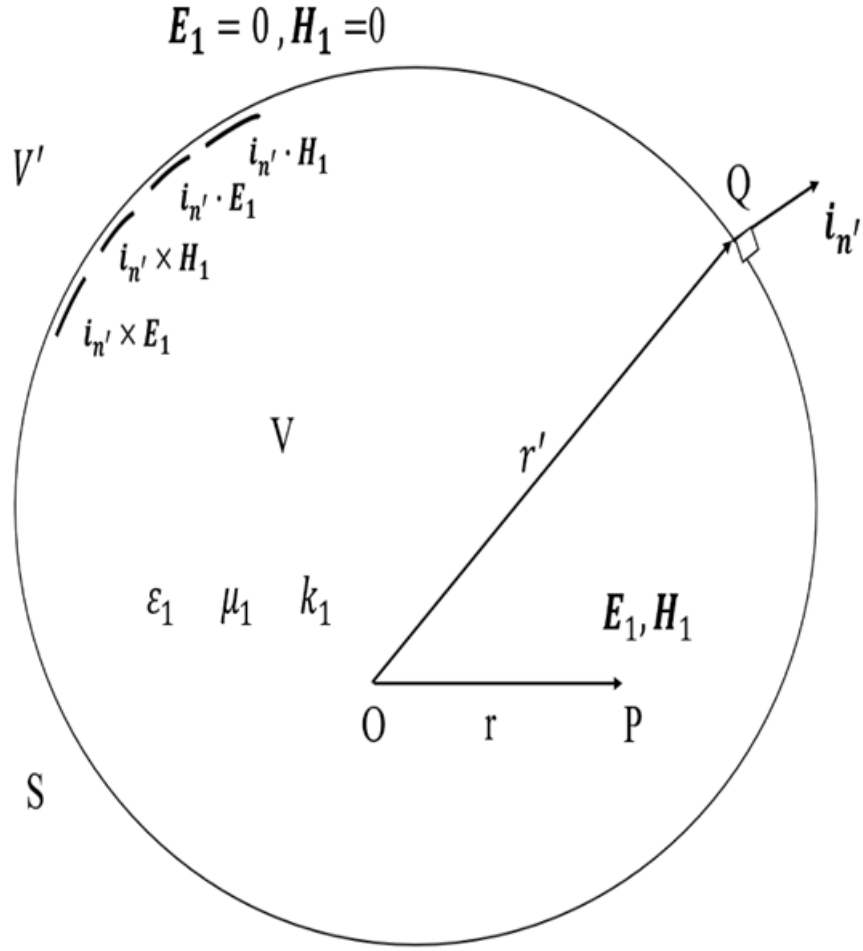
(3.53)'deki eşitlikleri ve (3.64) ∇ operatörünün özelliği yardımıyla $\mathbf{E}$ 'nin normal bileşenini $\mathbf{H}$ 'nin teğetsel bileşeni yardımıyla

$$\nabla G = -\nabla' G \quad (3.64)$$

$$\int_S (\mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{E}) \nabla' G ds' = - \frac{j}{\omega \epsilon} \int_S \{(\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla'\} \nabla' G ds' \quad (3.65)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde (3.66) eşitliği yazılabilir:

$$\int_S (\mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{H}) \nabla' G ds' = - \frac{j}{\omega \mu} \int_S \{(\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla'\} \nabla' G ds' \quad (3.66)$$



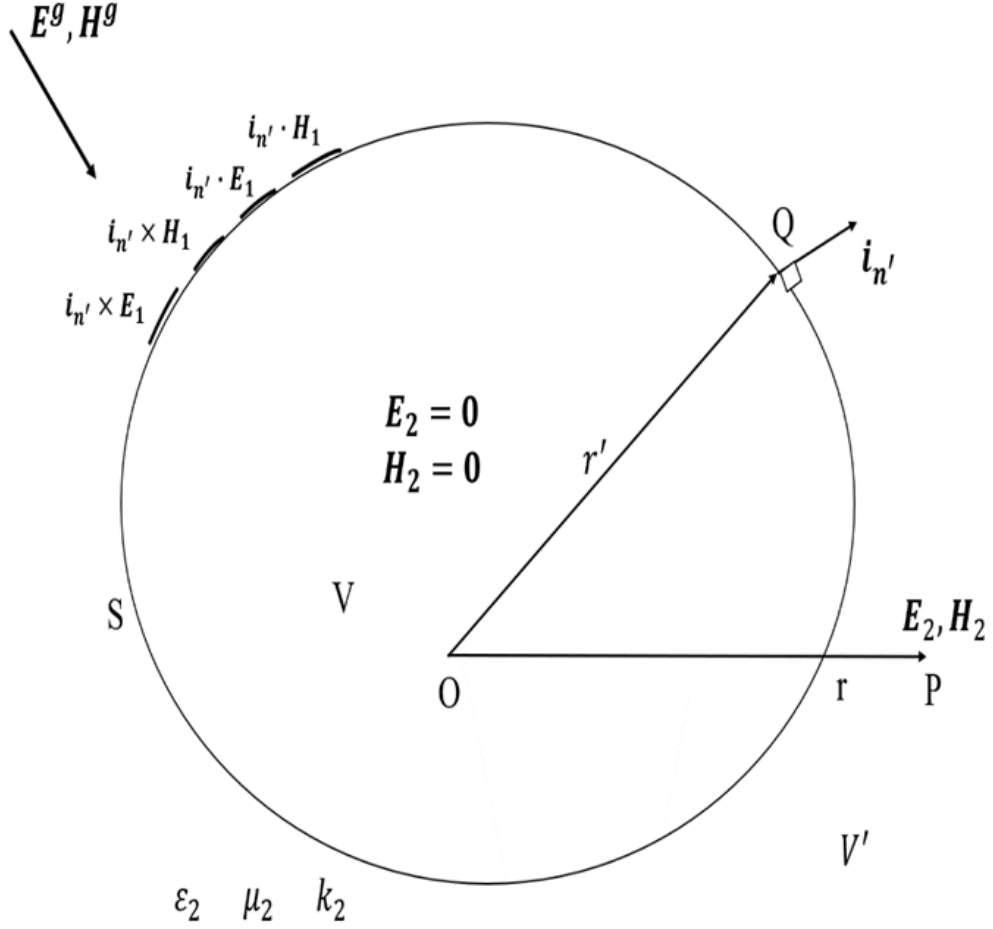
Şekil 3.6: İç bölgeyi ifade eden (3.67) ve (3.68) integral gösterimleri V 'de (E_1, H_1) ve V' 'de $(0,0)$ değerlerini sınır eğrisi C üzerindeki (E_1, H_1) 'in fonksiyonları olarak verir.

$$\mathbf{E}_1 = \int_S \{j\omega\mu_1 G_1(\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{H}_1) - (\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{E}_1) \times \nabla' G_1 - (\mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{E}_1) \nabla' G_1\} ds' \quad (3.67)$$

$r \in V$

$$\mathbf{H}_1 = - \int_S \{j\omega\epsilon_1 G_1(\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{E}_1) + (\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{H}_1) \times \nabla' G_1 + (\mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{H}_1) \nabla' G_1\} ds' \quad (3.68)$$

$r \in V$



Şekil 3.7: Dış bölgeyi ifade eden (3.69) ve (3.70) integral gösterimleri V'' de (E_2, H_2) ve V' de $(0,0)$ değerlerini sınır eğrisi C üzerindeki (E_2, H_2) 'in fonksiyonları olarak verir.

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^g - \int_S \{j\omega\mu_2 G_2 (\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{H}_2) - (\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{E}_2) \times \nabla' G_2 - (\mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{E}_2) \nabla' G_2\} ds' \quad (3.69)$$

$r \in V'$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}^g - \int_S \{j\omega\epsilon_2 G_2 (\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{E}_2) + (\mathbf{i}_{n'} \times \mathbf{H}_2) \times \nabla' G_2 + (\mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{H}_2) \nabla' G_2\} ds' \quad (3.70)$$

$r \in V'$

Yukarıdaki önceki durumlarda kabul ettiğimiz gibi V' de bir hacim kaynağı yoktur. Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 da görselleri verilen durumlar için vektör denklemleri yukarıda (3.67) – (3.70) denklemlerindeki gibi yazılır ve burada G_1 ve G_2 için aşağıdaki (3.71) eşitlikleri kullanılacaktır:

$$G_1 = \frac{e^{-jk_1|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \text{ ve } G_2 = \frac{e^{-jk_2|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad (3.71)$$

Burada, ne (3.67) ve (3.68) eşitliklerinin sağ tarafları $P \in V'$ ne de (3.69) ve (3.70) eşitliklerinin sağ tarafları $P \in V$ için değerleri bize verilmemiş olsa da yukarıda ki Şekil 3.6 ve Şekil 3.7'den bunların sıfır olduklarını rahatlıkla söylemek mümkündür.

Bu denklemleri, elektrik ve manyetik yüzey akımları olan $\mathbf{K}_1$ ve $\mathbf{K}_{m1}$ açısından yeniden yazabiliriz [25] ve böylece aşağıdaki integral gösterimlere ulaşmış oluruz:

$$\mathbf{E}_1 = \int_S \left\{ -j\omega\mu_1 \mathbf{K}_1 G_1 - \mathbf{K}_{m1} \times \nabla' G_1 - \frac{j}{\omega\epsilon_1} (\mathbf{K}_1 \cdot \nabla') \nabla' G_1 \right\} ds' \quad r \in V \quad (3.72)$$

$$\mathbf{H}_1 = - \int_S \left\{ -j\omega\epsilon_1 \mathbf{K}_{m1} G_1 + \mathbf{K}_1 \times \nabla' G_1 - \frac{j}{\omega\mu_1} (\mathbf{K}_{m1} \cdot \nabla') \nabla' G_1 \right\} ds' \quad r \in V \quad (3.73)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^g + \int_S \left\{ -j\omega\mu_2 \mathbf{K}_2 G_2 - \mathbf{K}_{m2} \times \nabla' G_2 - \frac{j}{\omega\epsilon_2} (\mathbf{K}_2 \cdot \nabla') \nabla' G_2 \right\} ds' \quad r \in V' \quad (3.74)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}^g + \int_S \left\{ -j\omega\epsilon_2 \mathbf{K}_{m2} G_2 + \mathbf{K}_2 \times \nabla' G_2 - \frac{j}{\omega\mu_2} (\mathbf{K}_{m2} \cdot \nabla') \nabla' G_2 \right\} ds' \quad r \in V' \quad (3.75)$$

(3.53)'te gösterimleri yapılmış olan elektrik ve manyetik eşdeğer yüzey akımları sayesinde aşağıdakini diyebiliriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= -\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_1, & \mathbf{K}_{m1} &= \mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_2, & \mathbf{K}_{m2} &= -\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_2 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Burada özel bir durum olarak, S üzerinde bir yüzey akımı olmadığı durumda $\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2$ ve $\mathbf{K}_{m1} = -\mathbf{K}_{m2}$ demek mümkündür. (3.72)'den (3.75)'e kadar olan denklemlerde $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_{m1}$, $\mathbf{K}_2$ ve $\mathbf{K}_{m2}$ eşdeğer akımlarının hiçbiri S üzerinde normal bir bileşene sahip değildir. Bu yüzden bu denklemlerdeki $\mathbf{K}_1 \times \nabla'$, $\mathbf{K}_{m1} \times \nabla'$, $\mathbf{K}_2 \times \nabla'$ ve $\mathbf{K}_{m2} \times \nabla'$ ifadelerindeki ∇' 'in ∇'_s ile yer değiştirildiği durumlarda geçerli olduğunu söylenebilir. (3.67) ile (3.70) eşitliklerinden farklı olarak, (3.72) ile (3.75) denklemlerinin bir diğer özelliği de alanların normal bileşenlerinin artık integral gösterimlerde görünmemesidir.

İntegral gösterimler ifade edilirken Green Fonksiyonlarının sadece birinci kısmı türevlerini içeren normal alanlara bağlı olmayan durumları düşünmemiz gerekir. Bu yüzden (3.53) yardımıyla $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{\eta_1}{\varepsilon_1}$ deriz. Benzer şekilde $\mathbf{K}$ ve η , $\mathbf{K}_1$ ve η_1 ile yer değiştirildiğinde E için $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\nabla_s \cdot \mathbf{K}_1}{j\omega\varepsilon_1}$ ve H için $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H}_1 = \frac{\nabla_s \cdot \mathbf{K}_{m1}}{j\omega\mu_1}$ yazılabilir. V için yazdığımız bu gösterimleri V' içinde yazacak olursak $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E}_2 = -\frac{\nabla_s \cdot \mathbf{K}_2}{j\omega\varepsilon_2}$ ve $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H}_2 = -\frac{\nabla_s \cdot \mathbf{K}_{m2}}{j\omega\mu_2}$ diyebiliriz.

Yukarıda bulmuş olduğumuz bu dört denklemi (3.67)'den (3.70)'e kadar olan denklemlerde uygun şekilde yerine koyup uyguladığımızda yeni integral gösterimleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathbf{E}_1 = \int_S \left\{ -j\omega\mu_1 K_1 G_1 - \mathbf{K}_{m1} \times \nabla' G_1 + \frac{j}{\omega\varepsilon_1} (\nabla_s' \cdot \mathbf{K}_1) \nabla' G_1 \right\} ds' \quad r \in V \quad (3.77)$$

$$\mathbf{H}_1 = - \int_S \left\{ -j\omega\varepsilon_1 K_{m1} G_1 + \mathbf{K}_1 \times \nabla' G_1 + \frac{j}{\omega\mu_1} (\nabla_s' \cdot \mathbf{K}_{m1}) \nabla' G_1 \right\} ds' \quad r \in V \quad (3.78)$$

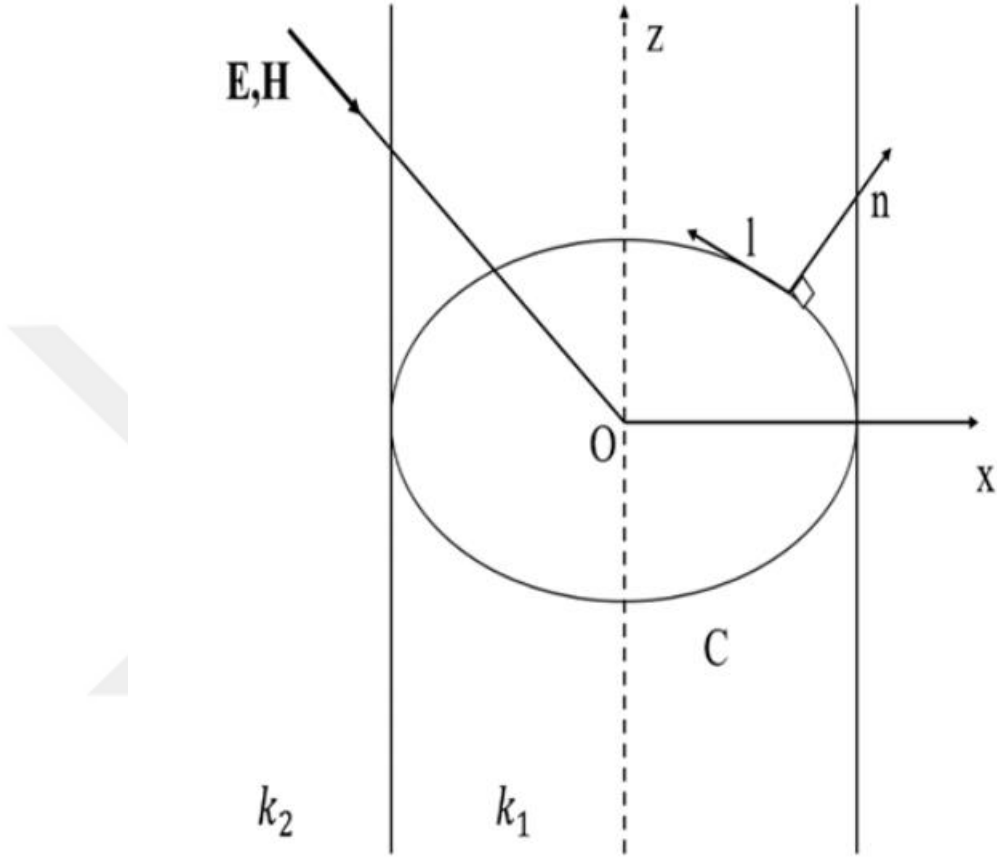
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^g + \int_S \left\{ -j\omega\mu_2 K_2 G_2 - \mathbf{K}_{m2} \times \nabla' G_2 + \frac{j}{\omega\varepsilon_2} (\nabla_s' \cdot \mathbf{K}_2) \nabla' G_2 \right\} ds' \quad r \in V' \quad (3.79)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}^g + \int_S \left\{ -j\omega\varepsilon_2 K_{m2} G_2 + \mathbf{K}_2 \times \nabla' G_2 + \frac{j}{\omega\mu_2} (\nabla_s' \cdot \mathbf{K}_{m2}) \nabla' G_2 \right\} ds' \quad r \in V' \quad (3.80)$$

Eğer ortamda herhangi bir saçıcı yoksa o zaman ($\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^g$) ve ($\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}^g$) olur, böylece (3.69), (3.70), (3.74), (3.75), (3.79) ve (3.80) denklemlerinin sağ taraflarının integrallerini hesapladığımızda sağ tarafların sıfır olacağını söylemek aşıkardır. Bu nedenle $\mathbf{E}_2$ ve $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{E}^g$ ve $\mathbf{H}^g$ ile yer değiştirilirse bu integraller yok olacaktır. (3.74), (3.75), (3.79) ve (3.80) denklemlerinden sonra $\mathbf{E}_2$ ve $\mathbf{H}_2$ 'nin gerçekten var olup görüldüğüne dikkat edilmelidir, çünkü (3.75) eşitliğinden sonra $\mathbf{K}_2 = \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_2$ ve $\mathbf{K}_{m2} = -\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_2$ olarak yazılmıştı. Bu yüzden eğer yukarıdaki durum aynı denklemlerde yani (3.69), (3.70), (3.74), (3.75), (3.79) ve (3.80)'de $\mathbf{E}_2$ ve $\mathbf{H}_2$, ($\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}^g = \mathbf{E}^s$) ve ($\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}^g = \mathbf{H}^s$) ile yer değiştirilmiş olsaydı yine yok

olacaklardı. Burada $\mathbf{E}^s$ ve $\mathbf{H}^s$ elektrik ve manyetik alanlardan sırasıyla yazılan saçıcı alanları temsil etmektedir.

3.5. Kesit Düzleminde Vektörel İntegral Gösterimler



Şekil 3.8: İlgili koordinatlarda xy-düzlemindeki C sınır eğrisiyle çevrelenmiş olan bir silindirin yüzeyin içindeki ve dışındaki silindirik bölge.

Bu kısımda yazılacak olan integral gösterimler, Şekil 3.8’de olduğu gibi geometrik yapısı düzgün olan z yönünde olacak ve diğer tüm alanlar z eksenine bağımlı olarak ifade edilecektir [25] :

$$F(z) = e^{jk_2 z \cos \theta} \quad (3.81)$$

$A(r)$ ’yi, üç boyutlu bir alanı temsil etmek üzere, $A(\rho)$ kesitli alan için değişimi verecek şekilde aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$A(r) = A(\rho)F(z) \quad (3.82)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(b\sqrt{a^2+x^2}+xy)}}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \frac{1}{4j} H_0^{(2)} \left(a\sqrt{b^2-y^2} \right), \quad a > 0 \quad (3.83)$$

(3.83) integral özelliğini kullanarak integral aldığımızda aşağıdaki eşitlikleri rahatlıkla buluruz. Bu eşitlikler yazılırken bir önceki bölümlerde belirtildiği gibi G_i ilgili bölgenin Green Fonksiyonudur.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(z') G_i dz' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_i \sqrt{|\rho-\rho'|^2+(z-z')^2}}}{4\pi \sqrt{|\rho-\rho'|^2+(z-z')^2}} e^{jk_2 z' \cos \theta} dz' \\ &= e^{jk_2 z \cos \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi \sqrt{R^2+t^2}} e^{-jk_i \sqrt{R^2+t^2} + jk_2 t \cos \theta} dt \\ &= \frac{1}{4j} F(z) H_0^{(2)} \left(R \sqrt{k_i^2 - k_2^2 \cos^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Bu eşitliğin sağ tarafından $F(z)$ kaldırılması sonucunda iki boyutlu skaler Helmholtz denklemi için boş uzay Green fonksiyonunda $k_i = \sqrt{k_i^2 - k_2^2 \cos^2 \theta}$ ile yer değiştirilmesi sonucu

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} e_z \\ h_z \end{Bmatrix} + \tau^2 \begin{Bmatrix} e_z \\ h_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.85)$$

yardımla bulunmuştur. Burada ∇ , ∇_t olacak şekilde enine bileşenine ve onun z bileşeni $i_z \frac{\partial}{\partial z}$ 'ye ayrılmıştır. Şimdi eşitliğin sağ tarafında integral alırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z') \nabla' G_i dz' = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\nabla_t' + i_z \frac{\partial}{\partial z'} \right) G_i \right\} F(z') dz' \quad (3.86)$$

eşitliği bulunmuş olur. Kısmi integral alınarak G_i 'nin $z' = \pm \infty$ de sıfır olması sayesinde aşağıdaki (3.87) eşitliğine göre

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\nabla'_t G_i) F(z') dz' - i_z \int_{-\infty}^{\infty} G_i \frac{\partial F(z')}{\partial z'} dz' = (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z) \int_{-\infty}^{\infty} F(z') G_i dz' \quad (3.87)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z') \nabla' G_i dz' = \frac{1}{4j} F(z) (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z) H_0^{(2)} \left(R \sqrt{k_i^2 - k_2^2 \cos^2 \theta} \right) \quad (3.88)$$

(3.88) eşitliği rahatlıkla yazılır. Benzer işlemler sayesinde aşağıdaki eşitliğin yazılması mümkündür:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (K \cdot \nabla') (\nabla' G_i) dz' &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F(z') (K \cdot \nabla'_t) \nabla' G_i + K i_z F(z') \frac{\partial}{\partial z'} (\nabla' G_i) \right\} dz' \\ &= K (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z) \int_{-\infty}^{\infty} F(z') \nabla' G_i dz' \\ &= \{K \cdot (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z)\} \frac{1}{4j} F(z) \cdot \\ &\quad (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z) H_0^{(2)} \left(R \sqrt{k_i^2 - k_2^2 \cos^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

(3.72)'ten (3.75)'ye kadar olan eşitliklerde $\int_S ds'$ (3.90)'da olduğu gibi ayrıştırılıp

$$\int_S ds' = \int_C dl' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \quad (3.90)$$

yeniden yazılmak istendiğinde iki boyutta integral gösterimler için aşağıdaki eşitliklere ulaşılır:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 = \int_C \left[-j\omega\mu_1 K_1 - K_{m1} \times (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z) \right. \\ \left. - \frac{j}{\omega\epsilon_1} \{K_1 \cdot (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z)\} (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z) \right] \hat{G}_1 dl' \\ \rho \in V \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 = \int_C \left[-j\omega\epsilon_1 K_{m1} + K_1 \times (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z) \right. \\ \left. - \frac{j}{\omega\mu_1} \{K_{m1} \cdot (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z)\} (\nabla'_t - jk_2 \cos \theta i_z) \right] \hat{G}_1 dl' \\ \rho \in V \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^g + \int_C \left[-j\omega\mu_2 K_2 - K_{m2} \times (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) - \frac{j}{\omega\epsilon_2} \{K_2 \cdot (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z)\} (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) \right] \hat{G}_2 dl' \quad \rho \in V' \quad (3.93)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}^g + \int_C \left[-j\omega\epsilon_2 K_{m2} + K_2 \times (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) - \frac{j}{\omega\mu_2} \{K_{m2} \cdot (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z)\} (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) \right] \hat{G}_2 dl' \quad \rho \in V' \quad (3.94)$$

(3.91)'den (3.94)'e kadar olan eşitlikleri yazarken $\hat{G}_1$ ve $\hat{G}_2$ çekirdeklerini V ve V' bölgelerinin dalga numaraları sırasıyla k_1 ve k_2 olacak şekilde aşağıdaki gibi yazalım:

$$\hat{G}_1 = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(\tau_1 R) \text{ ve } \hat{G}_2 = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(\tau_1 R) \quad (3.95)$$

$$\tau_1 = \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \cos^2\theta} \text{ ve } \tau_1 = k_2 \sin\theta \quad (3.96)$$

Benzer şekilde $\nabla_s = \nabla - i_n \frac{\partial}{\partial n} = i_l \frac{\partial}{\partial l} + i_z \frac{\partial}{\partial z}$ ve $\nabla_t = \nabla - i_z \frac{\partial}{\partial z} = i_n \frac{\partial}{\partial n} + i_l \frac{\partial}{\partial l}$ olduğuna dikkat ederek (3.77)'den (3.80)'e kadar olan eşitlikleri yeniden düzenleyerek kesit düzleminde integral gösterimlerini aşağıdaki gibi tamamlamış oluruz:

$$\mathbf{E}_1 = \int_C \left[-j\omega\mu_1 K_1 - K_{m1} \times (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) + \frac{j}{\omega\epsilon_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial l'} (i_{l'} \cdot K_1) + jk_2 (i_z \cdot K_1) \cos\theta \right\} (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) \right] \hat{G}_1 dl' \quad \rho \in V \quad (3.97)$$

$$\mathbf{H}_1 = \int_C \left[-j\omega\epsilon_1 K_{m1} + K_1 \times (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) + \frac{j}{\omega\mu_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial l'} (i_{l'} \cdot K_{m1}) + jk_2 (i_z \cdot K_{m1}) \cos\theta \right\} (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) \right] \hat{G}_1 dl' \quad \rho \in V \quad (3.98)$$

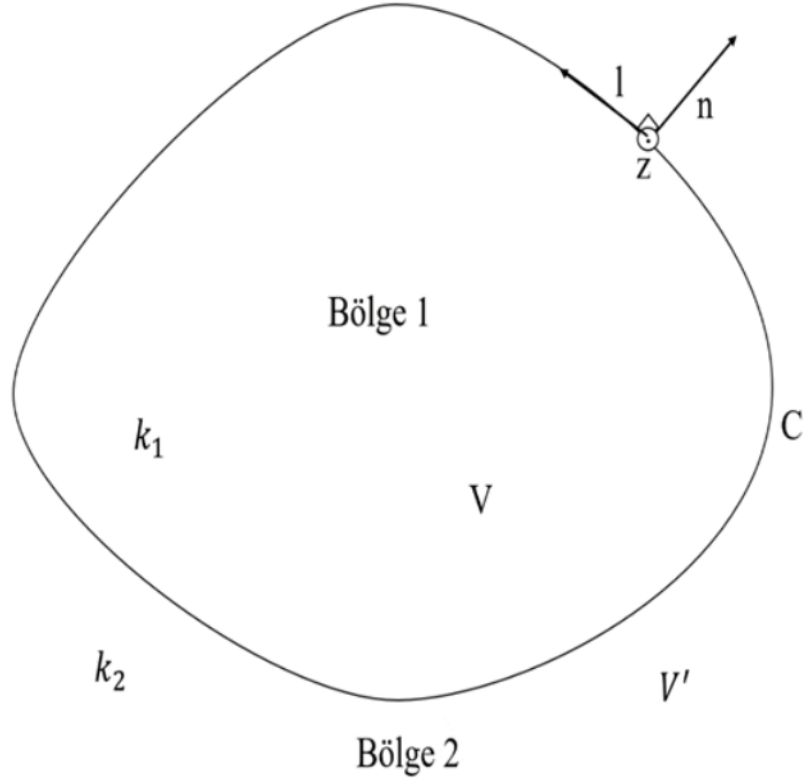
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^g + \int_C \left[-j\omega\mu_2 K_2 - K_{m2} \times (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) + \frac{j}{\omega\epsilon_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial l'} (i_{l'} \cdot K_2) + jk_2 (i_z \cdot K_2) \cos\theta \right\} (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta i_z) \right] \hat{G}_2 dl' \quad \rho \in V' \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}^g + \int_C [-j\omega\epsilon_2 \mathbf{K}_{m2} + \mathbf{K}_2 \times (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta \mathbf{i}_z) \\
+ \frac{j}{\omega\mu_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial l'} (\mathbf{i}_{l'} \cdot \mathbf{K}_{m2}) + jk_2 (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{K}_{m2}) \cos\theta \right\} (\nabla'_t - jk_2 \cos\theta \mathbf{i}_z)] \hat{\mathbf{G}}_2 dl' \quad (3.100) \\
\rho \in V'
\end{aligned}$$

Bununla birlikte bu sonuçların tamamı (3.93) ten (3.94) e kadar olan denklemler $\mathbf{K} \cdot \nabla'_t$ terimlerini l' 'ye göre integral alınarak elde edilmiştir. Burada $\mathbf{K} \cdot \nabla'_t$ 'de görünen $\mathbf{K}$ 'nin $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_{m1}$, $\mathbf{K}_2$ veya $\mathbf{K}_{m2}$ olduğu anlaşılmalıdır. C eğrisi açık olsa kısmi olarak integral alabiliriz.

3.6. Eksenel Alan Bileşenleri İçin İntegral Gösterimleri

E_z ve H_z , iki boyutlu yapıları içeren problemler için çoğunlukla temel büyüklükler olarak kullanılmaktadır[25]. Şekil 3.9'de kabul edilen (n, l, z) koordinat sistemi $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_l \times \mathbf{i}_z$ koşulundaki ortogonal koordinat sistemi olup bu kısımda yazılacak olan integral gösterimleri bu şekilde yapacağız.



Şekil 3.9: İki boyutlu V ve V' bölgeleri ile eğrisel (n, l, z) koordinatlar.

(3.91)'den (3.94)'e kadar olan eşitliklerde ki z bileşenlerini alıp, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_{m1}$, $\mathbf{K}_2$ ve $\mathbf{K}_{m2}$ yi l ve z bileşenlerine rahatlıkla ayırabiliriz. Böylece aşağıdaki sonuçları elde etmek mümkündür:

$$\mathbf{E}_{1z} = \int_C \left(\frac{-j\tau_1^2}{\omega\epsilon_1} K_{1z} + K_{m1l'} \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{k_2 \cos\theta}{\omega\epsilon_1} K_{1l'} \frac{\partial}{\partial l'} \right) \hat{G}_1 dl' \quad \rho \in V \quad (3.101)$$

$$\mathbf{H}_{1z} = \int_C \left(\frac{-j\tau_1^2}{\omega\mu_1} K_{m1z} - K_{1l'} \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{k_2 \cos\theta}{\omega\mu_1} K_{m1l'} \frac{\partial}{\partial l'} \right) \hat{G}_1 dl' \quad \rho \in V \quad (3.102)$$

$$\mathbf{E}_{2z} = \mathbf{E}_z^g + \int_C \left(\frac{-j\tau_2^2}{\omega\epsilon_2} K_{2z} + K_{m2l'} \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{k_2 \cos\theta}{\omega\epsilon_2} K_{2l'} \frac{\partial}{\partial l'} \right) \hat{G}_2 dl' \quad \rho \in V' \quad (3.103)$$

$$\mathbf{H}_{2z} = \mathbf{H}_z^g \int_C \left(\frac{-j\tau_2^2}{\omega\mu_2} K_{m2z} - K_{2l'} \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{k_2 \cos\theta}{\omega\mu_2} K_{m2l'} \frac{\partial}{\partial l'} \right) \hat{G}_2 dl' \quad \rho \in V' \quad (3.104)$$

(3.105) ve (3.106) eşitlikleri, enine alınan kesitteki koordinat bileşenlerini z bileşenlerinin cinsinden ifade ettiğini kabul ederek aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$e_t = -j \frac{k_z}{\tau^2} \nabla_t e_z + j \frac{\omega\mu}{\tau^2} i_z \times \nabla_t h_z \quad (3.105)$$

$$h_t = -j \frac{k_z}{\tau^2} \nabla_t h_z - j \frac{\omega\epsilon}{\tau^2} i_z \times \nabla_t e_z \quad (3.106)$$

Burada $k_z = -k_2 \cos\theta$ yerine koyulup, alt indis i 'yi $i = 1, 2$ olacak şekilde tanımlarsak yukarıda z için yazılan eşitlikler l bileşeni içinde tanımlanınca aşağıdaki gösterimler elde edilir:

$$\mathbf{E}_{il} = \frac{j}{\tau_i^2} \left(k_2 \cos\theta \frac{\partial \mathbf{E}_{iz}}{\partial l} + \omega\mu_i \frac{\partial \mathbf{H}_{iz}}{\partial n} \right), i = 1, 2 \quad (3.107)$$

$$\mathbf{H}_{il} = \frac{j}{\tau_i^2} \left(k_2 \cos\theta \frac{\partial \mathbf{H}_{iz}}{\partial l} - \omega\epsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}_{iz}}{\partial n} \right), i = 1, 2 \quad (3.108)$$

Tüm bu gösterimler ve $\mathbf{K}$ 'nin daha önce ifade edilen tanımlarından yararlanarak yeniden yazacak olursak

$$K_{il} = (-1)^{i+1} \mathbf{H}_{iz} \quad K_{iz} = \frac{j}{\tau_i^2} (-1)^i \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{H}_{iz}}{\partial l} - \omega \varepsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}_{iz}}{\partial n} \right) \quad (3.109)$$

$$K_{mil} = (-1)^i \mathbf{E}_{iz} \quad K_{miz} = \frac{j}{\tau_i^2} (-1)^{i+1} \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{E}_{iz}}{\partial l} + \omega \mu_i \frac{\partial \mathbf{H}_{iz}}{\partial n} \right) \quad (3.110)$$

eşitliklerini (3.109) ve (3.110)'de olduğu gibi yazabiliriz.

Aslında buradaki amacımız, tüm bu ilişkileri kullanarak C boyunca teğet alanların sürekli olduğunu varsayarak (3.101) den (3.104)'e kadar olan eşitliklerde $\mathbf{K}$ 'nin eşitliklerini $\mathbf{E}_{1z}$ ve $\mathbf{H}_{1z}$ cinsinden ya da $\mathbf{E}_{2z}$ ve $\mathbf{H}_{2z}$ cinsinden ifade etmektir.

C sınırı boyunca, elektrik ve manyetik alanların teğet kısımlarının sürekli olduğunu kabul edelim.

$$\mathbf{E}_{2z} = \mathbf{E}_{1z}, \quad \mathbf{H}_{2z} = \mathbf{H}_{1z}, \quad \mathbf{E}_{2l} = \mathbf{E}_{1l}, \quad \mathbf{H}_{2l} = \mathbf{H}_{1l} \quad (3.111)$$

(3.109) ve (3.110) eşitliklerini kullanarak, (3.101)'den (3.104)'e kadar olan eşitliklerinin sağ taraflarını ya iç alanlar $\mathbf{E}_{1z}$ ve $\mathbf{H}_{1z}$ olarak ya da dış alanlarını $\mathbf{E}_{2z}$ ve $\mathbf{H}_{2z}$ olarak ifade edebiliriz. Burada dikkat etmemiz gereken $\mathbf{E}_{2z}$ ve $\mathbf{H}_{2z}$ gösterimlerinin $\mathbf{E}_{1z}$ ve $\mathbf{H}_{1z}$ gösterimlerinden farklı olmasıdır. Bunun nedeni n bileşeni için türevlerinin birbirlerine eşit olmamasıdır.

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{2z}}{\partial n} \neq \frac{\partial \mathbf{E}_{1z}}{\partial n} \text{ ve } \frac{\partial \mathbf{H}_{2z}}{\partial n} \neq \frac{\partial \mathbf{H}_{1z}}{\partial n} \quad (3.112)$$

İç alanlar $\mathbf{E}_{1z}$ ve $\mathbf{H}_{1z}$ 'yi gösterirken, (3.109) ve (3.110) eşitliklerinde $i = 1$ olarak kabul ederek aşağıdaki gösterimleri yazabiliriz:

$$\mathbf{K}_{1l} = \mathbf{H}_{1z}, \quad \mathbf{K}_{1z} = -\frac{j}{\tau_1^2} \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{H}_{1z}}{\partial l} - \omega \varepsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}_{1z}}{\partial n} \right) \quad (3.113)$$

$$\mathbf{K}_{m1l} = -\mathbf{E}_{1z}, \quad \mathbf{K}_{m1z} = \frac{j}{\tau_1^2} \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{E}_{1z}}{\partial l} + \omega \mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}_{1z}}{\partial n} \right) \quad (3.114)$$

(3.113) ve (3.116) eşitliklerini (3.101) eşitliğinde yerine koyarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\mathbf{E}_{1z} = \int_C \left\{ \frac{\partial \mathbf{E}_{1z}}{\partial n'} - \mathbf{E}_{1z} \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{k_2 \cos \theta}{\omega \varepsilon_1} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{1z}}{\partial l'} + \mathbf{H}_{1z} \frac{\partial}{\partial l'} \right) \right\} \hat{G}_1 dl' \quad \rho \in V \quad (3.115)$$

Bu eşitlikte $\mathbf{H}_{1z}$ parçalara göre integral alınarak yok edilir. Aynı şekilde $\mathbf{E}_{1z}$ (3.113) ve (3.114) eşitliklerini de (3.102)'da yerine koyulmasıyla $\mathbf{H}_{1z}$ eşitliğinden yok edilirse sonuç olarak aşağıdaki eşitliklere ulaşılır:

$$\mathbf{E}_{1z} = \int_C \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{1z}}{\partial n'} - \mathbf{E}_{1z} \frac{\partial}{\partial n'} \right) \hat{G}_1 dl' , \quad \rho \in V \quad (3.116)$$

$$\mathbf{H}_{1z} = \int_C \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{1z}}{\partial n'} - \mathbf{H}_{1z} \frac{\partial}{\partial n'} \right) \hat{G}_1 dl' , \quad \rho \in V \quad (3.117)$$

Diğer taraftan, C sınırı boyunca kabul ettiğimiz süreklilikten dolayı elektrik ve manyetik alanlarının z ve l bileşenleri, daha önce (3.94)'te tanımlanan $\mathbf{K}_2$ 'ler yine aynı şekilde daha önce (3.94)'te tanımlanan $\mathbf{K}_1$ 'lerin eksi işaretlisi yani negatifleri olacaktır. Bu yüzden (3.113) ve (3.114) eşitlikleri yardımıyla

$$\mathbf{K}_{2l} = -\mathbf{H}_{1z} , \quad \mathbf{K}_{2z} = \frac{j}{\tau_1^2} \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{H}_{1z}}{\partial l} - \omega \varepsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}_{1z}}{\partial n} \right) \quad (3.118)$$

$$\mathbf{K}_{m2l} = \mathbf{E}_{1z} , \quad \mathbf{K}_{m2z} = -\frac{j}{\tau_1^2} \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{E}_{1z}}{\partial l} + \omega \mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}_{1z}}{\partial n} \right) \quad (3.119)$$

şeklinde yeniden yazılırlar. Yukarıda bulunan $\mathbf{K}$ ifadelerini (3.103) ve (3.104) denklemlerinde yazdığımızda kısmi integral alıp (3.96) denkleminde

$$\tau_1^2 - \tau_2^2 = k_1^2 - k_2^2 \quad (3.120)$$

ifadesini çıkardığımızda $\rho \in V'$ için integral gösterimler aşağıdaki gibi olurlar:

$$\mathbf{E}_{2z} = \mathbf{E}_z^g + \int_C \left(-\frac{\tau_2^2 \varepsilon_1}{\tau_1^2 \varepsilon_2} \frac{\partial \mathbf{E}_{1z}}{\partial n'} + \mathbf{E}_{1z} \frac{\partial}{\partial n'} + \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{\omega \varepsilon_2 \tau_1^2} k_2 \cos \theta \mathbf{H}_{1z} \frac{\partial}{\partial l'} \right) \hat{G}_2 dl' \quad \rho \in V' \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{2z} = \mathbf{H}_z^g &+ \int_C \left(-\frac{\tau_2^2 \mu_1}{\tau_1^2 \mu_2} \frac{\partial \mathbf{H}_{1z}}{\partial n'} + \mathbf{H}_{1z} \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{\omega \mu_2 \tau_1^2} k_2 \cos \theta \mathbf{E}_{1z} \frac{\partial}{\partial l'} \right) \hat{G}_2 dl' \quad (3.122) \\ &\rho \in V' \end{aligned}$$

Dış alanlar için $\mathbf{E}_{2z}$ ve $\mathbf{H}_{2z}$ 'yi gösterilirken benzer yolu tabip ederek (3.113), (3.114), (3.1189 ve (3.119) denklemlerinden hızlıca aşağıdaki sonuçları yazabiliriz:

$$\mathbf{K}_{1l} = \mathbf{H}_{2z}, \quad \mathbf{K}_{1z} = -\frac{j}{\tau_2^2} \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{H}_{2z}}{\partial l} - \omega \varepsilon_2 \frac{\partial \mathbf{E}_{2z}}{\partial n} \right) \quad (3.123)$$

$$\mathbf{K}_{m1l} = -\mathbf{E}_{2z}, \quad \mathbf{K}_{m1z} = \frac{j}{\tau_2^2} \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{E}_{2z}}{\partial l} + \omega \mu_2 \frac{\partial \mathbf{H}_{2z}}{\partial n} \right) \quad (3.124)$$

$$\mathbf{K}_{2l} = -\mathbf{H}_{2z}, \quad \mathbf{K}_{2z} = \frac{j}{\tau_2^2} \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{H}_{2z}}{\partial l} - \omega \varepsilon_2 \frac{\partial \mathbf{E}_{2z}}{\partial n} \right) \quad (3.125)$$

$$\mathbf{K}_{m2l} = \mathbf{E}_{2z}, \quad \mathbf{K}_{m2z} = -\frac{j}{\tau_2^2} \left(k_2 \cos \theta \frac{\partial \mathbf{E}_{2z}}{\partial l} + \omega \mu_2 \frac{\partial \mathbf{H}_{2z}}{\partial n} \right) \quad (3.126)$$

Yazılan tüm bu $\mathbf{K}$ gösterimlerini (3.101)'den (3.104)'e kadar olan denklemlerde yeniden yazarak, (3.116), (3.117), (3.121) ve (3.122) integral gösterimlerinde olduğu gibi aşağıdaki gibi düzenleriz:

$$\mathbf{E}_{1z} = \int_C \left(\frac{\tau_1^2 \varepsilon_2}{\tau_2^2 \varepsilon_1} \frac{\partial \mathbf{E}_{2z}}{\partial n'} - \mathbf{E}_{2z} \frac{\partial}{\partial n'} + \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{\omega \varepsilon_1 \tau_2^2} k_2 \cos \theta \mathbf{H}_{2z} \frac{\partial}{\partial l'} \right) \hat{G}_1 dl' \quad (3.127)$$

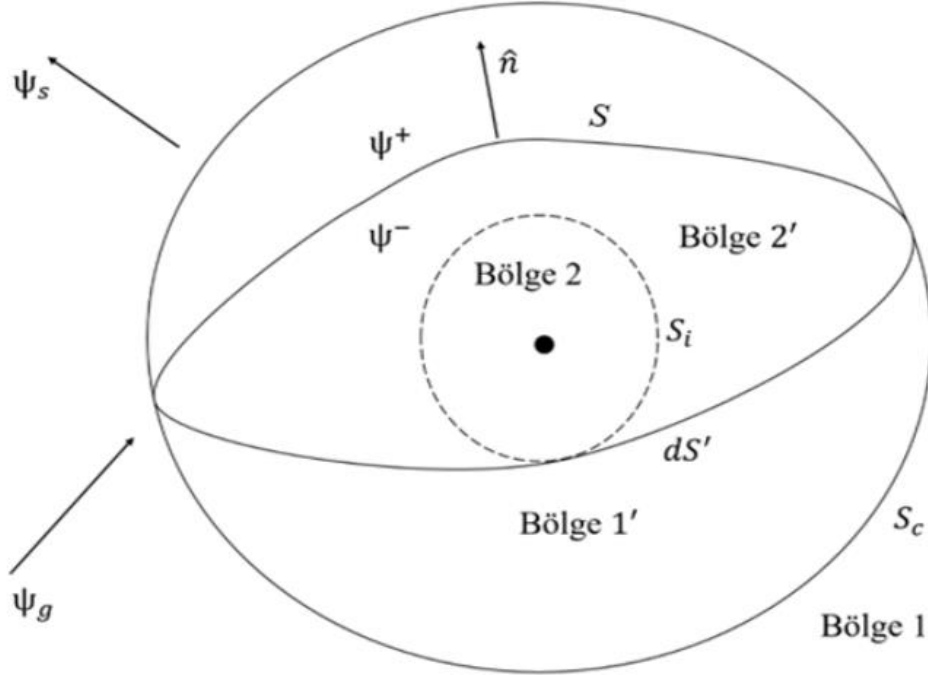
$$\mathbf{H}_{1z} = \int_C \left(\frac{\tau_1^2 \mu_2}{\tau_2^2 \mu_1} \frac{\partial \mathbf{H}_{2z}}{\partial n'} - \mathbf{H}_{2z} \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{\omega \mu_1 \tau_2^2} k_2 \cos \theta \mathbf{E}_{2z} \frac{\partial}{\partial l'} \right) \hat{G}_1 dl' \quad (3.128)$$

$$\mathbf{E}_{2z} = \mathbf{E}_z^g - \int_C \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{2z}}{\partial n'} - \mathbf{E}_{2z} \frac{\partial}{\partial n'} \right) \hat{G}_2 dl' \quad (3.129)$$

$$\mathbf{H}_{2z} = \mathbf{H}_z^g - \int_C \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{2z}}{\partial n'} - \mathbf{H}_{2z} \frac{\partial}{\partial n'} \right) \hat{G}_2 dl' \quad (3.130)$$

4. T MATRİS YÖNTEMİ

Bu kısımda daha önce 20.yüzyılda P.C.Waterman tarafından geliştirilen farklı bir metot olan yok olma (extinction theorem) teoreminden yararlanarak yeni bir teknikten bahsedeceğiz. Bu teoreme göre, saçıcının içindeki yüzey alanı, nesnenin iç kısmı boyunca tam olarak yok edilen ya da söndürülen yani sıfır olarak kabul edilen bir alan katkısı üretir. Bu kısımda ilk olarak, yok olma teoremini genişletilmiş sınır koşulu (extended boundary condition) olarak kullanıp, saçıcının iç kısmı boyunca geçerli olan bir önceki kısımda yazılan yüzey alanları için integral denklemlerin nasıl elde edilebileceğini göstereceğiz. İkinci olarak ta, yüzey alanı integral denklemlerinin saçıcının iç kısmı boyunca karşılanmadığına dikkat ediyoruz, bunun sebebi analitik süreklilikten dolayı sadece iç hacmin herhangi bir kısmında tutulması gerektiği gerçeğidir. Göz önünde bulundurulması gereken bu iki durum kullanılan T - Matrisi Yönteminin temellerini oluşturmaktadır. Yapılan uygulamalarda bu iki ana unsur saçılan dalganın durumunu gelen dalga ile ilişkilendiren T - Matrisi üretmek için kullanılmaktadır. Çalışmada kullanılan problem türü Dirichlet problemi olduğundan bu çalışma için yöntemin detaylarından bahsedeceğiz. T - Matris Yönteminin detaylarını incelerken [13]'da ki gibi olup uygun prosedürler takip edilecektir.



Şekil 4.1: T Matris Metodu.

Dirichlet saçılma problemi için sınır koşullarının geçerli olduğu S yüzeyine sahip bir nesneye çarpan ψ_g dalgasının Şekil 4.1’de gösterildiği gibi ele alalım. Biliyoruz ki bu problem iki boyutlu bir problem olup ilk olarak ψ_g ’yi uygun bir fonksiyon olarak ifade etmeliyiz. Bu problemler için uygun olan seçim iki boyutlu silindirik harmoniklerdir. Böylece ψ_g ’yi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\psi_g(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_n(kr) e^{jn\phi} \quad (4.1)$$

(4.1) eşitliği yazılırken ψ_g ’nin orijin dahil olmak üzere her yerde sonlu olduğuna ve bu durum göz önünde bulundurularak $J_n(kr)$ ’nin kullanılması gerektiğine dikkat edelim. Gelen dalga için a_n bilinen katsayıdır.

Gelen dalga yazıldıktan sonra, sınırlı olan S_c silindirinin dışındaki bölge 1’de saçılan dalga ψ_s yazılırken aynı silindirik harmoniklerde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\psi_s(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n H_n^{(2)}(kr) e^{jn\phi} \quad (4.2)$$

Saçılan dalga için uygun seri ifadesi yazılırken, dalga dışarı çıktığı için radyasyon koşulunu sağlaması adına ikinci türden Hankel fonksiyonu tercih edilmiştir.

Gelen dalga ve saçılan dalga için uygun gösterimler ve katsayılar gösterildikten sonra T matrisi, $[a] = [a_n]$ ve $[b] = [b_n]$ sütun matrisleri ve $[T]$ kare matris olacak şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$[b] = [T][a] \quad (4.3)$$

Burada bu matrisler kesilir ve nümerik sonuçların alınabilmesi için sıfırlanırlar. Daha sonrasında T matrisi yok olma teoreminin kullanılmasıyla sistematik olarak aşağıdaki adımlar takip edilerek elde edilir.

T matrisinin oluşturulması için ilk olarak yok olma teoremi eğer $\vec{r}$ iç kısımda olarak kabul edilirse aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$\psi_g(\bar{r}) + \int_S \left[\psi(\bar{r}') \frac{\partial G(\bar{r}, \bar{r}')}{\partial n'} - G(\bar{r}, \bar{r}') \frac{\partial \psi(\bar{r}')}{\partial n'} \right] ds' = 0 \quad (4.4)$$

Bu teorem ayrıca şekil 4.1'deki bölge 2 ve bölge 2' yazılırken de geçerlidir. Ancak, şimdi bunu şekilde iç kısmı ifade etmek için gösterilen S_i içindeki bölge 2'ye uygulayalım. $|\bar{r}| < |\bar{r}'|$ olup Green fonksiyonu $G(\bar{r}, \bar{r}')$, $r < r'$ için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = -\frac{j}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) H_n^{(2)}(kr') e^{jn(\phi-\phi')} \quad (4.5)$$

Şimdi Green fonksiyonun (4.5) eşitliğini ve (4.1)'i (4.4) denkleminin içine koyalım. Burada (4.4) denkleminde ψ_g 'nin $J_n(kr)e^{jn\phi}$ terimini içeren bir seri olduğuna ve ayrıca yine aynı eşitlik olan (4.4)'teki integral gösterimindeki Green fonksiyonu $G(\bar{r}, \bar{r}')$ 'nin de $J_n(kr)e^{jn\phi}$ terimini içeren bir seri olduğuna dikkat etmeliyiz. $J_n(kr)e^{jn\phi}$ ortogonal olduğundan, $J_n e^{jn\phi}$ 'nin her bir katsayısını sıfırı eşitleyebiliriz. Böylece a_n için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$a_n = \frac{j}{4} \int_S \left[\psi(\bar{r}') \frac{\partial}{\partial n'} H_n^{(2)}(kr') e^{-jn\phi'} - \frac{\partial \psi(\bar{r}')}{\partial n'} H_n^{(2)}(kr') e^{-jn\phi'} \right] dS' \quad (4.6)$$

Burada $dS' = \left[r'^2 + \left(\frac{dr'}{d\phi'} \right)^2 \right]^{1/2} d\phi'$ olarak tanımlanan ifade $r' = r'(\phi')$ olan S yüzeyi boyunca temel mesafe olup

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \hat{n} \cdot \nabla = \left[r'^2 + \left(\frac{dr'}{d\phi'} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(\bar{r}' \frac{\partial}{\partial r'} - \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial \phi'} \frac{\partial}{\partial \phi'} \right) \quad (4.7)$$

eşitliğinden bulunmuş olur.

(4.6) eşitliği, gelen dalganın a_n kat sayılarını $\psi(\bar{r}')$ ve $\frac{\partial \psi(\bar{r}')}{\partial n'}$ yüzey alanları ile ilişkilendirir ve yok olma teoreminin sadece bölge 2'ye uygulanmasıyla elde edilir. Bu nedenle (4.6)'da elde edilen yüzey alanı eşitliği yukarıda bulunan (4.4) eşitliğinde yerine konulduğunda bölge 2'deki alanı tamamen sıfırlayıp yok etmelidir. Bunun

yanında, yok oluş teoreminin (4.4) eşitliğindeki sol tarafı hem bölge 2 hem de bölge 2' deki dalga denklemlerinin düzenli bir çözümüdür ve bu nedenle bölge 2 de sıfır yani boşsa analitik devamlılıktan bölge 2' sıfırdır. Böylece (4.6)'da belirlenen yüzey alanı, tüm iç bölgeler olan bölge 2 ve bölge 2' için (4.4) eşitliğinin geçerliliğini sağlayan gerçek yüzey alanı olmalıdır.

Aşağıdaki eşitlikler yardımıyla bölge 1'deki saçılmış alan ψ_g ifadesini elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}\psi_g(\bar{r}) &= \int_S \left[\psi(\bar{r}') \frac{\partial G(\bar{r}, \bar{r}')}{\partial n'} - G(\bar{r}, \bar{r}') \frac{\partial \psi(\bar{r}')}{\partial n'} \right] dS' \\ G(\bar{r}, \bar{r}') &= -\frac{j}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr') H_n^{(2)}(kr) e^{jn(\phi-\phi')}, \quad r > r'\end{aligned}\quad (4.8)$$

(4.2)'de yazılan ψ_g gösterimini ve $H_n^{(2)}(kr) e^{jn\phi}$ Hankel fonksiyonun ortogonal olmasından yararlanarak b_n katsayılarını aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$b_n = -\frac{j}{4} \int_S \left[\psi(\bar{r}') \frac{\partial}{\partial n'} J_n(kr') e^{-jn\phi'} - \frac{\partial \psi(\bar{r}')}{\partial n'} J_n(kr') e^{-jn\phi'} \right] dS' \quad (4.9)$$

Yazılan bu eşitlikler sayesinde yüzey alanları cinsinden ifade edebildiğimiz (4.6)'da a_n ve (4.9)'da b_n gösterimlerine sahibiz. Daha sonrasında sınır koşullarını kullanarak yüzey alanını tam bir fonksiyon olarak ifadesi elde edilecektir. Daha sonra iki denklemden (4.6) ve (4.9) yüzey alanını çıkaracağız ve tüm bu işlemlerin sonunda T matrisi elde edilmiş olacaktır.

Şimdi de bahsedilen bu işlem basamaklarını Dirichlet probleminin çözümü için S yüzeyinde $\psi = 0$ olduğunu unutmadan uygulayarak açıklayalım. Böylece aşağıdaki eşitliklere ulaşılmış olur:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{j}{4} \int_S \left[-\frac{\partial \psi(\bar{r}')}{\partial n'} H_n^{(2)}(kr') e^{-jn\phi'} \right] dS' \\ b_n &= \frac{j}{4} \int_S \left[\frac{\partial \psi(\bar{r}')}{\partial n'} J_n(kr') e^{-jn\phi'} \right] dS'\end{aligned}\quad (4.10)$$

Bu kısımda işlemlere devam ederken bilinmeyen yüzey fonksiyonu olarak ifade ettiğimiz $\partial\psi/\partial n'$ ifadeyi bir seri fonksiyonu olarak yeniden düzenleriz. Seri fonksiyonu keyfi olarak seçebiliriz ve bunu yaparken a_n bilinmeyen katsayı olup $J_n(kr')e^{jn\phi'}$ tam kısım olarak kabul edilip aşağıdaki eşitliği keyfi olarak seçtiğimiz fonksiyon olarak yazalım:

$$\frac{\partial\psi(\bar{r}')}{\partial n'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\partial}{\partial n'} [J_n(kr')e^{jn\phi'}] \quad (4.11)$$

(4.11)'deki keyfi seçimi (4.10) eşitliğinin içine koyarak aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$\begin{aligned} [a] &= [Q^-][\alpha] \\ [b] &= -[Q^+][\alpha] \end{aligned} \quad (4.12)$$

burada $[a]$, $[b]$ ve $[\alpha]$ sütun matrisleri olup

$$\begin{aligned} Q_{mn}^- &= -\frac{j}{4} \int_S \psi_m \phi_n' ds' \\ Q_{mn}^+ &= -\frac{j}{4} \int_S \psi_{rm} \phi_n' ds' \\ \psi_m &= H_m^{(2)}(kr')e^{-jm\phi'} \\ \psi_{rm} &= J_m(kr')e^{jm\phi'} \\ \phi_n' &= \frac{\partial}{\partial n'} [J_n(kr')e^{jn\phi'}] \end{aligned} \quad (4.13)$$

eşitliklerini yazalım. Son olarak (4.12)'den yüzey alanı $[\alpha]$ çıkararak T matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\begin{aligned} [b] &= [T][a] \\ [T] &= -[Q^+][Q^-]^{-1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Şimdide S üzerinde sınır koşulu $(\partial/\partial n')\psi_r = 0$ koşulunun geçerli olduğu Neumann problemini Dirichlet problemini incelediğimiz gibi inceleyelim. (4.4) ve (4.6) eşitliklerinden yüzey üzerinde $\psi(\bar{r}')$ teriminde a_n ve b_n elde edilebilir. Bunu yaparken $\psi(\bar{r}')$ 'yi $J_n(kr')e^{jn\phi'}$ fonksiyonu yardımıyla genişletip yeniden yazarsak a_n bilinmeyen kat sayılar olup

$$\psi(\bar{r}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_n(kr') e^{jn\phi'} \quad (4.15)$$

şeklinde yazarız ve bu eşitliği (4.4) ve (4.6) eşitliğinde yerine koyarak aşağıdaki matris setlerini elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} [a] &= [Q^-][\alpha] \\ [b] &= -[Q^+][\alpha] = [T][a] \\ [T] &= -[Q^+][Q^-]^{-1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

burada ayrıca

$$\begin{aligned} Q_{mn}^- &= \frac{j}{4} \int_S \psi'_m \phi'_n ds' \\ Q_{mn}^+ &= \frac{j}{4} \int_S \psi'_{rm} \phi'_n ds' \end{aligned} \quad (4.17)$$

ve

$$\begin{aligned} \psi'_m &= \frac{\partial}{\partial n'} [H_m^{(2)}(kr') e^{-jm\phi'}] = \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m \\ \psi'_{rm} &= \frac{\partial}{\partial n'} [J_m(kr') e^{-jm\phi'}] = \frac{\partial}{\partial n'} \psi_{rm} \\ \phi_n &= J_n(kr') e^{jn\phi'} \end{aligned} \quad (4.18)$$

olduklarına dikkat edilmelidir [13].

Şekil 4.1'den yararlanarak S yüzeyi dışındaki dalga sayılarının ve yoğunluklarının k_0 ve ρ_0 , S içindeki dalga sayılarının ve yoğunluklarının k_1 ve ρ_1 olduğu iki ortamlı bir elektromanyetik saçılma probleminin çözümü için ψ^+ ve ψ^- fonksiyonlarının S yüzeyinin hemen dışındaki ve içindeki yüzey alanını gösterebiliriz.

S yüzey alanı içinde k_1 dalga numarası ile dalga denklemini sağlar ve bu nedenle $\psi(\vec{r})$ aşağıdaki gibi silindirik harmoniklerde β_n bilinmeyen kat sayı olmak üzere yeniden yazılabilir:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n J_n(k_1 r) e^{jn\phi'} \quad (4.19)$$

(4.19) eşitliği kullanılarak hemen S içindeki alan için aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür:

$$\begin{aligned} \psi^-(\vec{r}') &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n J_n(k_1 r) e^{jn\phi'} \\ \frac{\partial \psi^-(\vec{r}')}{\partial n'} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{\partial}{\partial n'} [J_n(k_1 r) e^{jn\phi'}] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Tüm bu gösterimler için sınır koşullarını yazmak istersek sınır koşulları (4.21)'deki gibidir:

$$\begin{aligned} \psi^+(\vec{r}') &= \frac{\rho_1}{\rho_0} \psi^-(\vec{r}') \\ \frac{\partial \psi^+(\vec{r}')}{\partial n'} &= \frac{\partial \psi^-(\vec{r}')}{\partial n'} \end{aligned} \quad (4.21)$$

(4.4)'teki a_n ve (4.6)'daki b_n ifadeleri, S yüzeyinin hemen dışındaki alanları içerir ve β_n tarafından verilen alanlarla ilişkilidir. Tüm bu durumlar göz önünde bulundurularak yeniden yazılacak olursa:

$$\begin{aligned} [a] &= [Q^-][\beta] \\ [b] &= -[Q^+][\beta] = [T][a] \\ [T] &= -[Q^+][Q^-]^{-1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

ve

$$\begin{aligned}
Q_{mn}^- &= \frac{j}{4} \int_S \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \psi'_m \phi_n - \psi_m \phi'_n \right) ds' \\
Q_{mn}^+ &= \frac{j}{4} \int_S \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \psi'_{rm} \phi_n - \psi_{rm} \phi'_n \right) ds' \\
\psi_m &= H_m^{(2)}(k_0 r') e^{-jm\phi'} \\
\psi'_m &= \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m \\
\psi_{rm} &= J_m(k_0 r') e^{jm\phi'} \\
\psi'_{rm} &= \frac{\partial}{\partial n'} \psi_{rm} \\
\phi_n &= J_n(k_1 r') e^{jn\phi'} \\
\phi'_n &= \frac{\partial}{\partial n'} \phi_n
\end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklinde olacaktır [13].

T - Matrisi Yöntemi, düzensiz şekillere sahip parçacıklar gibi karmaşık şekillerden oluşan bir cisimden saçılma için başarıyla kullanılmıştır. Silindirik harmoniklerde sınır koşulları genişletilmesinden yararlanıldığından, büyük eksenlerin küçük eksenlere oranı çok daha büyükse matris şartsız hale gelebilir.

Bu kısımda T - Matris Yönteminin iki boyutlu problemler ve silindirik harmonikler için nasıl olması gerektiği gösterilmiştir. T - Matrisi Yöntemi, küresel harmonikler kullanan üç boyutlu problemlere eşit şekilde uygulanabilir. P.C.Waterman'ında dediği gibi, elektromanyetik saçılma problemleri için vektör alanlarının tam silindirik veya küresel açılımı kullanılmalıdır.

4.1. Birçok Saçıcı Saçılma Problemleri İçin T Matris Yöntemi

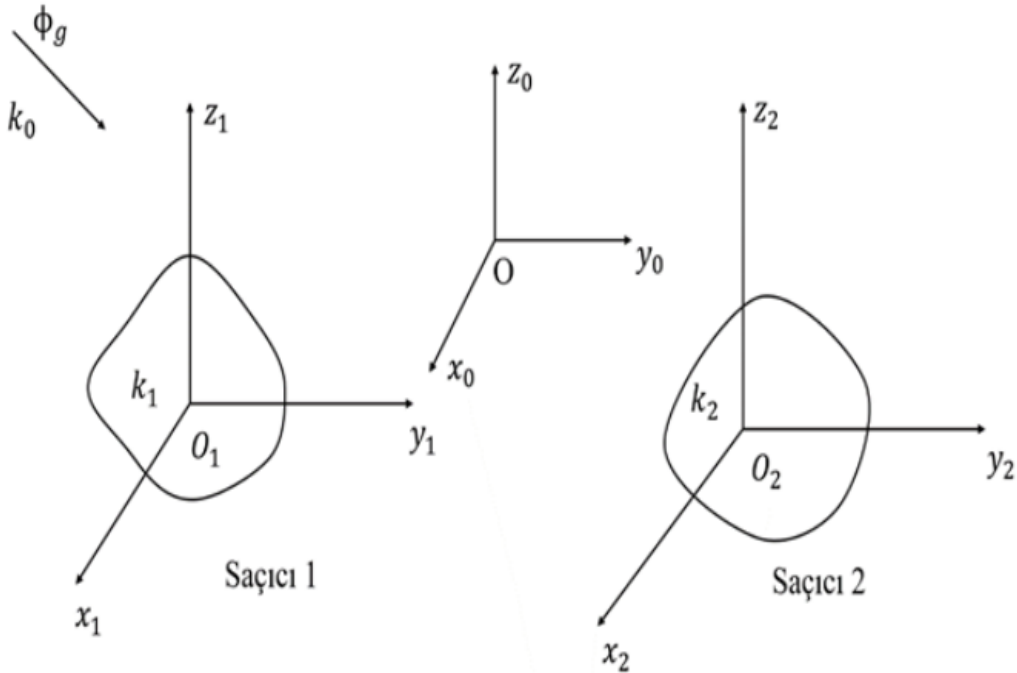
Bir saçıcı için T Matrisi bulunduğu zaman, birçok saçıcı tarafından saçılmanın çözümünü oluşturmak için rahatlıkla kullanılabilir. Ancak birden fazla saçıcı olduğunda saçıcılar arasında birden fazla saçılmanın var olduğu unutulmamalıdır. Bu durumdan dolayı öteleme toplama teoremini küresel veya silindirik harmonikler için uygulayarak böyle bir sorunun çözümü kolayca bulunur [1].

Tek bir saçıcı için ortaya konulan T matrisi yaklaşımının birden fazla saçıcının veya katmanların var olduğu durumlar için de genişletilmesi mümkündür. Örneğin çoklu

saçıcı problemi için, ilgilenilen cisimden saçılan alanlara ilişkin katsayıların bulunabilmesinin yolu bu cismin haricindeki cisimlerden saçılan dalgaları duran dalga fonksiyonu cinsinden ifade etmekten geçer. Böylece duran dalga fonksiyonu ile çarpılan katsayılar ile, ilgilenilen cisimden saçılan alanların katsayısı arasında bir T matrisi ilişkisi kurmak mümkün olur. Bunun fiziksel olarak anlamı, bir cisimden saçılan alanın diğer bir cisme göre üzerine gelen alan olarak değerlendirilebilmesidir. Bir başka deyişle, bir cisimden saçılan alanın yerel koordinat sistemine göre yazılmış dışarı giden dalga cinsinden harmonik açılımları, toplamsallık teoremi yani seri açılımı kullanılarak diğer bir cismin yerel koordinat sistemi üzerinde yazıldığında duran dalgalar cinsinden harmonik açılımlarına dönüşürler. Benzer biçimde çoklu katmanlar için saçılma ve nüfuz probleminde de ilgilenilen bölgede tanımlı yerel koordinat sisteminde tanımlanmış geçen veya saçılan alanlar toplamsallık teoremi aracılığıyla başka bir koordinat sistemi cinsinden ifade edilebilir. Böylece çoklu saçıcı veya katman problemlerinde her bir saçıcıya ilişkin aranan bilinmeyen katsayılarla dair doğrusal cebrik denklem sistemleri elde edilir [12].

4.1.1. Çok Saçıcı İçin Çözüm

Çok saçıcı için çözüm basamakları incelenirken [1]'de gösterildiği gibi prosedürleri takip ederek çözüme ulaşmamız mümkündür.



Şekil 4.2: Gelen alanın olduğu yerde iki saçıcı.

Şekil 4.2’de gösterildiği gibi iki saçıcı varsa gelen alanı

$$\phi_g(r) = \text{Rg}\psi^t(k_0, r_0) \cdot \mathbf{a} \quad (4.24)$$

(4.24)’te olduğu gibi ve bunun yanında saçılmış alanı ise

$$\phi_s(r) = \psi^t(k_0, r_1) \cdot f_1 + \psi^t(k_0, r_2) \cdot f_2 \quad (4.25)$$

(4.25)’te ki gibi ifade edebiliriz. Bu gösterimler yapılırken [12]’de bahsedildiği gibi t üst indisi ile belirtilen vektörün transpozunu ifade ederken, $\psi^t(k, r)$ dışarı alana giden silindirik harmonikler cinsinden saçılan alanları ifade eden satır vektörleri olup $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{f}$ sırasıyla gelen alan ve saçılan alanın kat sayılarını içeren sütun vektörlerini oluşturmaktadır.

Yukarıdaki gösterim (4.25) yazılırken, her bir saçıcıdan saçılan dalganın, saçıcıların kendi koordinatlarında ifade edilen giden harmonikler cinsinde genişletildiğine dikkat etmeliyiz. Neyse ki hem silindirik hem de küresel harmonikler için gösterimler mevcuttur ve d_{ij} ; i ve j koordinatlarının merkezleri O_i ve O_j arasındaki mesafeyi gösterecek şekilde aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$\psi^t(k_0, r_i) = \text{Rg}\psi^t(k_0, r_j) \cdot \bar{a}_{ij}, \quad |r_j| < d_{ij} \quad (4.26)$$

$$\psi^t(k_0, r_i) = \psi^t(k_0, r_j) \cdot \bar{\beta}_{ji}, \quad |r_j| > d_{ij} \quad (4.27)$$

$$\text{Rg}\psi^t(k_0, r_i) = \text{Rg}\psi^t(k_0, r_j) \cdot \bar{\beta}_{ji}, \quad \forall |r_j| \quad (4.28)$$

Yukarıda ki bu formüller, bir koordinat sistemindeki alanın harmonik genişlemesinin başka bir koordinat sistemi cinsinden kolayca ifade edilmesini sağlar. Genel olarak $\bar{\beta}_{ji} = \text{Rg}\bar{a}_{ij}$ yazılır ve Rg regüler kısım anlamına gelmektedir.

(4.26) ve (4.28) kullanılarak, ilk saçıcının koordinatları cinsinden ifade edilen saçıcıların dışındaki toplam alan aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\phi(r) = \text{Rg}\psi^t(k_0, r_1) \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} + \psi^t(k_0, r_1) \cdot f_1 + \text{Rg}\psi^t(k_0, r_1) \cdot \bar{a}_{12} \cdot f_2 \quad (4.29)$$

Yukarıdaki (4.29) gösteriminde ki birinci ve üçüncü terimler saçıcı 1'e çarpan gelen dalga alanı olarak görülebilirken, ikinci terim ise saçıcı 1'den saçılan alanı ifade etmektedir. Ancak birinci saçıcının izole olması durumundaki T matrisine sahipsek yani biliniyorsa bu T matrisi kullanılarak $\mathbf{a}$, f_1 ve f_2 arasında bir ilişki yazabiliriz. Diğer bir deyişle bunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$f_1 = \bar{T}_{1(1)} \cdot [\bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} + \bar{a}_{12} \cdot f_2] \quad (4.30)$$

Benzer şekilde saçıcı 2 içinde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$f_2 = \bar{T}_{2(1)} \cdot [\bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} + \bar{a}_{21} \cdot f_1] \quad (4.31)$$

Yukarıda ki $\bar{T}_{i(1)}$ i'inci saçıcı için izole saçıcı $\bar{T}$ matrisidir ve parantez içerisindeki 1 tek saçıcı olduğunu gösterir.

Denklem (4.30) ve (4.31) çözülerek aşağıdaki denklemler elde edilebilir:

$$f_1 = [\bar{I} - \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{a}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{a}_{21}]^{-1} \cdot \bar{T}_{1(1)} \cdot [\bar{\beta}_{10} + \bar{a}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20}] \cdot \mathbf{a} \quad (4.32)$$

$$f_2 = [\bar{I} - \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{a}_{21} \cdot \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{a}_{12}]^{-1} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot [\bar{\beta}_{20} + \bar{a}_{21} \cdot \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10}] \cdot \mathbf{a} \quad (4.33)$$

Yukarıdaki (4.32) ve (4.33) eşitliklerinden yararlanarak yeni $\bar{T}$ matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanır ve burada $\bar{T}_{i(2)}$ iki saçıcı için $\bar{T}$ matrisidir:

$$f_1 = \bar{T}_{1(2)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} \quad (4.34)$$

$$f_2 = \bar{T}_{2(2)} \cdot \bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} \quad (4.35)$$

$\bar{T}_{i(2)}$, i'inci saçıcıdan kaynaklanan toplam saçılan alanı iki saçıcı mevcut olduğunda gelen alan genliği ile ilişkilendirir. Burada $\bar{T}_{i(2)}$ için elde edilen eşitliklerin (4.34) ve (4.35) denklemleriyle (4.32) ile (4.33) denklemlerinin karşılaştırılması sonucu elde edilebileceğine dikkat etmeliyiz. Dahası $\bar{\beta}_{i0}$ faktörü eklenir ve böylece $\bar{T}$ matrisleri öz koordinatlara veya saçıcılara göre tanımlanmaya devam eder.

Daha önce iki saçıcı için verilen durumu şimdi N saçıcı için genellemek istersek ilk olarak üç saçıcı için her bir saçıcıdan saçılan alanların katsayıları ile ilgili olan ilişkileri için aşağıdaki eşitlikleri yazmak gerekir:

$$f_1 = \bar{T}_{1(1)} \cdot [\bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} + \bar{a}_{12} \cdot f_2 + \bar{a}_{13} \cdot f_3] \quad (4.36)$$

$$f_2 = \bar{T}_{2(1)} \cdot [\bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} + \bar{a}_{21} \cdot f_1 + \bar{a}_{23} \cdot f_3] \quad (4.37)$$

$$f_3 = \bar{T}_{3(1)} \cdot [\bar{\beta}_{30} \cdot \mathbf{a} + \bar{a}_{31} \cdot f_1 + \bar{a}_{32} \cdot f_2] \quad (4.38)$$

Burada $\bar{T}_{i(1)}$ daha önce de bahsedildiği gibi i 'inci saçıcının izole olmuş saçıcı T matrisidir. Bununla birlikte bir sonraki kısımda bahsedilecek olan $\bar{A} \cdot f = b$ matris sistemi yardımıyla yukarıda yazılan (4.36), (4.37) ve (4.38) denklemleri kolaylıkla çözülebilir. Buradan hareketle yukarıdaki ilişkiler N saçıcı içinde rahatlıkla kurulabilir. Böylece N saçıcı için T matrisin gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$f_i = \bar{T}_{i(1)} \cdot \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \bar{\beta}_{il} \cdot \mathbf{a} + \bar{a}_{il} \cdot f_j \right] \quad (4.39)$$

5. T MATRİSİN REGÜLERLEŞTİRİLMESİ

5.1. Tek Saçıcı İçin T Matrisin Regülerleştirilmesi

T matrisi yöntemi genişletilmiş sınır koşulları (GSK) yönteminde saçıcıyı kapsayan ve saçıcının kapsadığı test yüzeyleri ile saçıcı yüzeyi arasındaki maksimum uzaklığın büyük olması durumunda $\bar{Q}$ matrisinin kötü koşullu olduğu bilinmektedir. Bir saçıcılı durum için saçılan alanın katsayı vektörüne ilişkin ifadeyi daha önce yazılan iki saçıcılı durumdan rahatlıkla aşağıda ki gibi ifade edebiliriz:

$$f_1 = \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} \quad (5.1)$$

Ayrıca genişletilmiş sınır koşulu yöntemi sonucu elde edilen T matrisi Rg ile gösterilen regüler kısmı temsil etmekte olup aşağıdaki gibidir:

$$\bar{T}_{1(1)} = -(Rg\bar{Q}_{10}) \cdot \bar{Q}_{10}^{-1} \quad (5.2)$$

Burada $\bar{Q}_{10}$ matrisinin elemanları doldurulurken gerekli olan silindirik harmonikler [12]'de olduğu gibi $H_n^{(2)}(x)$ n. mertebeden Hankel fonksiyonu olup $J_n(x)$ n. mertebeden Bessel fonksiyonu olacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\psi_n(k_0, \rho'_1) = H_n^{(2)}(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (5.3)$$

$$Rg\psi_n(k_0, \rho_1) = J_n(k_0 \rho_1) e^{jn\phi}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (5.4)$$

$$Rg\psi_m(k_1, \rho'_1) = J_m(k_1 \rho'_1) e^{jn\phi'_1}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (5.5)$$

Burada $\bar{Q}_{10}$ matrisinin elemanları doldurulurken [12]'de olduğu gibi

$$Q_{nm}^{10} = \int_S \{ \psi_n(k_0, \rho'_1) \hat{n}' \cdot \nabla' Rg\psi_m(k_1, \rho'_1) \frac{\rho_1}{\rho_0} - Rg\psi_m(k_1, \rho'_1) \hat{n}' \cdot \nabla' \psi_n(k_0, \rho'_1) \} dl' \quad (5.6)$$

(5.6) denkleminde gösterilen $\bar{Q}_{nm}$ matrisinin içine yukarıda gösterilen (5.3) ve (5.5) silindirik harmonikleri içine yazılırsa

$$Q_{nm}^{10} = \int_S \left\{ \left(H_n^{(2)}(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1} \right) \hat{n}' \cdot \nabla' \left(J_m(k_1 r'_1) e^{jn\phi'_1} \right) \frac{\rho_1}{\rho_0} - \left(J_m(k_1 r'_1) e^{jn\phi'_1} \right) \hat{n}' \cdot \nabla' \left(H_n^{(2)}(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1} \right) \right\} dl' \quad (5.7)$$

ifadesi elde edilir ve benzer şekilde $Rg\bar{Q}_{10}$ matrisinin elemanları

$$RgQ_{nm}^{10} = \int_S \left\{ \left(J_n(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1} \right) \hat{n}' \cdot \nabla' \left(J_m(k_1 r'_1) e^{jn\phi'_1} \right) \frac{\rho_1}{\rho_0} - \left(J_m(k_1 r'_1) e^{jn\phi'_1} \right) \hat{n}' \cdot \nabla' \left(J_n(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1} \right) \right\} dl' \quad (5.8)$$

şeklinde olurlar.

$n, m \in [-M, M]$ olmak üzere M arttıkça $\bar{Q}$ ve $Rg\bar{Q}$ matrislerinin davranışlarını incelemek için bu kısımlarda yazılan Hankel ve Bessel Fonksiyonlarının asimptotik davranışlarını da bilmek, incelemek gerekmektedir. Bu nedenle bu fonksiyonların $n \rightarrow \infty$ için asimptotik gösterimleri [14]'te olduğu gibi incelenirse

$$|J_n(x)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left| \left(\frac{ex}{2n} \right)^n \right| \quad (5.9)$$

$$|H_n^{(1,2)}(x)| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left| \left(\frac{2n}{et} \right)^n \right| \quad (5.10)$$

sonucu elde edilir ve buna ek olarak Stirling formülü ise aşağıdaki şekilde verilir:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \quad (5.11)$$

(5.11) formülü (5.9) ve (5.10) gösterimlerinde kullanılarak aşağıdaki gösterimler elde edilir:

$$|J_n(x)| \leq \frac{e^{|Im x|}}{n!} \left| \left(\frac{x}{2} \right)^n \right| \quad (5.12)$$

$$\left| H_n^{(1,2)}(x) \right| \leq (n-1)! e^{|Im x|} \left| \left(\frac{2}{t} \right)^n \right| \quad (5.13)$$

Elde edilen bu gösterimler sayesinde $\bar{T}_{1(1)}$ matrisinin kötü koşullu olduğu ortaya çıkmaktadır [14]. $H_n^{(1,2)}(x)$ fonksiyonu $(n-1)!$ ile orantılı bir şekilde hızla artarken $J_n(x)$ fonksiyonu ise $(n)!$ ile orantılı bir şekilde hızla azalmaktadır. Bu sebeple diyebiliriz ki $Rg\bar{Q}$ matrisi hızlıca azalan karakterde iken $\bar{Q}$ matrisi ise nispeten dengeli karakter göstermektedir. Her ne kadar $\bar{Q}$ matrisi dengeli gözükse de dairesel geometrilere dahi kötü koşullu olduğunu nümerik sonuçlar yardımıyla göstermek mümkündür. Burada teorik olarak diyebiliriz ki, sonsuz boyuttaki bu matris bir kesme sayısında kesildiğinde bu matrisin Öklid matris normu ve koşullanma sayısı sınırlanmamıştır ve çok hızlı bir şekilde büyümektedir [10],[26]. Bu nedenle birinci türden lineer cebrik denklem sistemi özelliği gösteren bu denklem sistemi nümerik olarak çözüm yaparken yuvarlama hatalarıyla karşılaşılır.

(5.1) deki gösterilen denklem, genişletilmiş sınır koşulları yöntemi sayesinde saçıcının içine geçen alanın katsayılarına bağlı olacak şekilde ayrıştırılabilir ve böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilmiş olur:

$$-\frac{j}{4} \bar{Q}_{10} \cdot a = a \quad (5.14)$$

$$f_1 = \frac{j}{4} (Rg\bar{Q}_{10}) \cdot a \quad (5.15)$$

Burada saçılan alanın katsayı vektörü f_1 'in bulunabilmesi için $\bar{Q}_{10}$ matrisinin tersinin alınması gerektiğini (5.14) denkleminden söyleyebiliriz ve bu denklem birinci türden lineer cebrik denklem sistemidir. Bu sistemini $\bar{I}$ birim matris ve $\bar{K}$ l_2 uzayında tanımlı kompakt operatör olmak üzere [14] nümerik açıdan güvenli ve $[\bar{I} + \bar{K}]$ matrisinin koşullanma sayısının sınırlı olduğu $[\bar{I} + \bar{K}]y = g$ olacak şekilde ikinci türden lineer cebrik denklem sistemine dönüştürmek regülerleştirme işlemi ile sağlanır. Bu işlem

yani regülerleştirme için köşegen $\bar{R}$ matrisi yardımıyla bilinmeyen a yardımıyla yeni bir bilinmeyen vektör aşağıdaki gibi olur:

$$y = \bar{R}^{-1} \cdot a \quad (5.16)$$

(5.16) eşitliği kullanılarak (5.14) denklemi katsayı $\bar{Q}_{10}$ içinde olduğu düşünülerek yeniden yazılırsa

$$\bar{Q}_{10} \cdot \bar{R} \cdot \bar{R}^{-1} \cdot a = a \quad (5.17)$$

$$\bar{Q}_{10} \cdot \bar{R} \cdot y = a \quad (5.18)$$

eşitlikleri elde edilmiş olup buradaki köşegen $\bar{R}$ matrisi sağdan regülerleştirme operatörüdür. Böylelikle (5.18) denklem sistemi yalnızca sağdan regülerleştirilmiştir. Buna benzer şekilde soldan bir regülerleştirme operatörü olarak köşegen $\bar{L}$ matrisi tanımlanır ve (5.18) denkleminin her iki yanı bu yeni $\bar{L}$ operatörü ile çarpılırsa

$$\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R} \cdot y = \bar{L} \cdot a \quad (5.19)$$

elde edilir. Bu işlem yapılarak daha önce birinci türden lineer cebrik sistemi (5.14), $[\bar{I} + \bar{K}]y = g$ gibi nümerik açıdan güvenli ikinci türden lineer cebrik denklem sistemine dönüştürülerek regülerleştirilmiş olur. Burada

$$\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R} = \bar{I} + \bar{K} \quad (5.20)$$

$$\bar{g} = \bar{L} \cdot a \quad (5.21)$$

olduğuna dikkat edilir. Birinci türden olan (5.14) sistemini regülerleştirmek için köşegen olan $\bar{R}$ ve $\bar{L}$ için uygun gösterimler ve seçimler aşağıdaki gibidir:

$$\bar{R} = \text{diag}\left[H_m^{(1)}(k_0 a_1)\right] \quad (5.22)$$

$$\bar{L} = \text{diag}\left[H_n^{(1)}(k_0 a_1)\right]^{-1} \quad (5.23)$$

Bu seçimlerde ele alınan fonksiyonların (5.12) ve (5.13) eşitliklerinde verilen asimptotik davranışları gözettiliği bilinir ve öz çözümler ile örtüşmesi şart değildir. Zaman bağımlılığı uyarınca ikinci türden Hankel fonksiyonlarının kullanılmasına rağmen burada birinci türden Hankel fonksiyonlarının görünmesi de bu yüzdendir. Burada a_1 ile gösterilen silindirik saçıcının yarı çapı olup ayrıca $\bar{R}$ ve $\bar{L}$ köşegen matris olduklarından dolayı

$$\bar{L} = \bar{R}^{-1} \quad (5.24)$$

yazılabilir. Bu seçim ile $\bar{Q}_{10}$ matrisi ile sağdan çarpılan köşegen $\bar{R}$ matrisi, $\bar{Q}_{10}$ matrisinde sütun boyunca değişen ve Bessel fonksiyonu içeren terimleri buna asimptotik olarak karşıt davranış gösteren Hankel fonksiyonu ile regülerleştirilir. Benzer biçimde köşegen olan $\bar{L}$ matrisi $\bar{Q}_{10}$ matrisi ile soldan çarpılarak satır boyunca değişen ve Hankel fonksiyonu içeren terimleri Hankel fonksiyonun tersleri ile regülerleştirilir. Böylece $\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R}$ matrisi birim ve kompakt matris toplamı haline dönüşerek tersinin alınmasında sorun olmayan forma getirilir. Buradan (5.19) eşitliğinde y vektörü yalnız bırakılarak ki bu işlem yapılırken $\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R}$ 'nin tersi ile her iki tarafı soldan çarpmak gerekir ve burada (5.16)'teki eşitlik kullanılarak ise aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$y = (\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R})^{-1} \cdot \bar{L} \cdot a \quad (5.25)$$

$$a = \bar{R} \cdot (\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R})^{-1} \cdot \bar{L} \cdot a \quad (5.26)$$

Böylece saçılan alanla ilişkisi bilinmeyen f_1 vektörünü bulmak için (5.26) eşitliğini (5.15) denkleminde yerine yazacak olursak ve daha önce kaldırılan $-\frac{j}{4}$ sabiti tekrar dahil edilirse (5.15) eşitliğinin yeni hali

$$f_1 = -(Rg\bar{Q}_{10}) \cdot \bar{R} \cdot (\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R})^{-1} \cdot \bar{L} \cdot a \quad (5.27)$$

olarak bulunur ve ayrıca

$$(\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R})^{-1} = \bar{R}^{-1} \cdot \bar{Q}_{10}^{-1} \cdot \bar{L}^{-1} \quad (5.28)$$

olacak şekilde yazabiliriz. (5.28) eşitliği içerisinde (5.27) eşitliği yazıldığı zaman

$$f_1 = -(Rg\bar{Q}_{10}) \cdot (\bar{R} \cdot \bar{R}^{-1}) \cdot \bar{Q}_{10}^{-1} \cdot (\bar{L}^{-1} \cdot \bar{L}) \cdot a \quad (5.29)$$

bulunur ve bilindiği üzere bir matris ve onun matrisinin çarpımı birim matris sonucunu verdiği için (5.29) eşitliği

$$f_1 = -(Rg\bar{Q}_{10}) \cdot \bar{Q}_{10}^{-1} \cdot a \quad (5.30)$$

şeklinde yeniden yazılır ve bu ifade matematiksel olarak (5.1) gösterimi ile aynı olduğunu dolayısıyla (5.27) eşitliğinin doğru olduğunu görmekteyiz. (5.27) eşitliğindeki $(\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R})^{-1}$ matris tersi sayısal olarak güvenli bir şekilde sonuç verirken (5.2)'deki eşitlikten $\bar{Q}_{10}^{-1}$ matris tersini direkt olarak almak sayısal açıdan hatalara neden olacaktır.

5.2. Çok Saçıcı İçin T Matrisin Regülerleştirilmesi

Daha önce iki saçıcı için (4.30) ve (4.31) ilişkilerini f_i katsayılarının izole edilmiş T matrisi cinsinden ifadelerini

$$f_1 = \bar{T}_{1(1)} \cdot [\bar{\beta}_{10} \cdot a + \bar{a}_{12} \cdot f_2] \quad (5.31)$$

$$f_2 = \bar{T}_{2(1)} \cdot [\bar{\beta}_{20} \cdot a + \bar{a}_{21} \cdot f_1] \quad (5.32)$$

olacak şekilde yazmıştık, [12]'te olduğu gibi yeniden düzenlendiğinde

$$f_1 - \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{a}_{12} \cdot f_2 = \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a \quad (5.33)$$

$$f_2 - \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{a}_{21} \cdot f_1 = \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20} \cdot a \quad (5.34)$$

(5.33) ve (5.34) elitliklerinde olduğu gibi yazılırlar. Böylelikle blokları aşağıda verilen şekilde olan $\bar{A} \cdot f = b$ matris sistemi rahatlıkla kurulabilir:

$$A_{ij} = \begin{cases} \bar{I} & i = j \\ -\bar{T}_{i(1)} \cdot \bar{a}_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad (5.35)$$

$$b_i = \bar{T}_{i(1)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot \mathbf{a} \quad (5.36)$$

Yukarıda gösterimleri yapılan (5.35) ve (5.36) blokları yardımıyla oluşturulan matris birinci türden lineer cebrik denklem sistemidir ve alınan silindirik harmonik sayısı olan M arttıkça $\bar{A}$ matrisi istenmeyen bir durum olarak kötü koşullu hale gelir ve bu kötü koşul istenmeyen durumdur dolayısıyla tersi alınırken daha da dikkatli olmak gerekir. Bu kötü koşullu sistemi regülerleştirme sayesinde iyi koşullu bir sistem olan $[\bar{I} + \bar{K}]y = g$ şeklindeki ikinci türden lineer cebrik denklem sistemine dönüştürerek bir önceki sistemde dikkat edilmesi gereken durumu ortadan kaldıracaktır. İkinci türden lineer cebrik denklem sistemi yazılırken daha önce bahsedildiği gibi $\bar{I}$ birim matris ve $\bar{K}$ l_2 uzayında tanımlanmış olan kompakt operatördür [14]. İstenen iyi koşullu ikinci türden lineer cebrik denklem sistemini elde etmek için

$$\bar{L} \cdot \bar{A} \cdot \bar{R} = \bar{I} + \bar{K} \quad (5.37)$$

$$y = \bar{R}^{-1} \cdot f \quad (5.38)$$

$$\bar{g} = \bar{L} \cdot b \quad (5.39)$$

eşitlikleri yazılır ve $\bar{R}_i$, $\bar{R}$ köşegen matrisinin blokları olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\bar{R}_i = \text{diag}\left[H_n^{(1)}(k_0 a_i)\right]^{-1} \quad (5.40)$$

ve burada a_i dairesel saçıcının yarıçapını temsil etmekte olup ayrıca

$$\bar{L} = \bar{R}^{-1} \quad (5.41)$$

yazılır ve buna ek olarak, $\bar{L}_i$, $\bar{L}$ köşegen matrisinin blokları olarak

$$\bar{L}_i = \text{diag}\left[H_m^{(1)}(k_0 a_1)\right] \quad (5.42)$$

şeklindedir. Tüm gösterimlerde kullanılan $\bar{L}$ ve $\bar{R}$ daha öncede bahsedildiği gibi sırasıyla soldan ve sağdan regülerleştirme operatörleridir. Eğer bu operatörleri daha önceki (5.35) ve (5.36) şeklinde blokları verilmiş olan matris sisteme uygularsak

$$[\bar{I} + \bar{K}] = \begin{cases} \bar{I} & i = j \\ -\bar{L}_i \cdot \bar{T}_{i(1)} \cdot \bar{a}_{ij} \cdot \bar{R}_j & i \neq j \end{cases} \quad (5.43)$$

$$g_i = \bar{L}_i \cdot \bar{T}_{i(1)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot \mathbf{a} \quad (5.44)$$

eşitlikleri elde edilir ve böylelikle sistem istenen şekilde regülerleştirilmiş olur.

Daha önce her bir saçıcıdan saçılan ve geçen alanların katsayılarının birbirleri ile ilgili olan ilişkilerinden bahsedilmişti. Bu ilişkiler aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$b_0 - \bar{T}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} \cdot b_1 = \bar{R}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 \quad (5.45)$$

$$a_1 - \bar{R}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} \cdot b_1 = \bar{T}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 \quad (5.46)$$

$$b_1 - \bar{R}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} \cdot a_1 = 0 \quad (5.47)$$

$$a_2 - \bar{T}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} \cdot a_1 = 0 \quad (5.48)$$

Bu denklemler düzenlenerek $\bar{A} \cdot x = y$ lineer denklem sistemi oluşturulduğunda bu sistem aşağıdaki gibi olur ve birinci türden lineer cebrik denklem sistemidir:

$$\begin{bmatrix} \bar{I} & 0 & -\bar{T}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} & 0 \\ 0 & \bar{I} & \bar{R}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} & 0 \\ 0 & -\bar{R}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} & \bar{I} & 0 \\ 0 & -\bar{T}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} & 0 & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 \\ \bar{T}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Elde edilen bu daha önceki [14], [12] çalışmalardaki sistemle aynıdır ve bu sistemde $\bar{R}_{12}$ hızla azalan ve $\bar{R}_{10}$ hızla artan özellikteki fonksiyonları içerirken $\bar{T}_{10}$ ve $\bar{T}_{12}$ istenen şekilde dengelenmiş durumdadır. Birinci türden lineer cebrik denklem sistemini regülerleştirerek $[\bar{I} + \bar{K}]z = g$ şeklinde olan ikinci türden lineer cebrik denklem sistemini oluşturmak için önerilen sağdan regülerleştirme operatörü olarak ifade edilen $\bar{R}$ daha önceki çalışma olan [14]'de olduğu gibi aşağıdaki şekildedir:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \left[H_n^{(1)}(k_0 a_1) \right]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[H_n^{(1)}(k_1 a_1) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[H_n^{(1)}(k_1 a_2) \right]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left[H_n^{(1)}(k_2 a_2) \right] \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Burada Hankel fonksiyonunun tersi ile gelen regülerleştirme operatörleri saçılan alanın katsayılarını, diğer operatörler ise gelen alanın katsayılarını belirtir. Regülerleştirme yapılırken sağdan regülerleştirme operatörünün blokları için gelen veya saçılan alanın katsayılarını belirlemesine göre uygun ifade yazılırsa aşağıdaki köşegen matrisler yazılabilir:

$$\bar{R}_i^R = \text{diag} \left[H_n^{(1)}(k_{i-1} a_i) \right]^{-1} \quad (5.51)$$

$$\bar{R}_i^T = \text{diag} \left[H_n^{(1)}(k_i a_i) \right] \quad (5.52)$$

(5.51) ve (5.52) köşegen matrislerini (5.50) matrisinde yerine yazarsak $\bar{R}$ operatörü aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1^R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{R}_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{R}_2^R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{R}_2^T \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Sağdan regülerleştirme operatörü $\bar{R}$ için uygun gösterim [14]'de olduğu gibidir ve buna benzer şekilde soldan regülerleştirme operatörü $\bar{L}$ içinde aşağıdaki köşegen matris yazılabilir [14]:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{L}_1^R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{L}_2^R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{L}_2^T \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

(5.54)'te yazılan $\bar{L}$ köşegen matrisin elemanları aşağıdaki şekilde doldurulur:

$$\bar{L}_{i+1}^R = \text{diag}\left[H_n^{(1)}(k_i a_{i+1})\right] \quad (5.55)$$

$$\bar{L}_{i+1}^T = \text{diag}\left[H_n^{(1)}(k_{i+1} a_{i+1})\right]^{-1} \quad (5.56)$$

(5.49) matris sistemine soldan ve sağdan regülerleştirme operatörleri uygun bir şekilde uygulanırsa ikinci türden lineer cebrik denklem sistemi elde edilir ve

$$\bar{L} \cdot \bar{A} \cdot \bar{R} = \bar{I} + \bar{K} \quad (5.57)$$

$$z = \bar{R}^{-1} \cdot x \quad (5.58)$$

$$g = \bar{L} \cdot y \quad (5.59)$$

sistemi bulunur ve bu sistem ikinci türden lineer cebrik denklem sistemi olup

$$[\bar{I} + \bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{I} & 0 & -\bar{L}_1^R \cdot \bar{T}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} \cdot \bar{R}_2^R & 0 \\ 0 & \bar{I} & \bar{L}_1^T \cdot \bar{R}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} \cdot \bar{R}_2^R & 0 \\ 0 & -\bar{L}_2^R \cdot \bar{R}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} \cdot \bar{R}_1^T & \bar{I} & 0 \\ 0 & -\bar{L}_2^T \cdot \bar{T}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} \cdot \bar{R}_1^T & 0 & \bar{I} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$z = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

$$g = \begin{bmatrix} \bar{L}_1^R \cdot \bar{R}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 \\ \bar{L}_1^T \cdot \bar{T}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

şeklinde olacaktır [12].

(5.61)'deki regüler katsayı vektörleriyle ilişkili olacak şekilde (5.45)'ten (5.48)'e kadar olan eşitliklerin regülerleştirilmiş yeni denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{b}_0 - \bar{L}_1^R \cdot \bar{T}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} \cdot \bar{R}_2^R \cdot \tilde{b}_1 = \bar{L}_1^R \cdot \bar{R}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 \quad (5.63)$$

$$\tilde{a}_1 - \bar{L}_1^T \cdot \bar{R}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} \cdot \bar{R}_2^R \cdot \tilde{b}_1 = \bar{L}_1^T \cdot \bar{T}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 \quad (5.64)$$

$$\tilde{b}_1 - \bar{L}_2^R \cdot \bar{R}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} \cdot \bar{R}_1^T \cdot \tilde{a}_1 = 0 \quad (5.65)$$

$$\tilde{a}_2 - \bar{L}_2^T \cdot \bar{T}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} \cdot \bar{R}_1^T \cdot \tilde{a}_1 = 0 \quad (5.66)$$

İki saçıcılı durum için yapılan regülerleştirme operasyonu genişletilerek N saçıcı içinde genelleştirmek mümkündür.

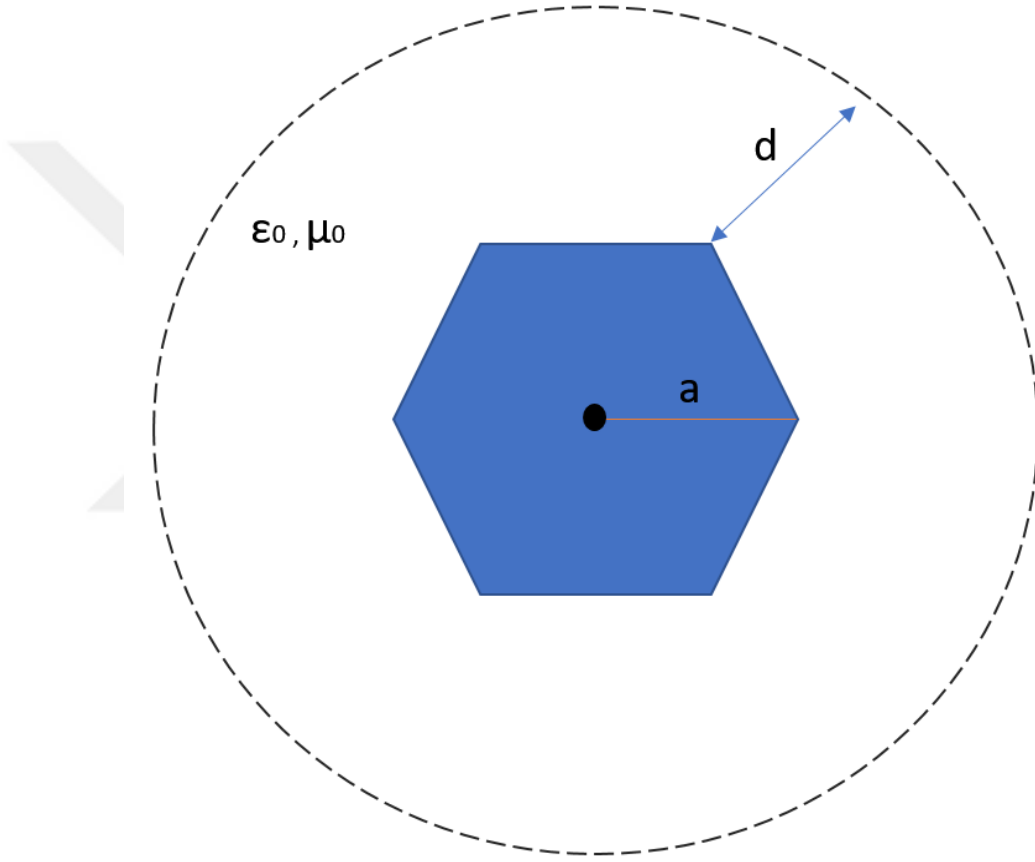
6. NÜMERİK SONUÇLAR

Daha önce 4. bölümde uygun prosedürler takip edilerek oluşturulan T - Matris Yöntemi bu çalışmanın kapsamı dahilinde olan genişletilmiş sınır koşulları yöntemi ile beraber sıfır alan olarak nitelendirilen integral gösterimlerin Green fonksiyonları yardımıyla seri açılımları ile ifade edilen silindirik harmoniklerin çözümüne dayandığı bilinmektedir. Bu kapsamda söz konusu olan sıfır alan (null field) integralleri farklı nümerik çözüm metotları ile oluşturulan integral denklemlerin incelenmesi sonucu oluşturulan matrislerin kötü koşullu olarak ifade edilen ve çözüm olarak hataların daha sık olduğu birinci türden lineer cebrik denklem sistemi olduğu sonucuna varılır. Birinci türden lineer cebrik denklem sisteminde kesme sayısı artıkça nümerik açıdan daha güvenilir bir sonuç almayı beklerken hata aldığımızı ve kesme sayısının (truncation number) artmasıyla beraber matrisin tersinin alınmasına duyarlılığının arttığı yani koşullanma sayısının (condition number) grafiklerde dengesiz ve kararlı olmadığı şeklinde ifade edilir. Böylelikle de hatalardan dolayı beklenen çözüm bulunamaz. 5. bölümde bahsedilen uygun regülerleştirme adımları takip edilerek oluşturulan regülerleştirilmiş T matrisi sayesinde sistem kötü koşullu olduğu bilenen birinci türden lineer cebrik denklem sisteminden iyi koşullu olduğu sonucuna varılan ikinci türden lineer cebrik denklem sistemine dönüştürülür. Regülerleştirilerek oluşturulan iyi koşullu ikinci türden lineer cebrik denklemi sayesinde kesme sayısı arttıkça koşullanma sayısının istenen düzeyde korunduğu, matrisin tersinin alınmasına duyarlılığının korunduğu ve nümerik çözümlerin gerçek çözümlerden uzaklaşmadan istenilen gibi olduğu anlaşılr.

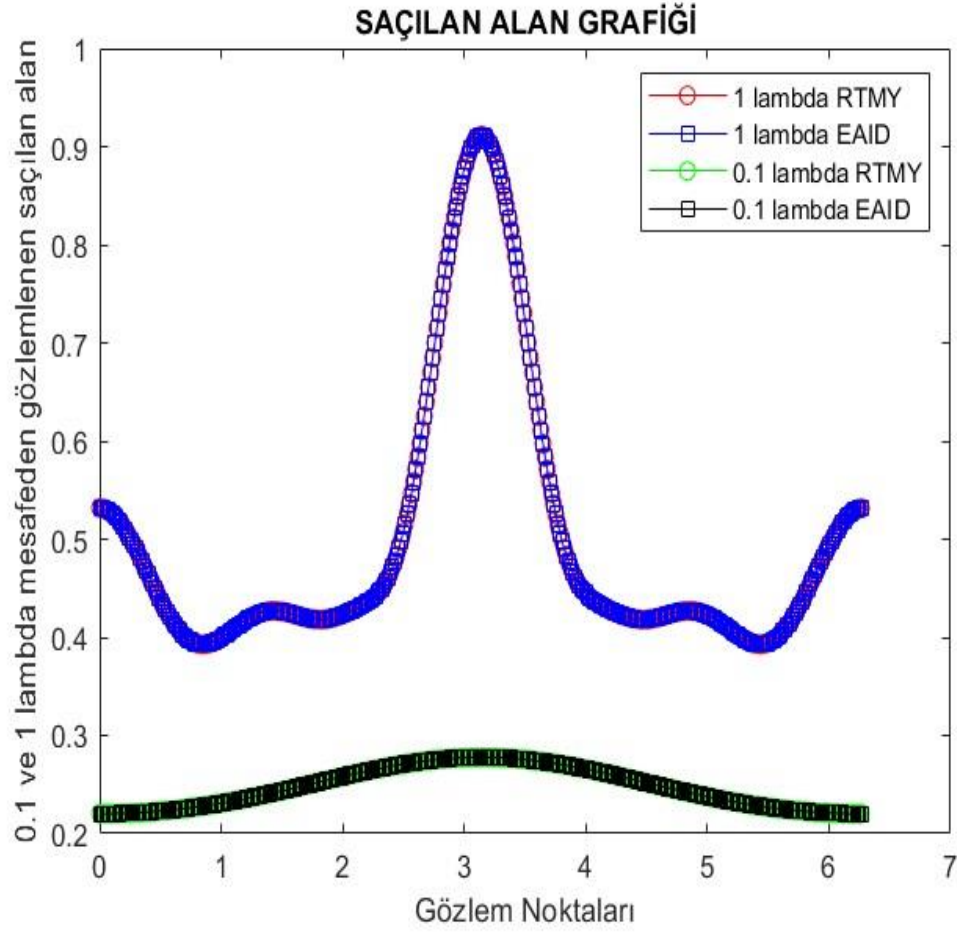
Çalışmanın bu kısmında klasik T matrisi ve regülerleştirilmiş T matrisi yönteminin [27]'de olduğu gibi modifiye süperformül ile elde edilen farklı geometrik keyfi kesitlere sahip cisimlerden saçılma problemi için uygulanmasıyla elde edilen matris denklem sistemlerinin koşullanma sayılarının ve bu matrislerin ranklarının karşılaştırılacak olup, ayrıca saçılan alanlara dair çözümlerin yapılan regülerleştirme işlemiyle ne kadar iyileştiğine dair sonuçlar incelenecektir.

6.1. Tek Saıcı Durum İçin Örnekler

Şekil 6.1’de geometrik yapısı gözlem noktası her yerde $d = \lambda_0$ olacak şekilde belirlenen $2a = 0.1\lambda_0/1\lambda_0$ olan mükemmel iletken altıgen verilmiş olup Şekil 6.2’de bu yapıdaki şekil için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen uniform birim genlikte 200 THz olarak belirlenmiş olan z düzlem dalga, elektrik alanın z bileşeninin gözlem noktalarından değerleri elektrik alan integral denklemlerinin çözümü ve regülerleştirilmiş T matrisi yöntemiyle elde edilmiştir.

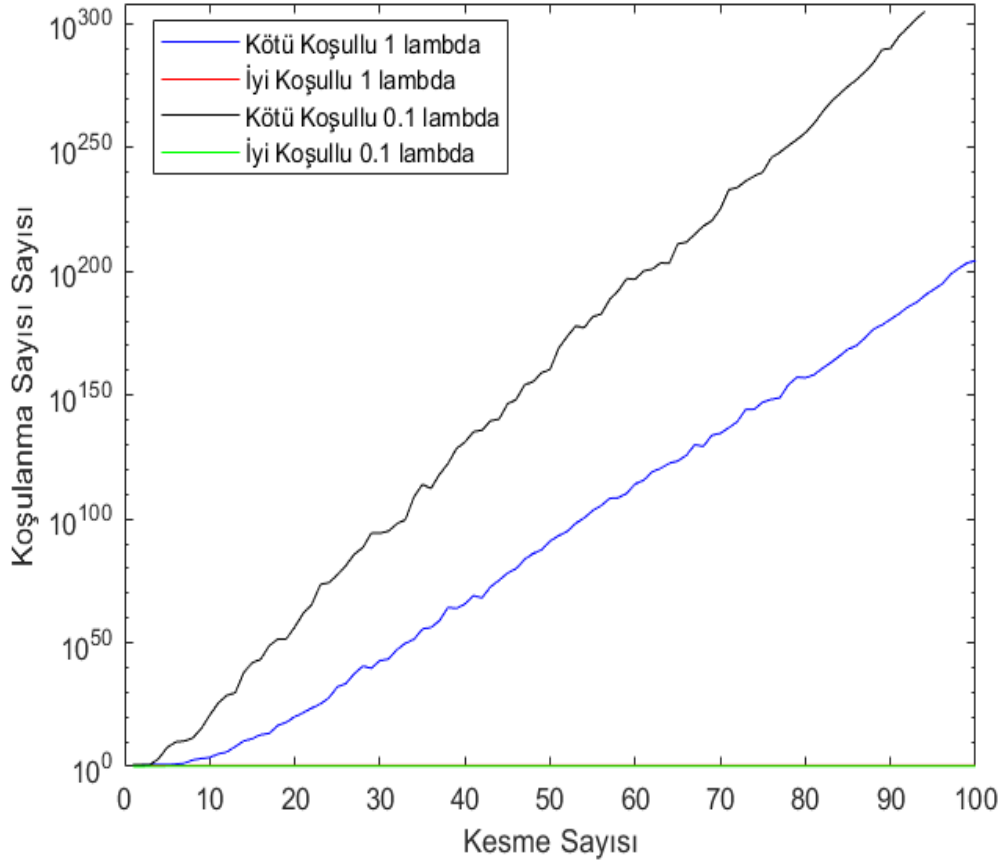


Şekil 6.1: Mükemmel iletken tek altıgenin geometrik yapısı.



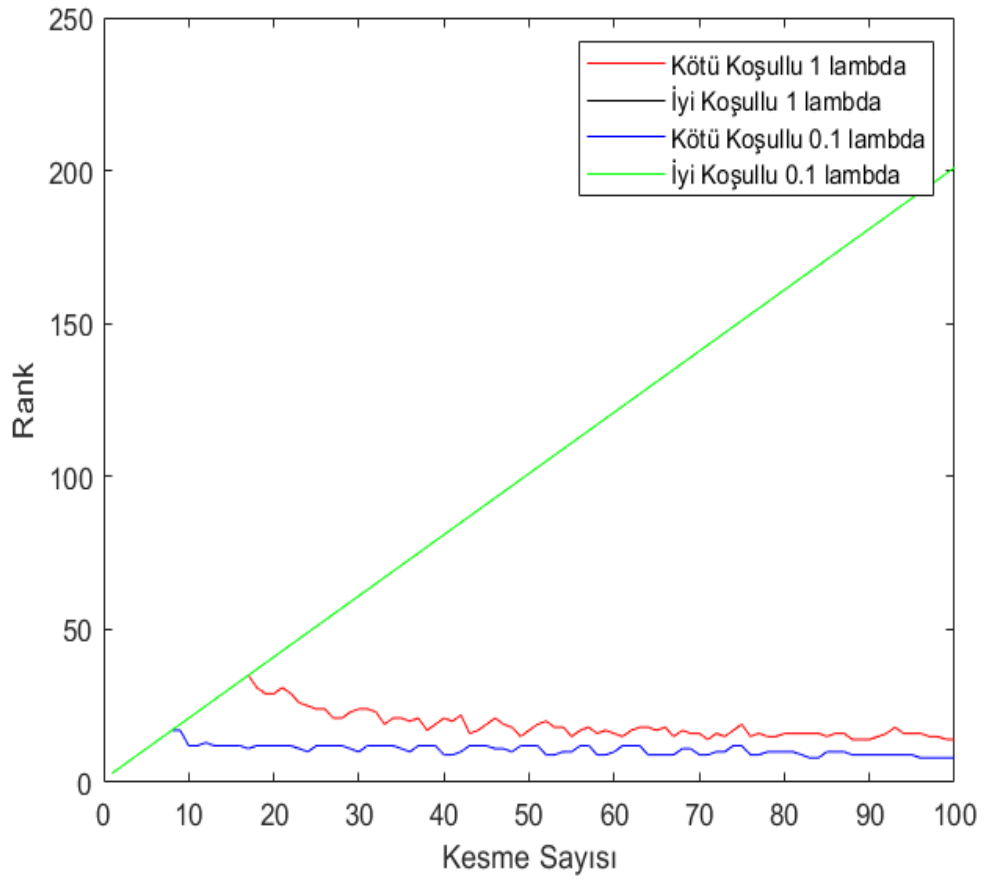
Şekil 6.2: Tek saçıcılu mükemmel iletken altıgen için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.

Şekil 6.2'den hareketle, Regülerleştirilmiş T Matrisi Yöntemiyle (RTMY) elde edilen çözümlerin Elektrik Alan İntegral Denklemlerinin (EAİD) saçıcı sınırında çözümüyle elde edilenlerle tutarlı olduğu ve bu çözümlerin birbirini doğrular nitelikte olduğu sonucuna varılır.



Şekil 6.3: Tek saçıcılı mükemmel iletken altıgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.

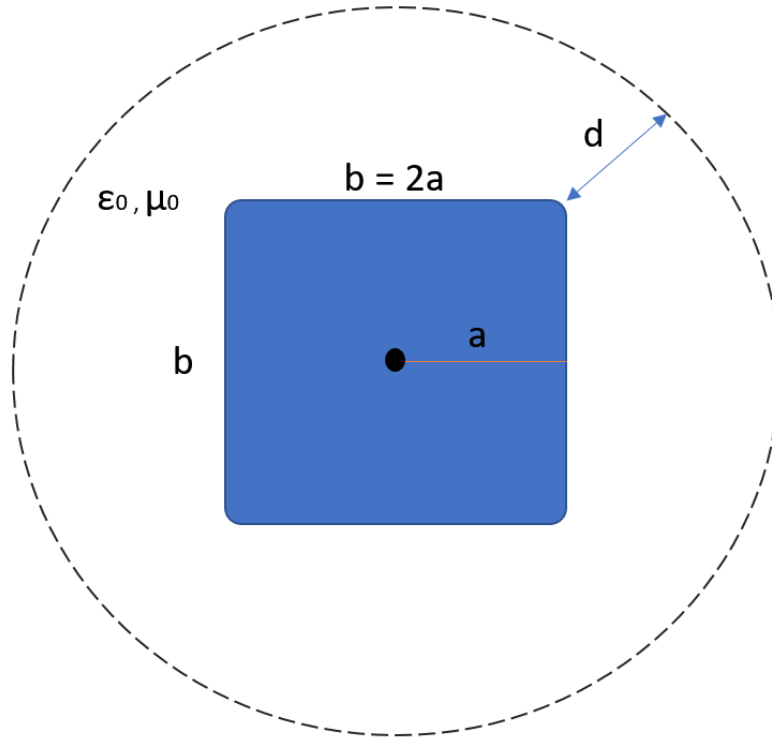
Tek saçıcılı mükemmel iletken altıgen koşullanma sayısını yorumlayacak olursak Şekil 6.3'te görüldüğü gibi kötü koşullu birinci türden lineer cebrik denklem sisteminde kesme sayısı artıkça koşullanma sayısı logaritmik artmakta olup, bu artış sistemi hataya duyarlı hale getirir ve sistemin nümerik olarak kararlılığını tehlikeye atar. Uygun regülerleştirme yapılarak elde edilen iyi koşullu ikinci türden lineer cebrik denklem sistemi sayesinde koşullanma sayısının tekdüze ve sınırlı olacak biçimde düzenlendiği gözlemlenmektedir.



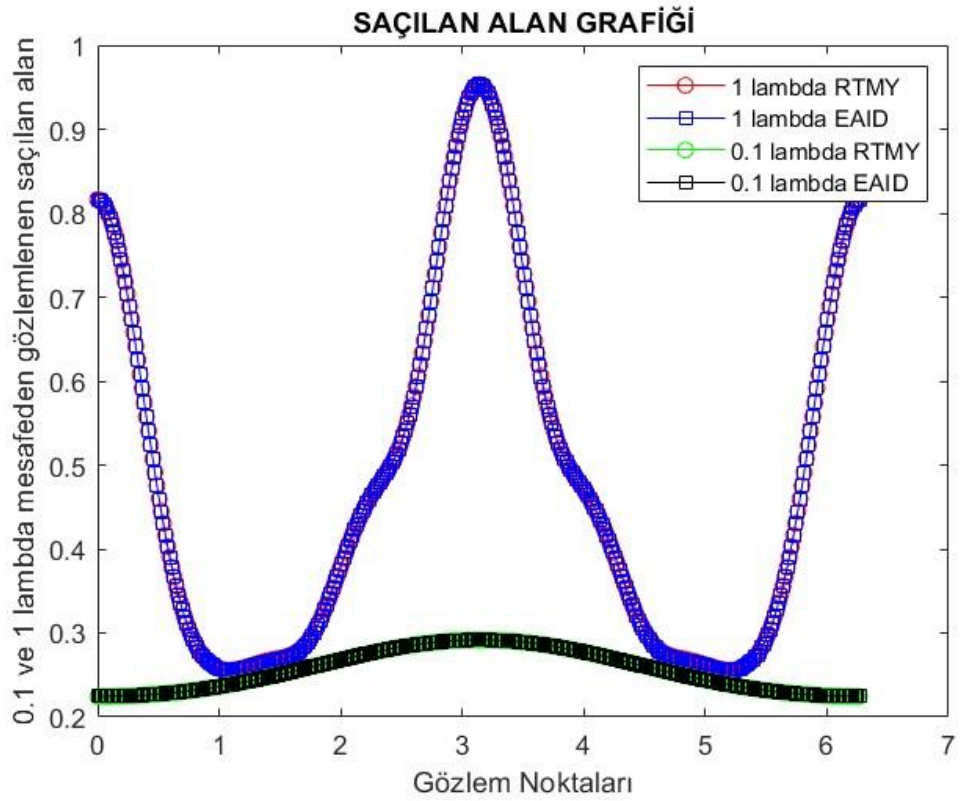
Şekil 6.4: Tek saçıcılu mükemmel iletken altıgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rankı.

Yapılan matris regülerleştirilmesiyle beraber matrisin rankının düşmemesi yani denklemlerin lineer bağımsız oluşu garanti altına alınmak istenmiştir ve bu durumu Şekil 6.4'e bakarak net bir şekilde gözlemlendiği ayrıca regülerleştirme işleminin istenilen düzeyde korunduğu gözlemlenmiştir.

Önceki örnekte de olduğu gibi sonsuz düzgün ve konveks (dış bükey) bir başka kesit olarak Şekil 6.5'teki kareyi ele alalım. Şekil 6.4'de geometrik yapısı gözlem noktası her yerde $d = \lambda_0$ olacak şekilde belirlenen $b = 0.1\lambda_0/1\lambda_0$ olan mükemmel iletken kare mevcuttur.

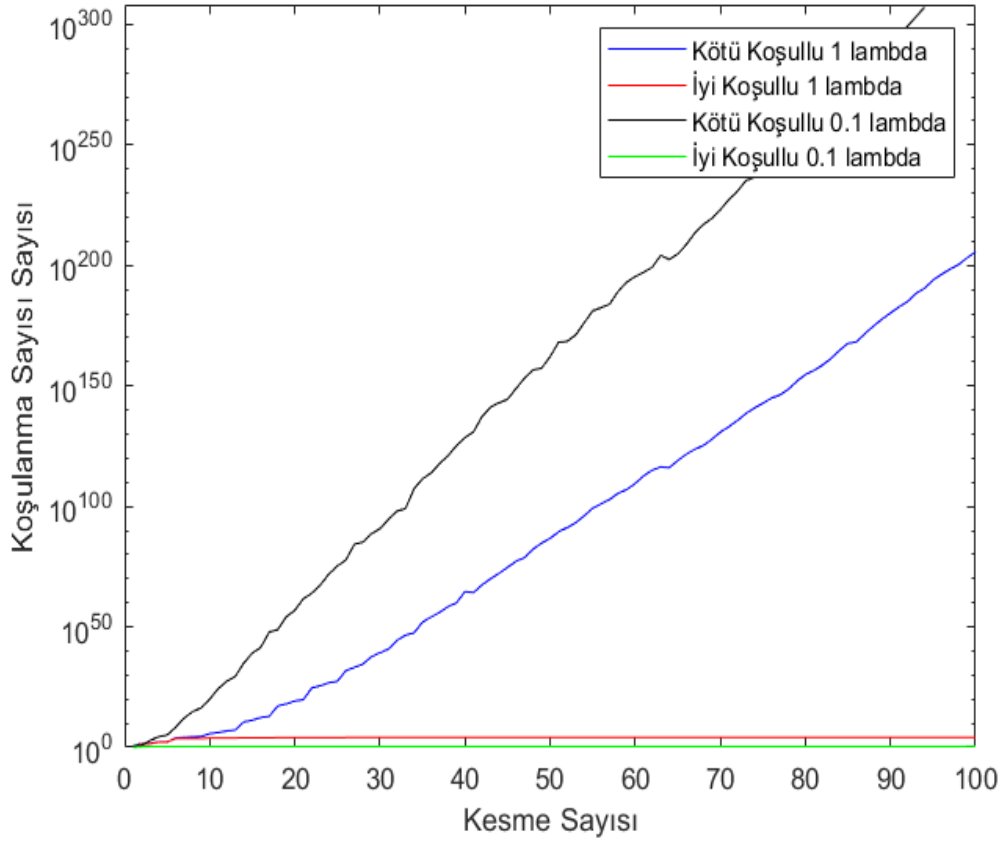


Şekil 6.5: Mükemmel iletken tek karenin geometrik yapısı.

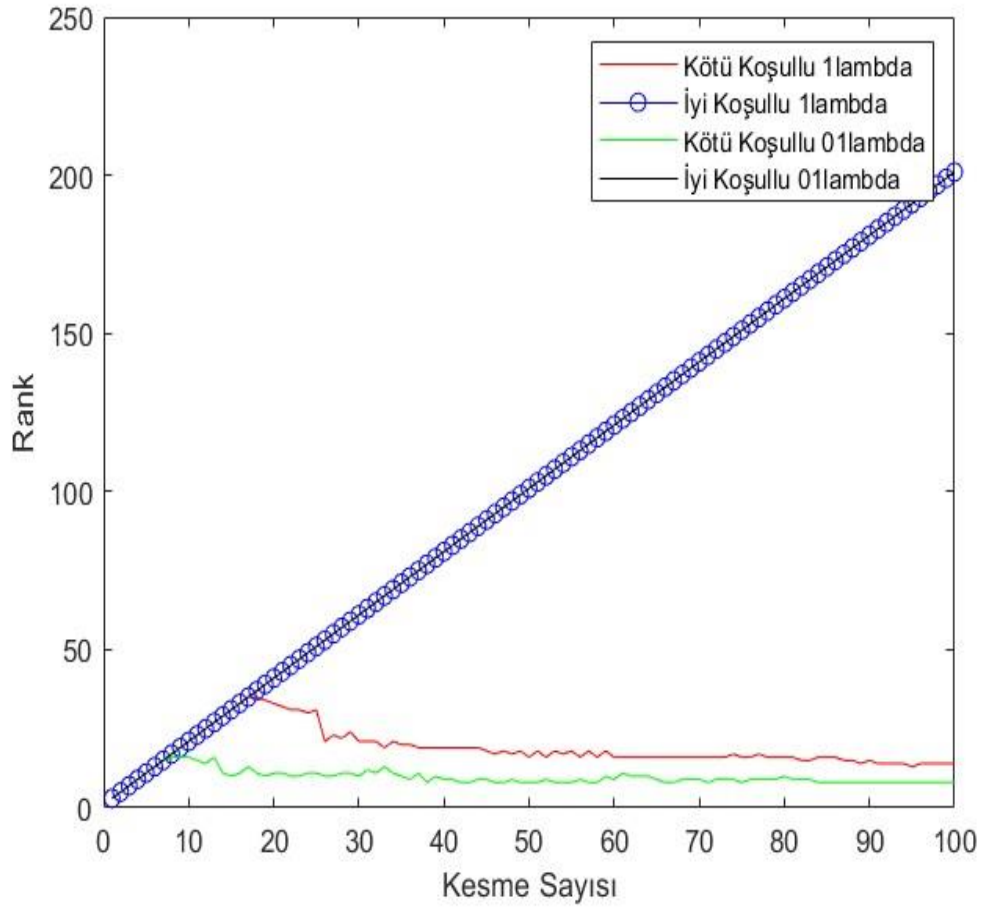


Şekil 6.6: Tek saçıcı mükemmel iletken kare için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.

Şekil 6.6’da mükemmel iletken kare için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden uniform birim genlikte frekansı 200 THz olarak belirlenmiş olan z düzlem dalga, elektrik alanın z bileşeninin gözlem noktalarından değerleri elektrik alan integral denklemlerinin çözümü ve regülerleştirilmiş T matrisi yöntemiyle elde edilmiştir. Bu grafiğe bakılarak çözümün doğru ve kararlı olduğu bir önceki örnekteki gibi üst üste gelmiş olmasından anlaşılmış olup RTMY ile elde edilen çözümlerin EAİD’nin benzer biçimde saçıcı sınırında çözümünü elde edilenlerle tutarlı olduğu ve bu çözümlerin birbirini doğrular nitelikte olduğu sonucuna yeniden varılır.



Şekil 6.7: Tek saçıcı mükemmel iletken karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.



Şekil 6.8: Tek saçıcılı mükemmel iletken karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rankı.

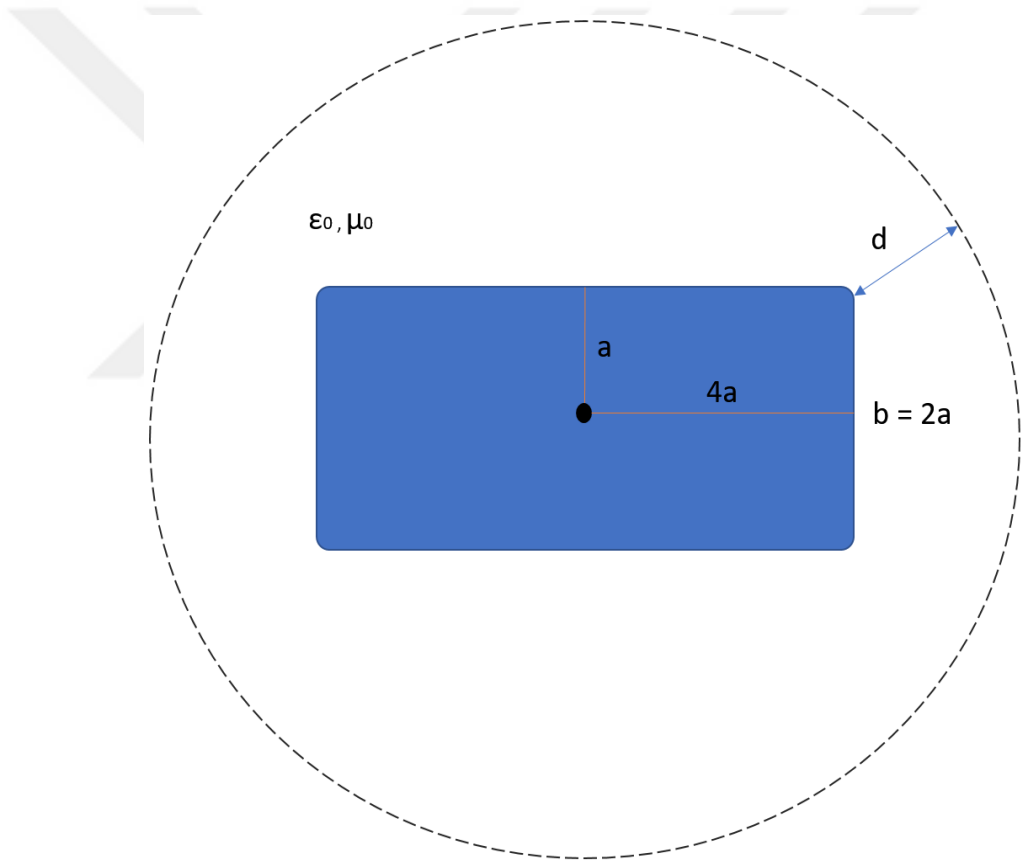
Şekil 6.7 ve Şekil 6.8'e bakıldığında kötü koşullu sistemin regülerleştirme işlemi ile iyi koşullu hale geldiği görülmektedir. Buna benzer bir sonuç Şekil 6.3 ve Şekil 6.4 ile sunulmuştu. Bu sebeple, regülerleştirmenin sisteme etkisi bakımından Şekil 6.3 ve Şekil 6.4'te gözlemlenen ve yorumlanan fenomen bu durumda da geçerliliğini sürdürmektedir.

5. Kısımda bahsedildiği gibi önceki çalışmalar [14], [12]'de olduğu uygun sol ve sağ regülerleştirme operatörleriyle sağlanmış olup sistemin nümerik olarak daha kararlı yapıda olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca kesme sayısı olarak ifade edilen M arttıkça elde edilen dönüşüm matrislerinin doğru bir biçimde hesaplanmasını ve çözümleri etkilememesini sağladığı bilgisine ulaşılır. Tüm bunların yanında iyi koşullu ikinci türden lineer cebrik denklem sistemini çözerken, tüm kesme için daha az iterasyonda istenen hata toleransına ulaşıldığını görüyoruz. Ancak, kötü koşullu olduğu bilinen

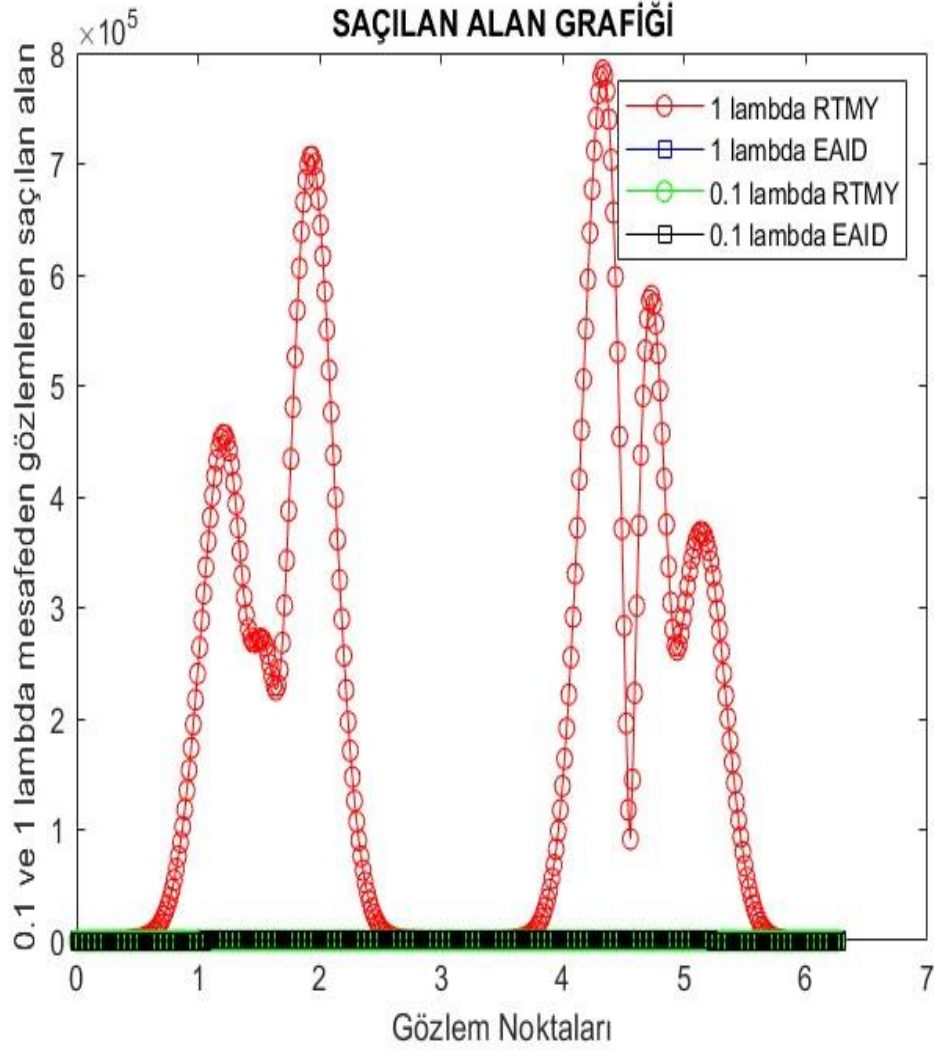
birinci türden lineer cebrik denklem sistemi için M kesme sayısı fazla olduğunda, istenen hata toleransı için koşullanma sayısının arttığını gözlemliyoruz.

Şeklin geometrik yapısını biraz değiştirdiğimizde yani şekli biraz uzatıp ya da şekli deforme ettiğimizde oluşan çözümlerde istenilen durumlar benzerlik gösterir. Ancak şekilde fazla oyuk olduğu durumlarda sistemin regülerleştirilmesinin doğru yapıldığı belli bir düzeyde nümerik açıdan sonuçların doğruluğunu görmemiz mümkündür. Şimdi bu durumları gözlemlemek için mükemmel iletken uzun dörtgen ve deforme kareyi inceleyecek olursak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Şekil 6.9’da geometrik yapısı gözlem noktası her yerde $d = \lambda_0$ olacak şekilde belirlenen $a = 0.1\lambda_0/1\lambda_0$ olan mükemmel iletken uzun dörtgeni vardır.

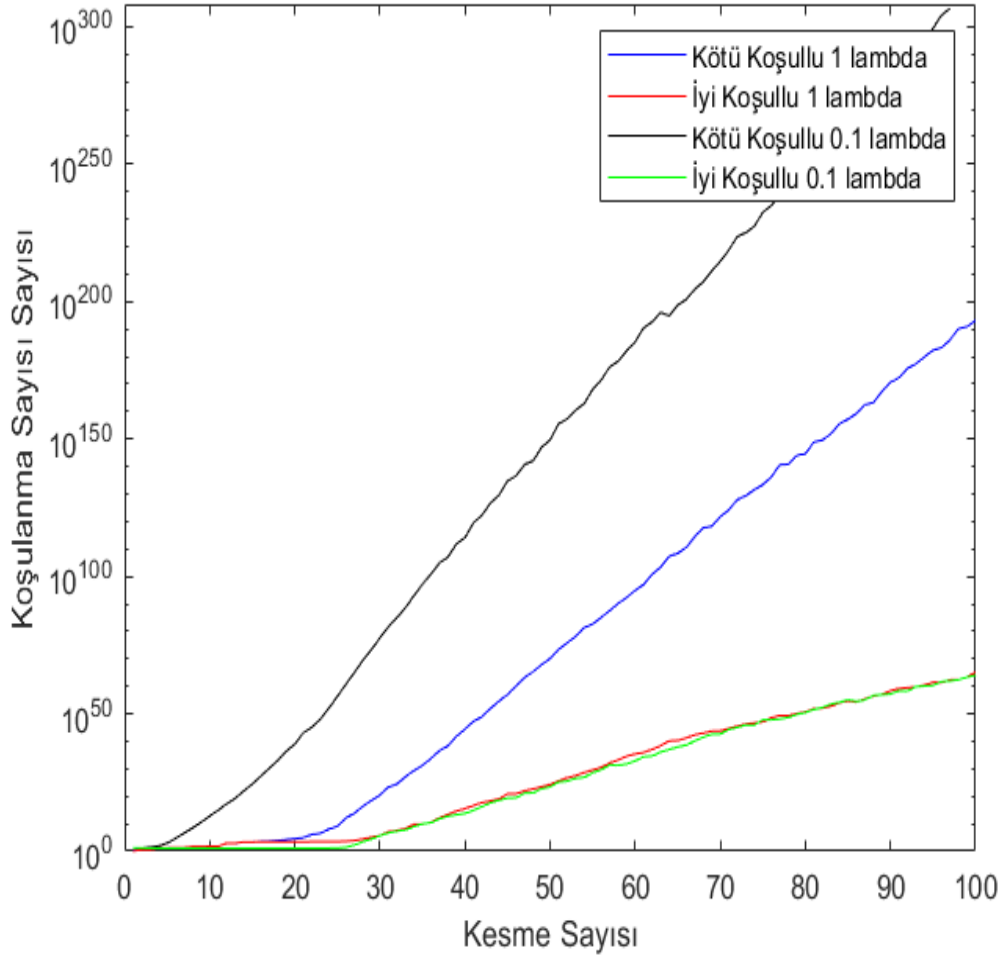


Şekil 6.9: Mükemmel iletken tek uzun dörtgenin geometrik yapısı.



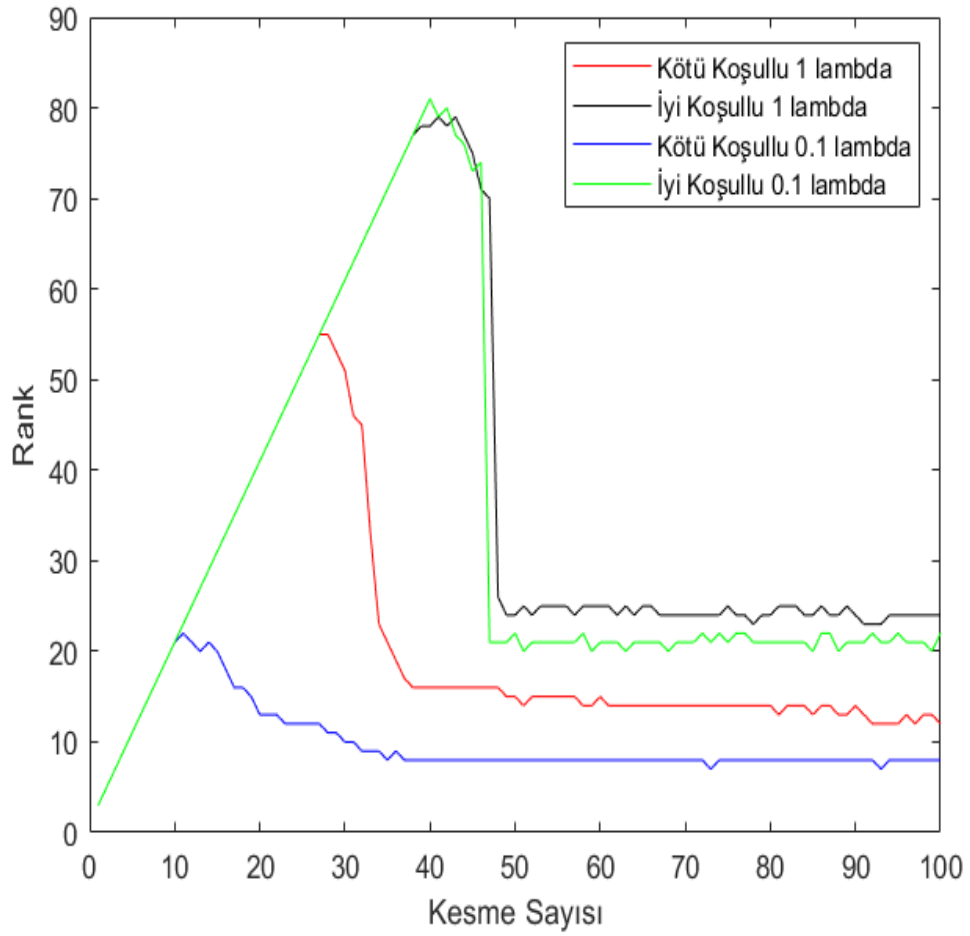
Şekil 6.10: Tek saçıcı mükemmel iletken uzun dörtgen için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.

Şekil 6.10’da bu yapıdaki şekil için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen uniform birim genlikte 200 THz olarak belirlenmiş olan z düzlem dalga, elektrik alanın z bileşeninin gözlem noktalarından değerleri elektrik alan integral denklemlerinin çözümü ve regülerleştirilmiş T matrisi yöntemiyle elde edilmiştir. Benzer yorumları yapacak olursak Şekil 6.10’da gözlemlenen noktalara ilişkin çözümün doğru ve kararlı olduğu bir önceki örnekteki gibi üst üste gelmiş olmasından anlaşılmış olup RTMY ile elde edilen çözümlerin EAİD’nin benzer biçimde saçıcı sınırında çözümüyle elde edilenlerle tutarlı olduğu ve bu çözümlerin birbirini doğrular nitelikte olduğu sonucuna yeniden varılır.



Şekil 6.11: Tek saçıcılu mükemmel iletken uzun dörtgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.

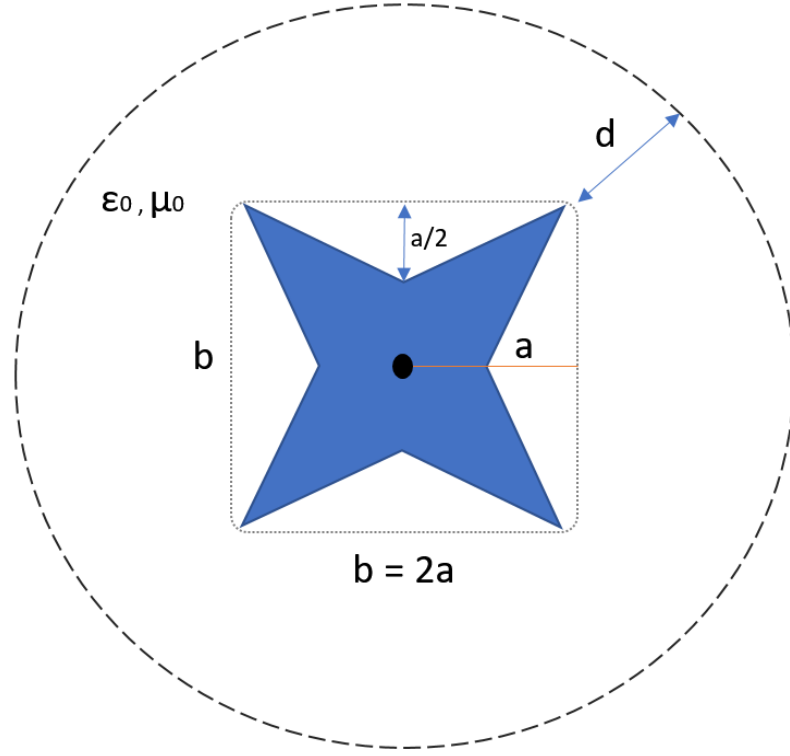
Tek saçıcılu mükemmel iletken uzun dörtgen biçimindeki saçıcının koşullanma sayısını yorumlayacak olursak Şekil 6.11’de görüldüğü gibi kötü koşullu birinci türden lineer cebrik denklem sisteminde kesme sayısı artıkça koşullanma sayısı logaritmik artmakta olup, bu artış sistemi hataya duyarlı hale getirir ve sistemin nümerik olarak kararlılığını tehlikeye atar. Uygun düzenleme yapılarak elde edilen iyi koşullu ikinci türden lineer cebrik denklem sistemi sayesinde koşullanma sayısının tekdüze ve sınırlı olacak biçimde iyileştirildiği gözlemlenmektedir.



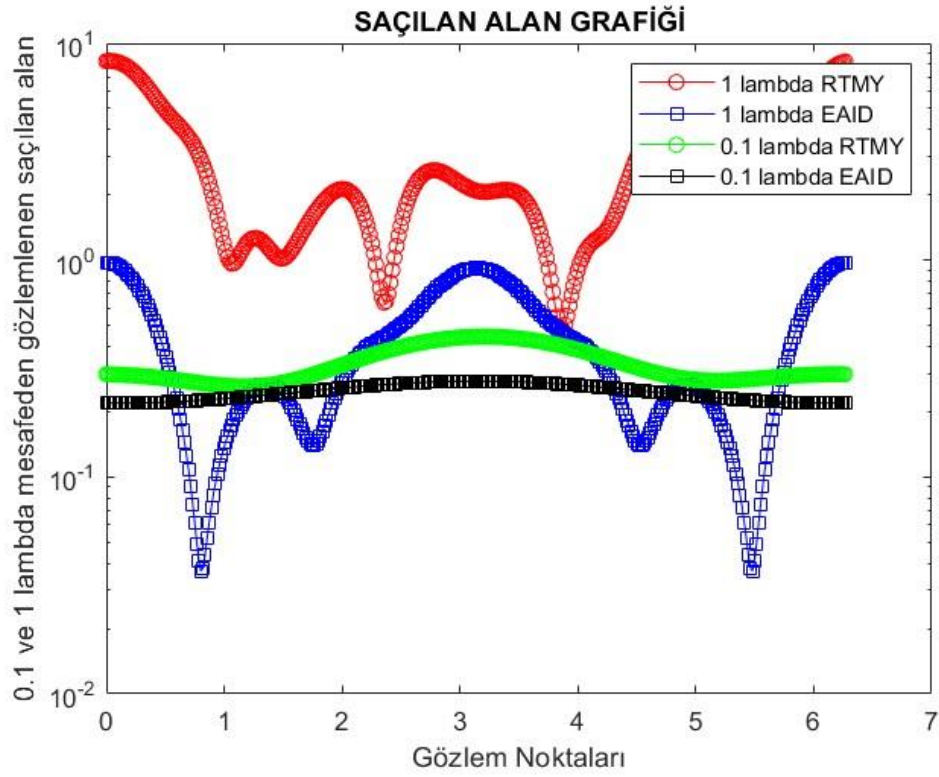
Şekil 6.12: Tek saçıcılı mükemmel iletken uzun dörtgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rankı.

Şekil 6.12'ye bakıldığında yapılan regülerleştirme ile sistemin kararlılığının sağlandığı yani regülerleştir operasyonu ile beraber matrisin rankının düşmemesi garanti altına alınmak istenmiş olup şeklin geometrik yapısından dolayı belli bir kesme sayısından sonra rankın değiştiği fakat T matris regülerleştirmesinin çözüm açısından tutarlı olduğunu ifade etmek mümkündür.

Şeklin geometrik yapısını biraz daha değiştirip, deforme edip, yani şekli biraz fazla oyuk yaparak elde edilmiş mükemmel iletken deforme kare içinde inceleyecek olursak Şekil 6.13'te geometrik yapısı gözlem noktası her yerde $d = \lambda_0$ olacak şekilde belirlenen $b = 0.1\lambda_0/1\lambda_0$ olan mükemmel iletken deforme karenin şekli vardır.

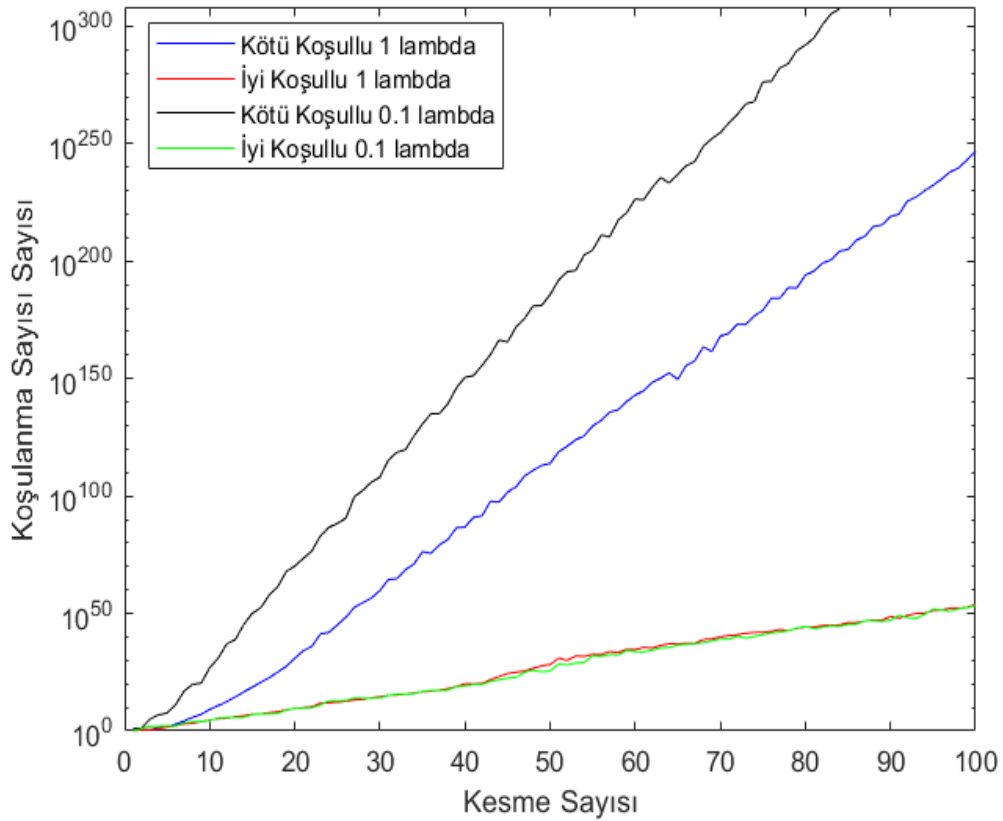


Şekil 6.13: Mükemmel iletken tek deforme karenin geometrik yapısı.



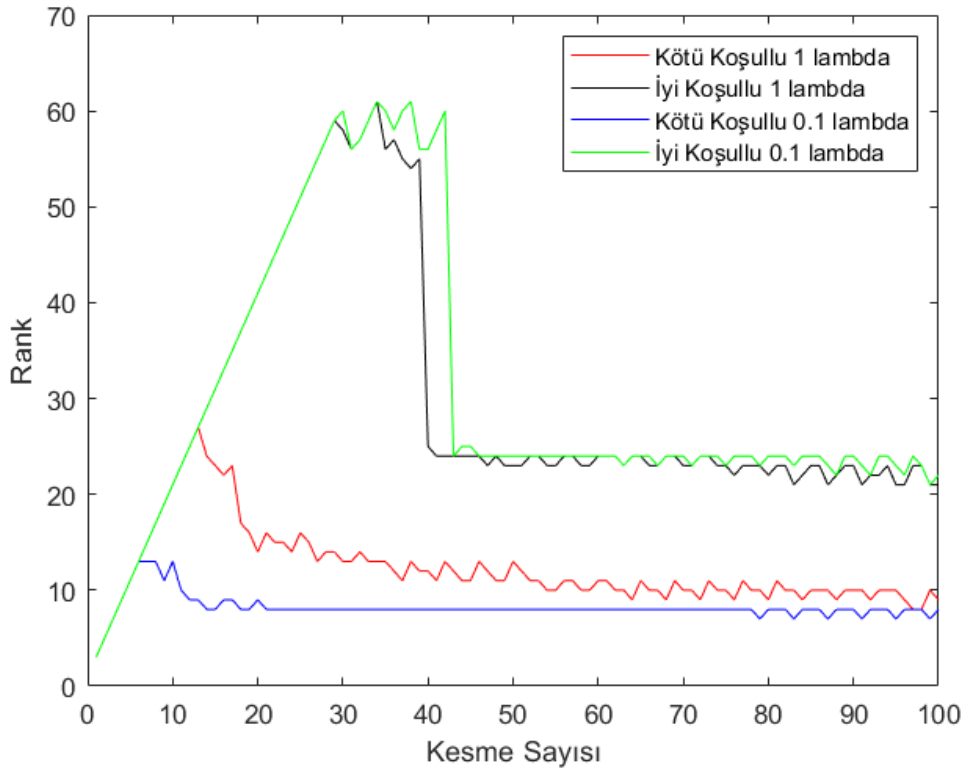
Şekil 6.14: Tek saçıcılı mükemmel iletken deforme kare için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.

Şekil 6.14'te deforme kare için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen uniform birim genlikte 200 THz olarak belirlenmiş olan z düzlem dalga, elektrik alanın z bileşeninin gözlem noktalarından değerleri elektrik alan integral denklemlerinin çözümü ve regülerleştirilmiş T matrisi yöntemiyle elde edilmiş olup aynı yorumları yapacak olursak RTMY ile elde edilen çözümlerin EAİD'nin benzer biçimde saçıcı sınırında çözümüyle elde edilenlerle tutarlı olduğu ve bu çözümlerin birbirini doğrular nitelikte olduğu söylenir.



Şekil 6.15: Tek saçıcı mükemmel iletken deforme karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.

Şekil 6.15'te gözlemlenen noktalara ilişkin olan koşullanma sayısının grafiği mevcuttur. Şekil 6.15'e bakıldığında koşullanma sayısının düzenlenilmeye çalışıldığını görüyoruz ve yapılan regülerleştirme sayesinde kötü koşullu sistemin regülerlestirmesiyle iyi koşullu sisteme dönüştürüldüğü dolayısıyla koşullanma sayısının istenilen düzeyde korunduğu sonucuna varılmıştır.



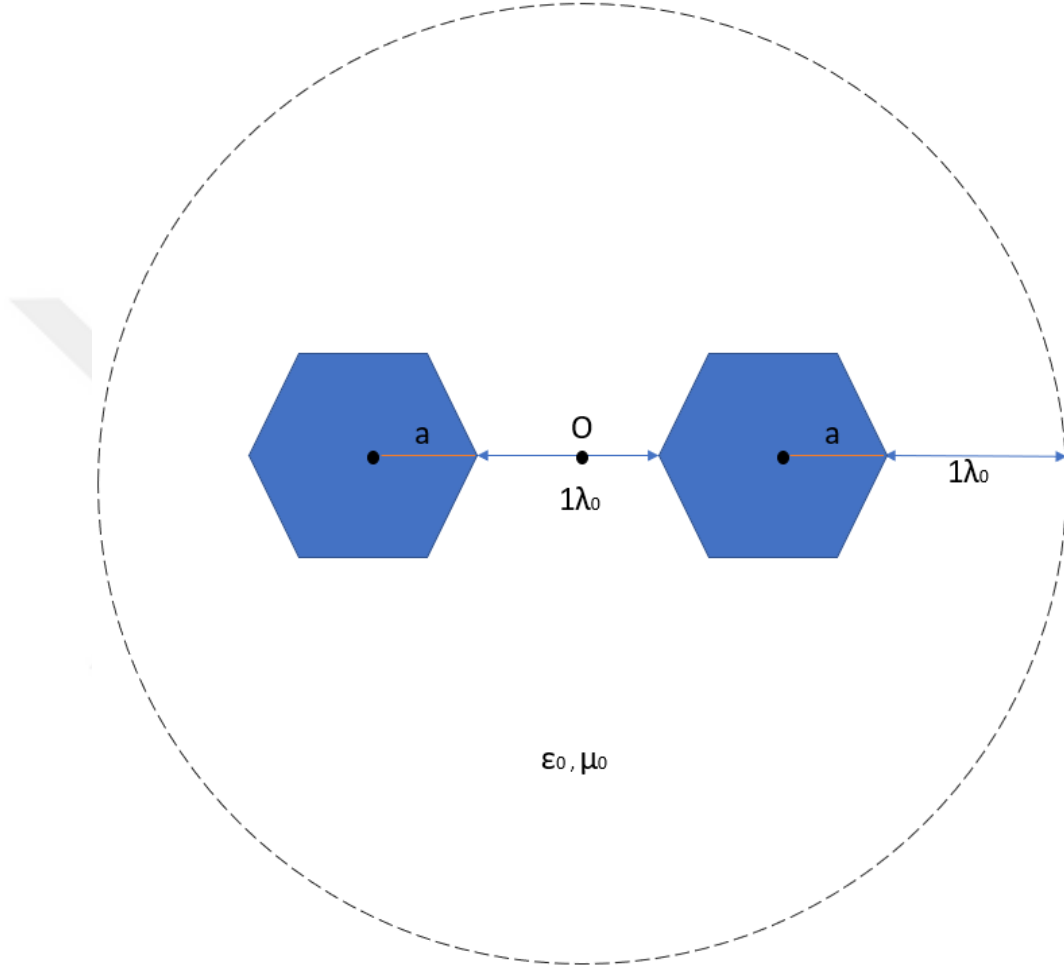
Şekil 6.16: Tek saçıcılı mükemmel iletken deforme karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rankı.

Şekil 6.16'da deforme kare için kötü ve iyi koşullu sistem için rank gözlenmektedir. Şekil 6.16'ya bakıldığında yapılan regülerleştirme ile sistemin kararlılığının sağlandığı matris regülerlestirmesiyle beraber matrisin rankının düşmemesi sağlanmak istenmiştir istenmiştir ancak şeklin geometrik yapısından dolayı belli bir kesme sayısından sonra rankın değiştiği ama çözümün önceki örneklerde olduğu gibi istenilen düzeyde olduğu sonucuna varmak mümkündür.

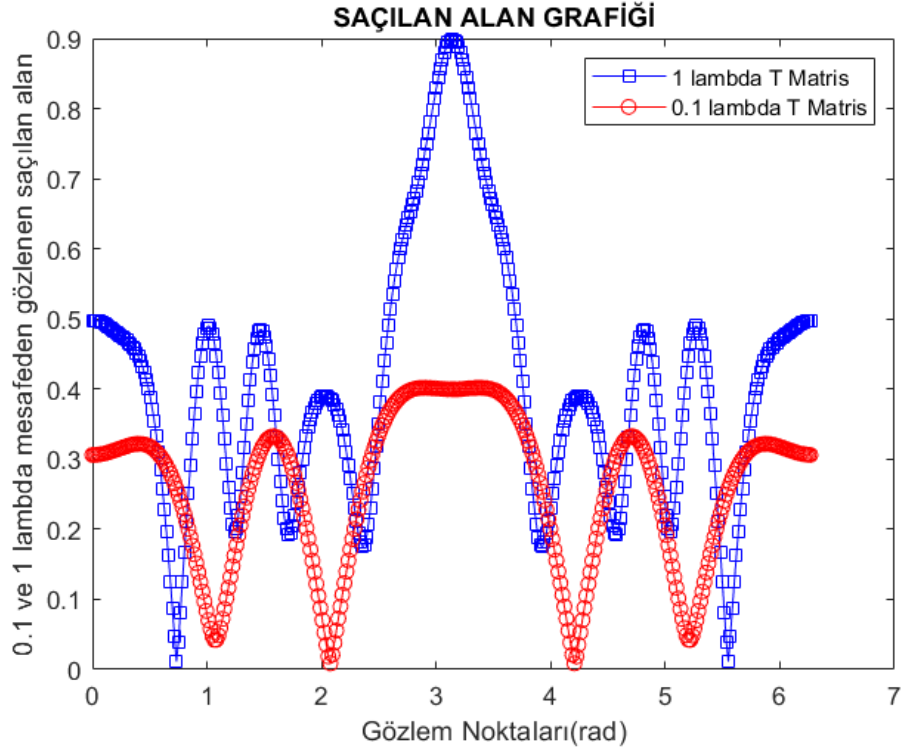
6.2. İkili Saçıcılı Durum İçin Örnekler

Nümerik sonuçlar açıklanmaya başlandığında ilk olarak mükemmel iletken tek saçıcılı durumlar için örnekler verilmişti. Şekil 6.1'den Şekil 6.16'ya kadar tek saçıcılar için yapılan T matris regülerlestirmesinin saçılan alan, koşullanma sayısı ve rank için tutarlı incelenmiş olup yorumları detaylı şekilde yapılmıştı.

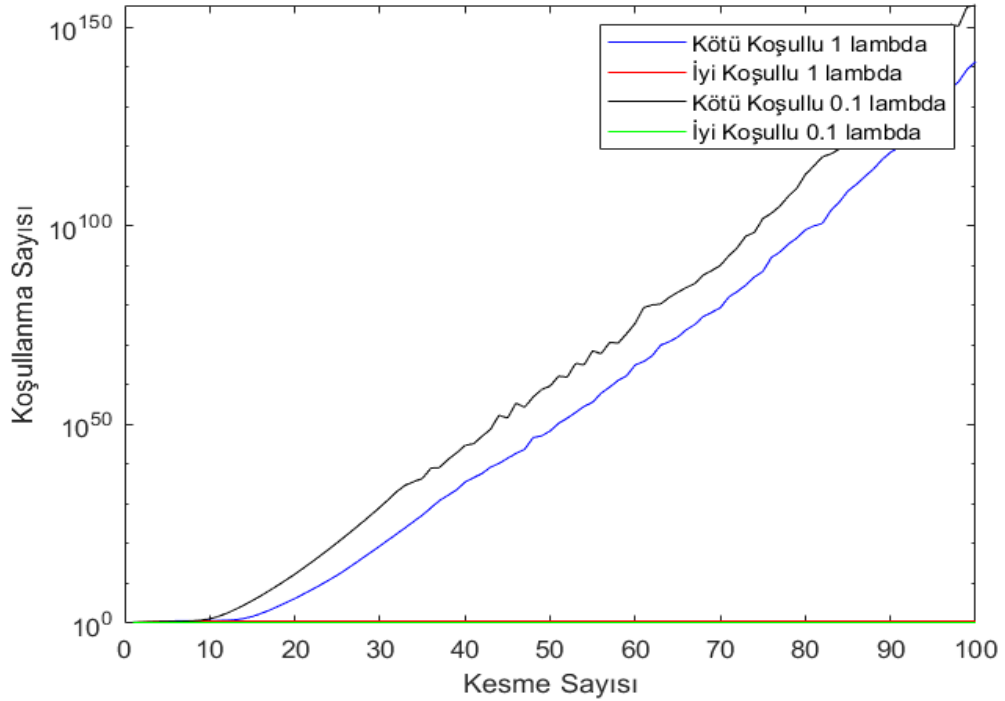
Teyitleri sağlamak amacıyla geometrik yapıları aşağıdaki gibi olan ikili mükemmel iletken altogen ve kare saçıcılar tercih edildi ve bu saçıcılar için nümerik açıdan kararlı olduklarını göstereceğiz. Tüm şekiller tek saçıcılı durumdaki geometrik özelliklerle benzer şekilde gözlem noktasından $1\lambda_0$ uzaklıkta ve birbirlerine olan uzaklıkları $1\lambda_0$ olacak şekilde dizayn edilerek oluşturuldu.



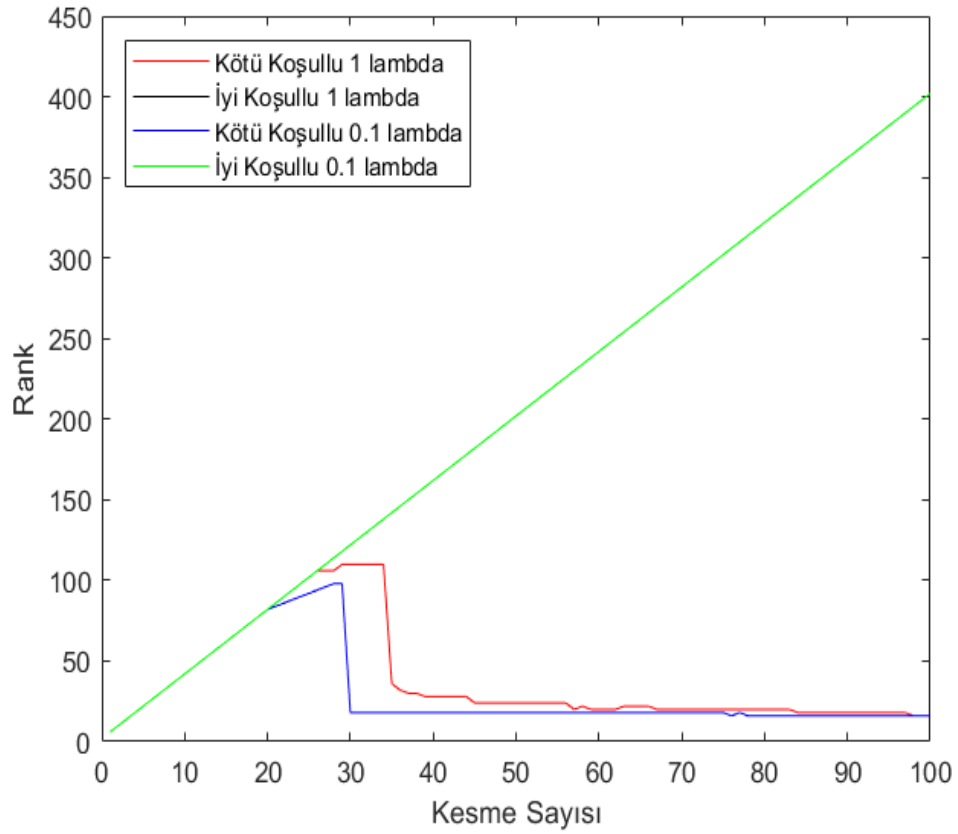
Şekil 6.17: Mükemmel iletken ikili altıgenin geometrik yapısı.



Şekil 6.18: İkili saçıcı mükemmel iletken altıgen için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.

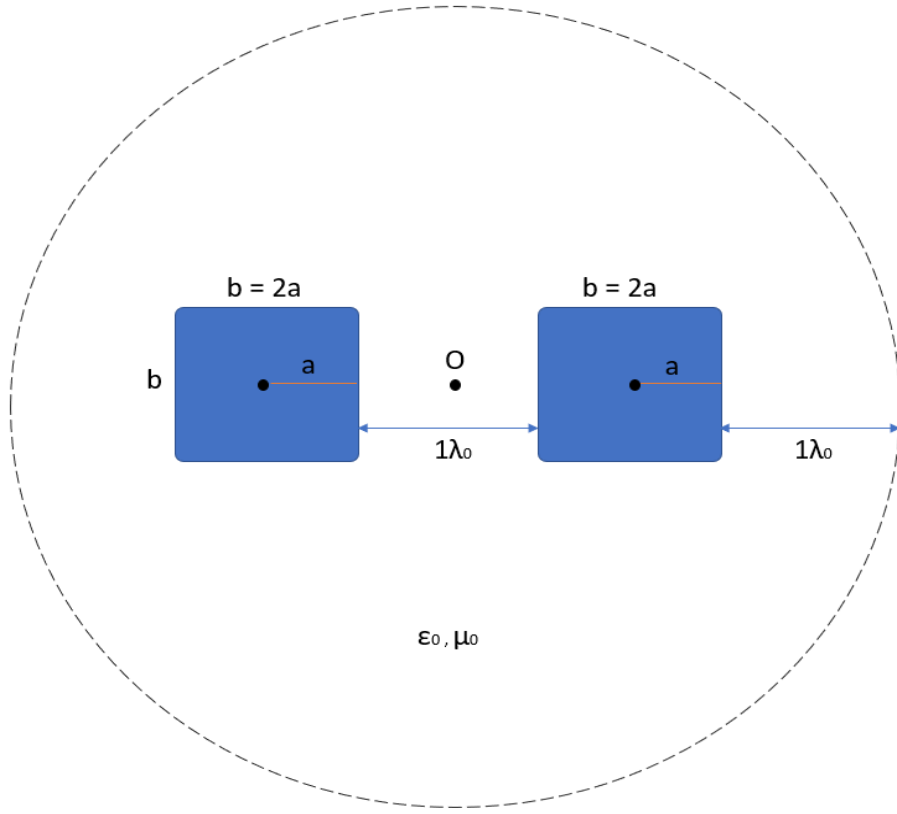


Şekil 6.19: İkili saçıcı mükemmel iletken altıgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.

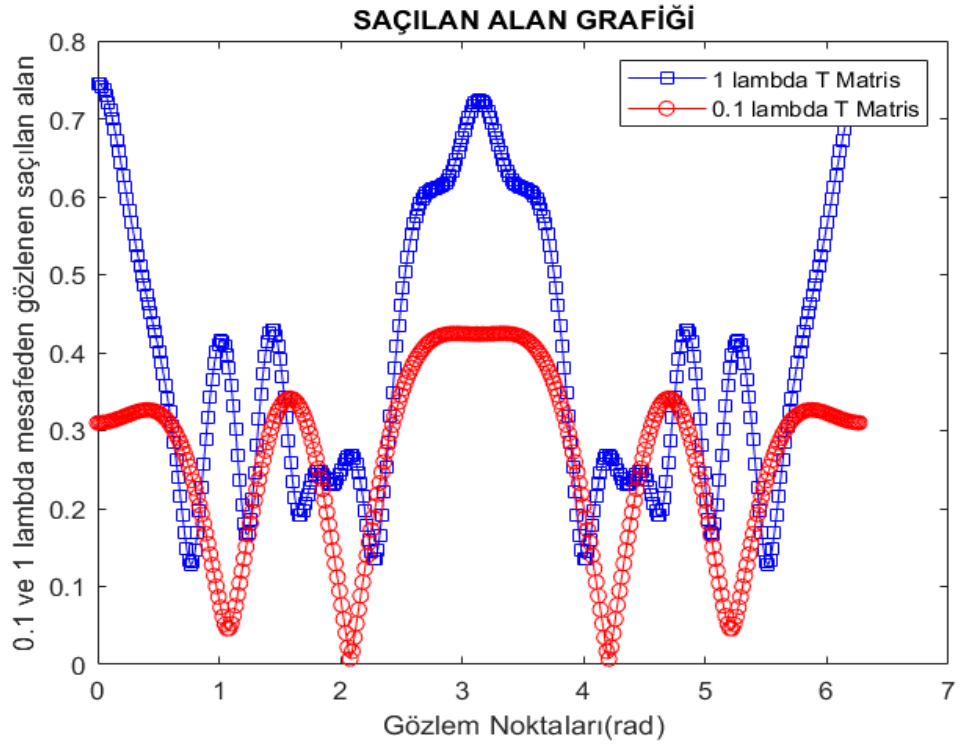


Şekil 6.20: İkili saçıcılu mükemmel iletken altıgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rankı.

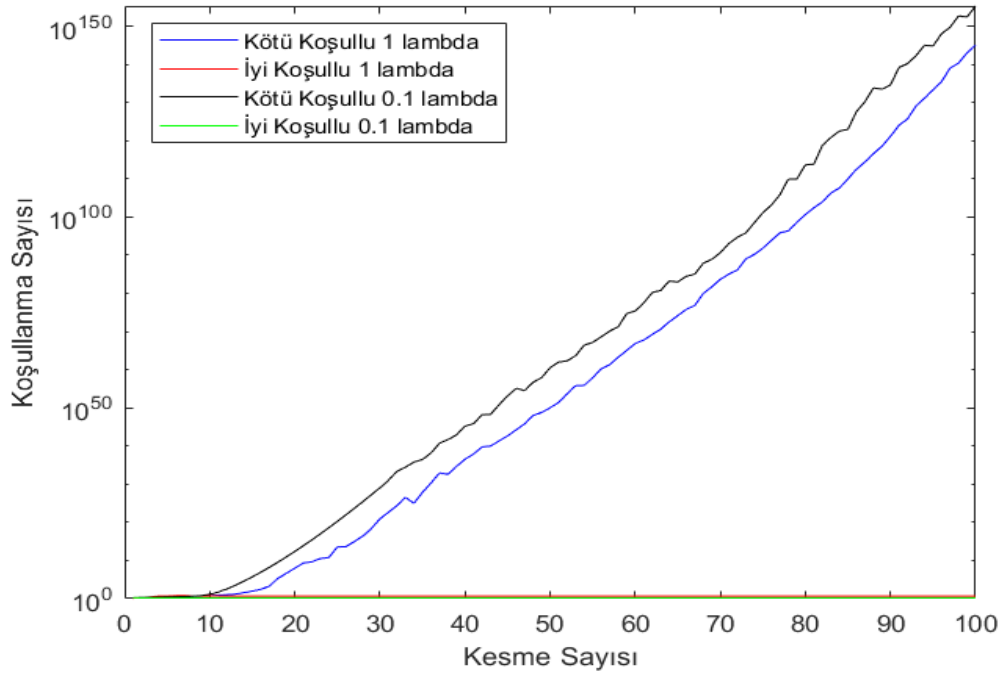
İlk olarak Şekil 6.17’de geometrik yapısı verilen mükemmel iletken ikili altıgen saçıcı için Şekil 6.18’de $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden uniform birim genlikte frekansı 200 THz olarak ayarlanan z düzlem dalga için saçılan alanın T matris yardımıyla çözümü mevcuttur. Bu grafiğe bakarak uygulanan çözümün tek saçıcılu durumlar için sağlandığının bir teyidi olduğu sonucuna varıyoruz. Şekil 6.19’da koşullanma sayısının iyileştirme sonucu düzenlendiğini ve Şekil 6.20’de matris sisteminin rankının regülerleştirme sonucunda sabit ve beklenen düzeyde tutulduğunu görüyoruz.



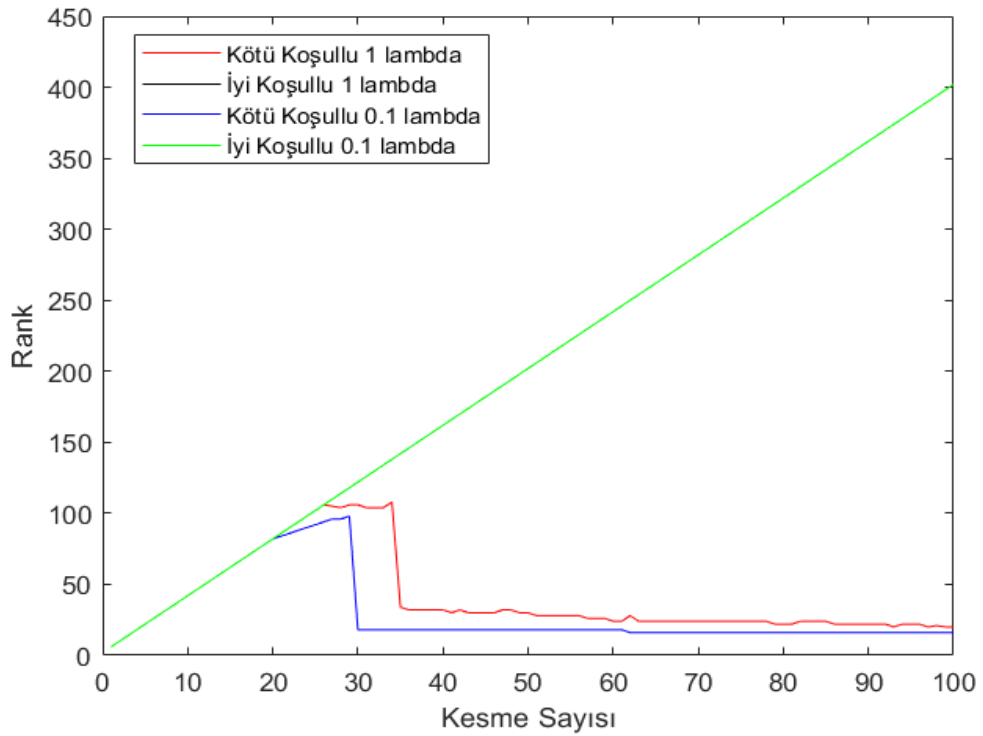
Şekil 6.21: Mükemmel iletken ikili karenin geometrik yapısı.



Şekil 6.22: İkili saçıcı mükemmel iletken kare için $0.1\lambda_0$ ve $1\lambda_0$ mesafeden gözlenen saçılan alan.



Şekil 6.23: İkili saçıcılu mükemmel iletken karenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için koşullanma sayısı.



Şekil 6.24: İkili saçıcılu mükemmel iletken altıgenin kötü (regülerleştirilmemiş) ve iyi koşullu (regülerleştirilmiş) sistem için rankı.

Benzer yorumları mükemmel iletken kare içinde yapmak mümkündür. Dolayısıyla Şekil 6.21’de yapısal olarak verilen ikili kare için Şekil 6.22, Şekil 6.23 ve Şekil 6.24’e bakarak uygulanan çözüm yolunun tutarlı olduğunu, yapılan regülerleştirme işleminin geçerli olduğu anlaşılmaktadır.

6.3. Sonuç ve Yorumlar

Bu çalışmada yapılan tüm gözlemler mükemmel iletken keyfi kesitli şekillerdeki dalga saçılma problemleri için 4. kısımda oluşturulan T matrisindeki tersi alınma işlemlerinin 5. kısımda daha kararlı hale getirilmesi için uygun regülerleştirme adımlarıyla daha kararlı bir yapıya getirilmesi amaçlanarak yapılmıştır. Modifiye süperformül ile elde edilen bu şekillerde tek saçıcı durumlar için gözlenmesi beklenen sonuçları kısım 6.1’de detaylarıyla beraber görmekteyiz. Kötü koşullu olan matris sisteminde tersinin alınmasındaki duyarlılıkların regülerleştirilerek oluşturulan iyi koşullu denklem sisteminde iyileştirilmiş olduğu gözlenmiştir. Bununla birlikte kötü koşullu olduğu bilinen birinci türden lineer cebrik denklem sistemi için M kesme sayısı belirli bir değerden fazla olduğu sırada istenen hata toleransı için koşullanma sayısının arttığını ve bunların yanında iyi koşullu ikinci türden lineer cebrik denklem sistemini çözerken, tüm kesme için daha az iterasyonda istenen hata toleransına ulaşıldığı sonucuna varılmıştır.

Kısım 6.2’de tek saçıcı durum için varılan sonuçların ikili saçıcılar içinde tutarlı olduğu anlaşılmış olup yapılan T matris regülerleştirilmesinin geçerli ve hata oranı düşük nümerik sonuçları verdiği anlaşılmıştır.

Sonuç olarak yapılan bu çalışmada farklı yapıdaki keyfi kesitli şekillerin vermiş olduğu sonuçlardan yola çıkarak yapısal olarak daireye benzeyen yani düzgün çok kenarlı geometrik yapılar için sistemin iyileştirildiği, gözlemlenmesi beklenen sonuçların T matrisin regülerleştirilmesi ile elde edildiği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Chew W C., (1999), “Waves and Fields in Inhomogenous Media”, Wiley-IEEE Press.
- [2] Ergül Ö., Gürel L., (2014), “The Multilevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) for Solving Large-Scale Computational Electromagnetics Problems”, Wiley-IEEE Press.
- [3] Waterman P. C., (1969), “New Formulation of Acoustic Scattering,” The Journal of the Acoustical Society of America, 45 (6), 1417–1429.
- [4] Petrov D., Synelnyk E., Shkuratov Y., Videen G., (2006), “The T-matrix technique for calculations of scattering properties of ensembles of randomly oriented particles with different size,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 102 (1), 85-110.
- [5] Waterman P. C., (1965), “Matrix formulation of electromagnetic scattering”, Proceedings of the IEEE, 53, 805-812.
- [6] Mishchenko M. I., Travis L. D., ve Mackowski D. W., (1996), “T-matrix computations of light scattering by nonspherical particles: A review”, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 55, 535-575.
- [7] Waterman P. C., (1971), “Symmetry, unitarity, and geometry in electromagnetic scattering,” Physical Review D, 3 (4), 825–839.
- [8] Mishchenko M. I., Videen G., Babenko V. A., Khlebtsov N. G., Wriedt T., (2004), “T-matrix theory of electromagnetic scattering by particles and its applications: A comprehensive reference database,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 88 (1-3), 357-406.
- [9] Mishchenko M. I., Zakharova N. T., Khlebtsov N. G., Videen G., Wriedt T., (2017), “Comprehensive thematic T-matrix reference database: A 2015–2017 update,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 202, 240-246.
- [10] Zhang Y. J., Li E. P., (2007), “Fast multipole accelerated scattering matrix method for multiple scattering of a large number of cylinders,” Progress in Electromagnetics Research, 72, 105-126.
- [11] Hatipoğlu M. E., Sever E., Dikmen F., Eriş Ö., ve Ergül Ö., (2021), “Fotonik Kristal ve Plazmonik Yapıların 3B Benzetimlerinin Hızlandırılması için Çubuk Dizilerinin İyi-Koşullu 2B Modelleri”, URSI-TÜRKİYE 2021 X. Bilimsel Kongresi, Gebze Teknik Üniversitesi, Kocaeli, Türkiye, 7-9 Eylül.
- [12] Hatipoğlu M. E., (2020), “İki Boyutlu Elektromanyetik Saçılma Problemleri İçin Özyinelemeli T-Matrisi Yöntemi Ve Regülerleştirilmesi” Yüksek Lisans Tezi, Gebze Teknik Üniversitesi.

- [13] A. Ishimaru A., (2017), “ Electromagnetic wave propagation, radiation, and scattering: from fundamentals to applications”. John Wiley & Sons.
- [14] Dikmen F., Sever, E., Vatansever S., Tuchkin Y. A., (2015), “Well-conditioned algorithm for scattering by a few eccentrically multilayered dielectric circular cylinders,” Radio Science, 50, (2), 99–110.
- [15] Geçer M. E., Hatipoğlu M. E., ve Dikmen F., (2021), “Mükemmel iletken keyfi kesitli silindirik cisimler için T matrisi yönteminin regülerleştirilmesi”, URSI-TR X. Bilimsel Kongresi, Kocaeli, Türkiye, 7-9 Eylül.
- [16] Doicu A., Wriedt T., Khebbache N., (2019), “An overview of the methods for deriving recurrence relations for T-matrix calculation,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 224, 289-302.
- [17] Sever E., Dikmen F., Tuchkin Y. A., ve Sabah C., (2018), “A numerically stable algorithm for scattering from several circular cylinders including metamaterials with different boundary conditions”, Optik, 168, 667-676.
- [18] Vico F., Ferrando M., Greengard L., ve Gimbutas Z., (2016), “The decoupled potential integral equation for time-harmonic electromagnetic scattering”, Communications on Pure and Applied Mathematics, 69, 771-812.
- [19] Stout B., Auger J.-C., ve Devilez A., (2008), “Recursive T matrix algorithm for resonant multiple scattering: applications to localized plasmon excitations”, JOSA A, 25, 2549-2557.
- [20] Abramowitz M., Stegun I. A. ve Romer R. H., (1988), “Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables”, Dover Publications.
- [21] Hatipoğlu M. E., Dikmen F., Sever E. ve Tuchkin Y. A., (2018), “Numerical Stabilization of Recursive T Matrix Method in 2D for TM-z Scattering from Circular Boundaries”, 23rd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), IEEE, 24 Eylül.
- [22] Balanis C. A., (2012), “Advanced Engineering Electromagnetics”, 2nd Edition, John Wiley & Sons.
- [23] Arfken G. B. ve Weber H. J., (1999), “Mathematical Methods for Physicists“, 3rd Edition, Academic Press.
- [24] Morita N., Kumagai N. ve Mautz J. R., (1990), “Integral equation methods for electromagnetics”, 1st Edition, Artech House Antenna Library.
- [25] Morita N., (1978), “Surface integral representations for electromagnetic scattering from dielectric cylinders”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 26, 261-266.

- [26] Chew W. C., Wang Y. M., Otto G., Wagner R. L., Gürel L., Liu Q. H., (1992), "A Generalized Recursive Algorithm for Wave-Scattering Solutions in Two Dimensions", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 40 (4), 716-723.
- [27] Güler S., Önel C., Ergül Ö., Sever E., Dikmen F. and Yu.A. Tuchkin, (2016), "Modified superformula contours optimized via genetic algorithms for fastly converging 2D solutions of EFIE", IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, APSURSI 2016 - Proceedings. 1461–1462.



ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Emin GEÇER, 2012 yılında eğitimine başladığı Karabük Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümünü 2017 yılında başarıyla tamamlayarak aynı yıl yüksek lisans eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında başladı. 2020-2021 eğitim dönemi bahar yarı yılında Piri Reis Üniversitesi Denizcilik Meslek Yüksekokulunda Elektronik ve Devre Teorisi uygulamaları için laboratuvarında çalıştı. Günümüzde Üsküdar Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği (İngilizce) Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.



TEZ KAPSAMINDA YAPILAN YAYINLAR

- [1] Geçer M. E., Hatipoğlu M. E., ve Dikmen F., (2021), “Mükemmel iletken keyfi kesitli silindirik cisimler için T matrisi yönteminin regülerleştirilmesi”, URSI-TR X. Bilimsel Kongresi, Kocaeli, Türkiye, 7-9 Eylül.
- [2] Geçer M. E., Hatipoğlu M. E., ve Dikmen F. (2023) , “Mükemmel iletken keyfi kesitli silindirik cisimler için T matrisi yönteminin regülerleştirilmesi”, Gebze Teknik Üniversitesi 7. Lisansüstü Araştırmalar Sempozyumu, Kocaeli, Türkiye, 31 Mayıs-1 Haziran.

