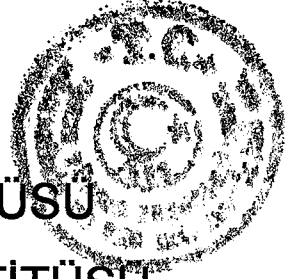


T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



134397

DALGA KILAVUZLARINDA  
ELEKTROMAGNETİK ZAMAN DOMENİ  
ANALİZLERİNİN YENİ BİR ANALİTİK  
METODLA İNCELENMESİ

Serkan AKSOY  
DOKTORA TEZİ  
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ  
ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI  
Prof.Dr. Ali ALKUMRU

134397

GEBZE  
2003

.....Serkan.....AKSOY.....'un tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..16/06/2003..tarih ve ..2003.1.17.. sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından ..Elektronik.....Mühendisliği..... Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.



JÜRİ

ÜYE : Prof.Dr.Ali ALKUMRU  
(Tez Danışmanı)

ÜYE : Prof.Dr.Alinur BÜYÜKAKSOY

ÜYE : Prof.Dr.Gökhan UZGÖREN

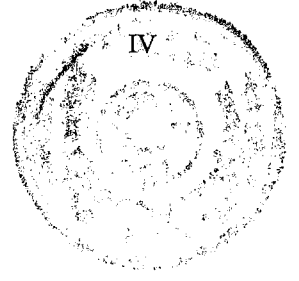
ÜYE : Prof.Dr.Oleg A. TRETAKOV

ÜYE : Yrd.Doç.Dr.A.Arif ERGİN

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..19.08.2003..tarih ve ..2003.1.25.. sayılı kararı.





## ÖZET

Bu çalışmada mükemmel iletken duvarlardan yapılmış dikdörtgen kesitli içi boş ve  $Oz$  ekseni boyunca sonsuz uzun dalga kılavuzlarında sayısal işaretlerin uyarılması ve yayılması problemi “*Dalga Kılavuzları için Zaman Domeninde Elektromagnetik Teoriye Yeni bir Yaklaşım*” adı verilen analitik bir zaman domeni metodu ile ele alınmıştır.  $TE$  ve  $TM$  dalga kılavuzu modları için zaman domeni çözümleri direkt olarak elde edilmiştir. Çözülen elektromagnetik dalga ifadeleri enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarının bir vektör fonksiyonu olan ve sınır koşullarını sağlayan bazlar ile skaler olarak zamana ve boylamsal koordinatlara bağlı fonksiyonların tanımladığı genliklerin toplamı şeklinde elde edilmiştir. Baz ifadeleri Laplacian için Dirichlet ve Neumann sınır özdeğer problemlerinin çözümlerini sağlayan skaler potansiyeller ile elde edilebilmektedir. Genlik ifadeleri ise Maxwell denklemleri üzerine yapılan uygun izdüşümler sonucu elde edilen zamana bağlı kısmi türevler içeren diferansiyel denklem sisteminin çözümleri olarak elde edilebilmektedir. Sayısal işaretlere bir örnek olarak Walsh fonksiyonları ele alınarak çözüm nedensellik prensibi ve özel relativite teorisinin maksimum bilgi hızı aktarma konusundaki gereksinimlerini de sağlayacak biçimde bulunmuştur. Elde edilen çözümler Maple 8.0 programı yardımı ile iki ve üç boyutlu grafikler şeklinde gösterilmiştir.



## SUMMARY

In this study, the problem of excitation and propagation of digital signals in a hollow rectangular waveguide having perfect electric conductor walls is considered by an analytical time domain method called "*Evolutionary Approach to Electromagnetics*" for waveguide. The time domain solution of the problem for *TE* and *TM* modes is found directly.

Every modal field is obtained as a sum of an element of the waveguide basis which is a vector function of the transverse waveguide coordinates and amplitudes of appropriate field component which is a scalar function of time and longitudinal coordinate. The basis elements are specified by two scalar potentials. They are eigensolutions of Dirichlet and Neumann boundary eigenvalue problems for Laplacian. Unknown amplitudes is solved by time dependent differential equation system which is obtained after projection on the Maxwell equation.

As an example of digital signals, Walsh functions are chosen and the solution satisfies causality principle and special theory of relativity. Obtained results are presented as 2D and 3D graphics using Maple 8.0 software.

## TEŞEKKÜR

Tez alışmam sırasında gerekli ilgi ve desteklerini esirgemeyen danışman hocalarım Prof. Dr. O.A. Tretyakov, Prof. Dr. Alinur Buykaksoy ve Prof. Dr. Ali Alkumru'ya, tez alışmama başlamak konusunda beni cesaretlendiren hocam Doç. Dr. Ertuğrul Karaçuha'ya, çalışmalarım sırasında birçok konuda desteğini aldığım hocam Yrd. Doç. Dr. A. Arif Ergin ile birlikte bana huzurlu ve rahat bir çalışma ortamı sağlayan tüm mesai arkadaşlarıma ve başta ailem olmak üzere desteğini ve sevgisini hep grdğim hayat arkadaşıma teőekkürü bir borç bilirim...

Serkan AKSOY



# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

## Sayfa

ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ	XI

## 1.GİRİŞ

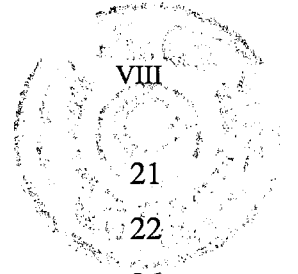
1.1.Konu ve Önemi	1
1.2.Tezin Amacı ve İçeriği	2
1.3.Tarihsel Gelişim	5
1.3.1.Metot için Tarihsel Gelişimi	5
1.3.2.Problem için Tarihsel Gelişimi	7

## 2.PROBLEMİN FORMÜLASYONU

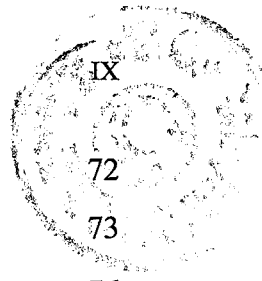
2.1.Standart Formülasyon	11
2.1.1.Dalga Kılavuzu Tanımlamaları	11
2.1.2.Maxwell Denklem Sistemi ve Cauch Problemi	12
2.2.Enlemsel ve Boylamsal Durumlarda Maxwell Denklemleri	13
2.2.1.Enlemsel ve Boylamsal Olarak Vektörlerin Ayrılması	13
2.2.2.Birinci Dereceden Diferansiyel Denklem Sisteminin Eldesi	14
2.2.3.İkinci Dereceden Diferansiyel Denklem Sisteminin Eldesi	16
2.2.4.Sınır Koşulları	19
2.2.5.Dalga Sınır Operatörü (DSO)	19

## 3.DSO DOMENİNDE OLUŞAN BAZLAR

3.1.Operatör Formundaki Özdeğer Problemi	21
--	----



3.1.1.DSO'nun Domeni	21
3.1.2.DSO'nun Kendine Özdeşliği ve Özdeğer Problemi	22
3.2.Eş Vektör ve Eş Skaler Sınır Özdeğer Problemi	26
3.2.1. $W_H$ Operatörü için Sınır Özdeğer Problemi	27
3.2.2. $W_E$ Operatörü için Sınır Özdeğer Problemi	34
3.3.DSO Özvektör Setinin Ortonormalizasyonu	39
3.3.1. $\{\vec{Y}_{\pm m}\}_{m=1}^{\infty}$ Özaltvektör Setinin Ortonormalizasyonu	39
3.3.2. $\{\vec{Z}_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$ Özaltvektör Setinin Ortonormalizasyonu	41
3.4.Üç Elemanlı Vektör fonksiyonlarının Baz Kümesi	42
3.4.1.Enlemsel Vektör Elemanlarının Baz Kümesi	43
3.4.1.Boylamsal Vektör Elemanlarının Baz Kümesi	45
<b>4. VEKTÖR ALANLARININ BAZ ÜZERİNE İZDÜŞÜMLERİ</b>	
4.1.Enlemsel Vektörlerin Baz Üzerine İzdüşümleri	46
4.2.Boylamsal Vektörlerin Baz Üzerine İzdüşümleri	47
<b>5. MAXWELL DENKLEMLERİNİN BAZ ÜZERİNE İZDÜŞÜMLERİ</b>	
5.1. $H_z$ için İzdüşümler	49
5.1.1.Skaler Diferansiyel Denklem İzdüşümleri	49
5.1.2.Vektör Diferansiyel Denklem İzdüşümleri	51
5.2. $E_z$ için İzdüşümler	55
5.2.1.Skaler Diferansiyel Denklem İzdüşümleri	55
5.2.2.Vektör Diferansiyel Denklem İzdüşümleri	57
5.3.Kısmi Diferansiyel Denklem Sistemi Kümesi	61
5.3.1.Genel Kısmi Diferansiyel Denklem Sistemi	61
5.3.2.Dış Kaynak Uygulama ve Başlangıç Koşulları	62
<b>6. DİKDÖRTGEN KESİTLİ DALGA KILAVUZU İÇİN SAYISAL UYGULAMA</b>	
6.1. $TM$ Modları Analizi	66
6.1. $TE$ Modları Analizi	67
6.3. $TM$ ve $TE$ Modları için Klein-Gordon Denkleminin Çözümü	68



6.4.Kesim Frekansı Analizleri	72
6.5. $TE$ modları için $\psi_m$ Çözümleri	73
6.6.Elektromagnetik Alanın Zamana Bağımlılığı	76
6.6.1.Walsh Fonksiyonları	76
6.6.2.Walsh Fonksiyonlarının Neumann Serileri İfadesi	77
6.6.3.Farklı Peryotlu Darbeler Üzerinde Dispersiyon Etkisi	85
6.6.4.Zaman Domeninde Kesim Frekansı'nın Etkisi	87
6.6.5.Zaman Domeninde Enerjinin Korunumu Prensibi	90
7.SONUÇLAR ve ÖNERİLER	94
8.KAYNAKLAR	95
ÖZGEÇMİŞ	100
EKLER	101



# SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ



$\vec{H}$ ; Magnetik alan vektörü (A/m)

$\vec{E}$ ; Elektrik alan vektörü (V/m)

$\vec{D}$ ; Elektrik akı yoğunluğu vektörü ( $C/m^2$ )

$\vec{B}$ ; Magnetik akı yoğunluğu vektörü ( $Wb/m^2$ )

$\vec{J}_\sigma$ ; Elektrik İletkenlik hacimsel akım yoğunluğu ( $A/m^2$ )

$\vec{j}_e$ ; Elektrik kaynak akım yoğunluğu ( $A/m^2$ )

$\vec{J}_h$ ; Manyetik kaynak akım yoğunluğu ( $V/m^2$ )

$W_E, W_H$ ; Elektrik ve magnetik dalga sınır operatörleri

$\vec{r}$ ; Konum vektörü (m)

$t$ ; Zaman (s)

$\partial_t$ ; Zamana göre kısmi türev operatörü (1/s)

$\rho_\sigma$ ; İletkenlik yük hacim yoğunluğu ( $C/m^3$ )

$\rho_e$ ; Elektriksel yük hacim yoğunluğu ( $C/m^3$ )

$\rho_h$ ; Magnetik yük hacim yoğunluğu ( $Wb/m^3$ )

$\vec{P}$ ; Elektrik polarizasyon vektörü ( $C/m^2$ )

$\vec{M}$ ; Magnetizasyon vektörü (A/m)

$\epsilon_0$ ; Boşluğun dielektrik sabiti (F/m)

$\mu_0$ ; Boşluğun magnetik sabiti (H/m)

$c$ ; Işığın boşluktaki hızı (m/s)

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ; Kartezyen koordinatlardaki birim vektörler

$J_n(\cdot)$ ;  $n$ 'inci mertebeden Bessel fonksiyonu

$W_n(\cdot)$ ;  $n$ 'inci mertebeden Walsh fonksiyonu

$U(\cdot)$ ; Birim basamak fonksiyonu

**ZBDD**: Zamana Bağlı Katsayılar ile Diferansiyel Denklem

**TE**: Enlemsel Elektrik (Transverse Electric)

**TM**: Enlemsel Magnetik (Transverse Magnetic)

**TEM**: Enlemsel Elektrik Magnetik (Transverse Electric Magnetic)

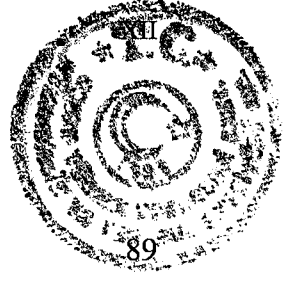


## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sekil

### Sayfa

6.1.Dispersiyonun istenmeyen etkisi	65
6.2.Walsh fonksiyonlarının ardışık biçimde verilmiş genel bir kümesi	76
6.3. $\Psi(0, \tau)$ 'un boyutsuz $\tau$ boyunca göre değişimi	79
6.4. $\Psi(1, \tau)$ 'nun boyutsuz zamana $\tau$ göre değişimi	80
6.5. $-\partial\Psi(\eta, \tau)/\partial\tau$ 'in $\eta = 1$ 'de boyutsuz zamana $\tau$ göre değişimi	80
6.6. $\partial\Psi(\eta, \tau)/\partial\eta$ 'in $\eta = 1$ 'de boyutsuz zamana $\tau$ göre değişimi	80
6.7. $\Psi(\eta, 2)$ 'nin boyutsuz konuma $\eta$ göre değişimi	81
6.8. $-\partial\Psi(\eta, \tau)/\partial\tau$ 'in $\tau = 2$ 'de boyutsuz konuma $\eta$ göre değişimi	81
6.9. $\partial\Psi(\eta, \tau)/\partial\eta$ 'in $\tau = 2$ 'de boyutsuz konuma $\eta$ göre değişimi	81
6.10.Geometrik dispersiyonun $\Psi(\eta, \tau)$ için dalga kılavuzu boyunca ilerleyen elektromagnetik dalgalar boyunca artan bozucu etkisi	83
6.11.Bir birimlik $U(\eta, \tau)$ işaretinin $\eta - \tau$ düzlemi boyunca yayılımı ve dispersiyon nedeni ile bozulması	84
6.12. $\Psi(\eta, \tau)$ işaretinin $\eta - \tau$ düzlemi boyunca yayılımı ve dispersiyon nedeni ile bozulması	84
6.13.Boyutsuz 10 birimlik darbe'nin 10 birimlik konum $\eta$ itibari ile zamana $\tau$ göre değişimi	85
6.14. $U(150, \tau)$ 'nun boyutsuz $\tau$ zamana göre değişimi	85
6.15.Boyutsuz birim darbe süresi 0.03125 olan $\Psi(\eta, \tau)$ türü uyarma için $\tau = 4$ olmak üzere $\eta$ boyunca değişim	86
6.16.Boyutsuz birim darbe süresi 0.21875 olan $\Psi(\eta, \tau)$ türü uyarma için $\tau = 4$ olmak üzere $\eta$ boyunca değişim	86
6.17. $\nu_{10} = \pi$ iken $U(1 \text{ metre}, t \text{ saniye})$ 'nin zaman göre değişimi	87
6.18. $\nu_{10} = 2\pi$ iken $U(1 \text{ metre}, t \text{ saniye})$ 'nin zaman göre değişimi	87
6.19. $\nu_{10} = 5\pi$ iken $U(1 \text{ metre}, t \text{ saniye})$ 'nin zaman göre değişimi	88
6.20. $15 \times 10^{-9}$ saniyelik birim darbe için $H_z$ komponentinin TE <sub>10</sub> modu için dalga kılavuzunda $0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$ aralığında $x - t$ düzlemi boyunca dağılımı ( $z=0$ )	88



6.21.  $15 \times 10^{-9}$  saniyelik bir darbe'nin  $TE_{10}$  modu için  $H_z$  komponentinin dalga kılavuzunda  $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$  aralığında  $x - z$  düzlemi boyunca bozulması ( $t=15 \times 10^{-8} \text{ sn}$ )

6.22.  $16 \times 10^{-9}$  saniyelik  $Wal_5(t)$ 'nin  $TE_{10}$  modu için  $H_z$  komponentinin dalga kılavuzunda  $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$  aralığında  $x - t$  düzlemi boyunca dağılımı ( $z=0$ ) 89

6.23.  $16 \times 10^{-9}$  saniyelik  $Wal_5(t)$ 'nin  $TE_{10}$  modu için  $H_z$  komponentinin dalga kılavuzunda  $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$  aralığında  $x - z$  düzlemi boyunca bozulması ( $t=3 \times 10^{-8} \text{ sn}$ )

90

6.24. Dikdörtgen kesitli dalga kılavuzu için kesit görünüm

90

6.25. (6.58) denkleminin sağ yanının boyutsuz  $\tau$  boyunca değişimi

91

6.26. (6.58) denkleminin sol yanının boyutsuz  $\tau$  boyunca değişimi

92





# 1. GİRİŞ

## 1.1. Konu ve Önemi

Tüm elektromagnetik dalga olaylarının nedensel ve zaman bağımlı olduğu bilinmesi ile beraber, elektromagnetik kaynaklar genellikle sürekli zaman rejiminde çalışırlar. Bu nedenle elektromagnetik araştırmalar zaman harmonik dalga yayılımı konusunda yoğunlaşmıştır. Ancak zaman bağımlı etkilerin davranışlarının net bir şekilde belirlenmesini gerektiren birçok uygulama nedeni ile geçici dalga olayları konusuna yeniden yoğun bir ilgi ortaya çıkmıştır. Bu tür bir uygulamaya örnek olarak iyonosfer veya iyonize edilmiş plazma şeklinde modellenen zaman bağımlı ortamlarda işaret iletimi verilebilir. Yine geniş bantlı kısa elektromagnetik darbelerin üretilebilmesi ile çeşitli anten ve hedeflerden elektromagnetik dalgaların saçılma, alma ve verme gibi karakteristiklerin incelenmesi ihtiyacı geçici dalga olaylarına paralel olarak zaman domeni metodlarının gelişimine olan gereksinimi artırmıştır. Özellikle yüksek güçlü kısa elektromagnetik dalgalar optik frekanslarda çeşitli dalga-malzeme etkileşimlerinin araştırılmasında tespit amaçlı uygulama alanı bulmuşlardır.

Yakın dönemde aniden oluşan yıldırım, insan yapımı nükleer patlamalar v.b. çok kısa darbe türü işaretlerin elektromagnetik cihazlar ve sistemler üzerinde oluşturacağı zararlar, elektronik sistemlerin ve haberleşme kanallarının bu tür işaretlere karşı korunması ve güvenilirliği ve buna paralel olarak elektromagnetik uyumluluk konusu zaman domeni uygulamalarına olan ilgiyi ticari ve askeri alana taşımıştır.

Günümüzde ise darbe katarlarından oluşan sayısal işaretler radyo, uydu haberleşmesi, çeşitli radar ve elektromagnetik sistemlerde yoğun olarak uygulama imkanı bulmuşlardır. Sayısal işaretleri temel alan haberleşme ve elektromagnetik uygulamaları diğer tekniklere göre çeşitli avantajlara sahiptirler. Bunlar

1-) Sayısal işaretleri kolay üretilebilme, kontrol edilebilme ve birden fazla sayısal işaretin etkin biçimde çoklanabilme yeteneği,

2-) Analog sistemlerin karşılaştığı yüksek gürültü duyarlılığı, pahalı ve zor gerçekleştirilebilirlik v.b. konulara karşı avantaj,

3-) Sayısal işaretler yardımı ile bilgi iletiminde daha düşük hata seviyeleri ile hataların tespiti ve yok edilmesindeki kolaylık,

4-) İletilecek bilginin sayısal işaretler ve algoritmalar ile kodlanarak gizli iletim imkanı yanında sayısal işaret işleme tekniklerinin uygulanmasındaki kolaylık,

5-) Entegre yapıları temel alan mikroişlemciler v.b. geniş yelpazeli sayısal elektronik devrelerinin kullanımı konusundaki uygunluk ve sayısal algoritmaların kolay gerçekleştirilme imkanı

olarak sayılabilir. Sayısal işaretlerin uygulamaları antenler, alıcılar, vericiler, kılavuzlar ve iletişim kabloları v.b. bir çok alt elektronik sistemin kullanımını zorunlu kılmaktadır. Bu sistemlerin verimli bir biçimde tasarlanıp, kullanılabilmesi için sayısal işaretlerin bahsedilen sistemlerde ki davranışlarının bilinerek uygulanan teorik modellerin gerçek sistemlerle iyi örtüşmesine gereksinim duyulmaktadır. Bu tez çalışmasında söz konusu alt sistemlerden biri olan dikdörtgen kesitli içi boş dalga kılavuzlarında Walsh fonksiyonları şeklinde modellenen sayısal işaretlerin yayılımı ile ilgili çözümler zaman domeninde analitik olarak "*Dalga Kılavuzları için Zaman Domeninde Elektromagnetik Teoriye Yeni bir Yaklaşım*" adı verilen metot ile nedensellik prensibi ve özel relativite teorisinin maksimum bilgi hızı aktarma konusundaki gereksinimlerini de sağlayacak biçimde elde edilmiştir.

## 1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Tezin amacı, sözü geçen metot ile elektromagnetik kaynakların zaman bağımlılıklarının monokromatik olmaması durumunda dalga kılavuzlarında meydana gelen dalga yayılımının zaman domeninde analitik olarak incelenmesidir. Dalga kılavuzlarında monokromatik olmayan kaynakların oluşturduğu elektromagnetik dalga yayılımı konusunda literatürde yoğun olarak kullanılan üç ana metot göze çarpmaktadır. Bunlar;

- *Kesin Çözüm Metodu (KÇM):*

KÇM dalga kılavuzlarında frekans domeninde iyi bilinen dispersiyon bağıntısını geçiş fonksiyonu olarak düşünüp problemi giriş-çıkış yapısındaki bir sistem şeklinde modelleyerek Fourier veya Laplace dönüşümleri yardımı ile sistemin çıkış cevabını bulmaya dayanır. Çıkış cevabı ters dönüşümlerle sonsuz seri toplamları veya direkt sayısal integrasyon teknikleri ile bulunabilmektedir. KÇM çözümlerinin temel dezavantajları; incelenen yayılım mesafesinin uzun olması durumunda karşılaşılan yakınsama problemi, sayısal integrasyon nedeni ile karşılaşılan yorum güçlükleri, nedensellik prensibinin sağlanamaması ve çözümün bilinen fonksiyonlar yerine daha karmaşık yapıda ortaya çıkması sayılabilir.

- *Yaklaşım Metodu (YM):*

YM de KÇM gibi sistem çözümü üzerine kurulu olup eğer kaynak işareti hemen hemen monokromatik ise yani frekans spektrumu dar ve bir tek frekans civarında yoğunlaşmış ise, söz konusu işaret bir dalga paketi gibi düşünülerek KÇM'de kullanılan dispersiyon bağıntısının Taylor serisine açılarak yaklaşık çözümlerin bulunmasına dayanır. YM'nin temel dezavantajları; söz konusu yaklaşıklık işaretin başlangıç yükselme zamanı kısa ise, dar bantlılık varsayımının genel geçerliliğini yitirmesi sonucu elde edilen cevabın ilk kısımlarının yanlış tahmin edilmesi ile nedensellik prensibinin bozulması ve fiziksel olarak gerçekleşmesi mümkün olmayan sistem çözümlerinin elde edilmesidir.

- *Sabit Faz Metodu (SFM)*

SFM, KÇM ve YM için kullanılan dispersiyon bağıntısı ve türevlerinden yola çıkarak sabit faz noktalarının tespiti sonucu elde edilen integral ifadelerinin semer noktası, en dik iniş çizgisi v.b. yöntemlerle asimptotik olarak değerlendirilmesine dayanan yaklaşık ve yakınsak çözümler verir. Çözümler istenilen aralıkta elde edilebileceğinden nedensellik prensibi bozulmaz ve incelenen yayılım mesafesi yakınsama problemi olmaksızın uzun olabilir. SFM'nin temel dezavantajları; sabit faz noktasına bir kutbun yakın olması durumunda salınan çözümler ve bunların

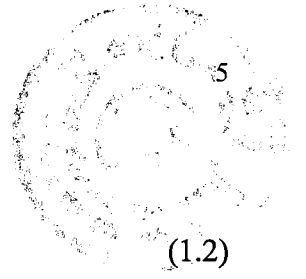
semer noktası ve en dik iniş çizgisi v.b. yöntemlerle kesin değerlendirilmesindeki zorluklar ve çözümlerdeki hata analizlerinin yapılması gerekliliği ve zorunluluğudur.

Bu tez çalışmasında bahsedilen Fourier veya Laplace dönüşümlerini temel alan metodlara ve dezavantajlarına karşın zaman domeninde analitik yeni bir metot sayısal işaretlerin dalga kılavuzlarında yayılımı probleminin çözümü için uygulanmıştır. Böylece dalga kılavuzu problemlerinde kaynak zaman bağımlılıklarının monokromatik olmaması, lineer olmayan malzemelerle dalga kılavuzlarının doldurulması v.b. durumlarda elektromagnetik çözümlerin zaman domeninde analitik olarak bulunabilmesi mümkün olabilecektir. Monokromatik olmayan kaynak bağımlılığı olarak Walsh fonksiyonları biçiminde zaman bağımlılıkları ele alınmıştır. Walsh fonksiyonlarının belirli başlangıç ve bitiş noktaları olması özelliği nedeni ile Fourier dönüşümünü temel alan metodlar bakımından çözümler fiziksel yorum zorlukları ile karşılaşmaktadır.

Söz konusu metodda Maxwell operatöründen kendine özdeş iki alt operatör parçası ayrıklaştırılıp problem formüle edilmiştir. Bu amaçla  $Oz$  eksenini boyunca geometrik olarak düzenli bir biçimde uzanan bir dalga kılavuzu basit bağımlı biçimde ele alınarak Maxwell operatörü

$$M = L_{z,t} - W + A \quad (1.1)$$

şeklinde ayrıklaştırılmıştır. Burada  $M$  Maxwell operatörünü,  $W$  mükemmel iletken dalga kılavuzu sınırlarını da kapsayacak biçimde kendine özdeş bir lineer matris operatörünü,  $A$  bünye bağıntılarını kapsayan Maxwell operatörünün geriye kalan kısmını göstermektedir. Bu nedenle  $A$  operatörü lineer olmayabilir.  $W$  operatörü  $\vec{X}(\vec{r}, z, t)$  olarak gösterilen elektromagnetik alan çözümlerinde sadece enlemsel koordinatlar üzerinde etkilidir.  $\vec{R} = \vec{r} + z\vec{e}_z$  biçiminde dalga kılavuzu eksenleri vektörel biçimde gösterilecek olursa, dalga kılavuzu içerisinde  $\vec{r}$  yer vektörünü ve  $\vec{e}_z$  kılavuzun  $z$  eksenini boyunca tanımlanmış birim vektörünü gösterir.  $L_{z,t}$  matris operatörü ise  $z$  koordinatlarına ve  $t$  zamanına bağlı kısmi türevler içermektedir.  $W$  operatörü kendine özdeş olması nedeni ile tamamlanmış bir öz vektör kümesine sahiptir. Söz konusu öz vektör kümesi  $M$  operatörü domeninde ortonormal bir baz oluşturur. Böylece Maxwell denklem sistemi öz değer vektör serileri formunda



$$\vec{X}(\vec{r}, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z, t) \vec{X}_n(\vec{r}) \quad (1.2)$$

ifade edilebilir. Burada  $c_n(z, t)$  bilinmeyen katsayıları,  $\vec{X}_n(\vec{r})$  bilinen baz elemanlarını gösterir. Bilinmeyen katsayılar Maxwell denklemlerinin aynı baz üzerine izdüşümleri ile bulunabilirler. Bu izdüşümlerle bilinmeyen katsayılarının elde edilme problemi boylamsal koordinatlarda uygun sınır ve başlangıç koşulları ile çözülebilen kısmi diferansiyel denklem sisteminin elde edilmesine dönüşür.

### 1.3. Tarihsel Gelişim

#### 1.3.1. Metot için Tarihsel Gelişim

Elektromagnetik teoremin Maxwell denklemleri üzerine kurulduğunun kabul edilmesi ile, elektromagnetik problemlerin çözümleri çoğunlukla Fourier domeninde geliştirilmiştir. Elektromagnetik çözümlerde Fourier dönüşümü kullanılması ile zaman parametre olmaktan kalkmış ve problem için etkin frekans değerinin saptanması önem kazanmıştır. Bu yaklaşımda saptanan frekans değerlerinden en anlamlı frekanslardaki alan ifadelerinin genlikleri koordinatların fonksiyonu olup frekans domeninde ki çözümler ters Fourier dönüşümü ile zaman domenine indirgenerek, elektromagnetik problemlerin zaman domeni cevapları aranmaya çalışılmıştır.

Elektromagnetik problemlerin çözümlerinde bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak yoğun biçimde çeşitli sayısal metodlar kullanılması ile birlikte bu tez çalışmasında daha çok analitik metodlar üzerinde durulacaktır. İntegral dönüşümlerini temel alan metodlar ve sayısal metodlara alternatif olarak 1940'lı yıllar boyunca J. C. Slater [Slater, 1946] ve G. V. Kisunko [Kisunko, 1949] gibi bazı bilim adamları elektromagnetik problemlerin zaman domeninde çözülmesi konusunda ilk çalışmaları başlatmışlardır. Bu çalışmalar öncelikle temel problem olan kavite problemi için ele alınmış ve ortonormal model fonksiyonlarının tamamlanmamış bir kümesinin varlığı varsayımı ile bilinmeyen elektromagnetik alan

büyüklikleri bulunmaya çalışılmıştır. Bu çalışmaların en zayıf yanı, ortonormal fonksiyonlar kümesinin tamamlanmamışlığının bilinmesine rağmen kullanılmış olmasıdır. Bununla birlikte bilinmeyen alan büyüklükleri kavite içerisinde zamana bağlı katsayılar ile diferansiyel denklemlerin (ZBDD) çözümleri olarak seriler biçiminde elde edilmiştir. Benzer biçimde kavite probleminin yanısıra dalga kılavuzu problemi içinde ZBDD çözümleri uygulanmaya çalışılmıştır. ZBDD çözümleri integral dönüşümlerinde ki bir takım zorluklardan kaçınılmasını mümkün kılar ve ilk kez Van Bladel tarafından dalga kılavuzu modları için elde edilmişlerdir. Fakat bu incelemede yalnızca monokromatik zaman bağımlılıkları üzerine çalışılmıştır [Bladel, 1964]. Daha sonra Felsen ve Marcuvitz farklı yollarla ZBDD'lerin çözümleri üzerine çalışmışlardır [Felsen&Marcuvitz, 1973]. Bu anlamdaki bir diğer çalışma dört boyutlu simetrik tensörlerin bir sınıfını kullanan ve Gabriel tarafından ortaya konan yeni bir teoremdir [Gabriel, 1980]. Gabriel bu çalışmasında *TE*, *TM* ve *TEM* tipi kılavuz modlarının genliklerini zamana ve konuma bağlı kısmi diferansiyel denklemleri şeklinde çıkarmış ve bu modların dağılmış parametrelili devreler yardımı ile gösterilim imkanlarını tartışmıştır. Dört boyutlu tensör metodunun en zayıf noktası yine tamamlanmamış bir model fonksiyonları kümesinin teoreminin başından itibaren kullanılması zorunluluğudur. Bu çalışmalara ek olarak iki boyutlu sınır değer problemleri dalga denklemi operatörünün alt operatörlere ayrılarak tersinin alınması prensibine dayanan bir yöntemle Borisov tarafından ele alınmıştır [Borisov, 1987]. Bu çalışmada skaler dalga denklemi için Smirnov tarafından önerilen "tamamlanmamış değişken dönüşümü" adı verilen metot ile ZBDD'ler elde edilmiştir. Smirnov bu çalışmasında hiperbolik tipdeki kısmi diferansiyel denklemler için kullanılan teoriden alınan Riemann metodunu kullanmıştır [Smirnov, 1957]. Dalga kılavuzlarında zamana bağlı dalga yayılımları ile ilgili ancak sınırlı sayıda probleme uygulanabilen bir katkıda Kristennson tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada elektromagnetik alan bileşenleri Green fonksiyonunun ve dalga kılavuzunu uyaran kaynak fonksiyonunun zaman konvolüsyonu biçiminde ifade edilmiş ve bu yaklaşıma "dalga ayırımı metodu" adı verilmiştir [Kristennson, 1995]. Daha sonra Shvartsburg tarafından dispersif ortamlarda periyodik olmayan dalga yayılımı için ispatsız olarak ZBDD'lerle çeşitli çözüm modelleri verilmiştir. Son olarak Nerukh'un zaman domeni çalışmalarından da bahsetmek faydalı olacaktır [Nerukh, 2001]. Bu çalışmalarda Nerukh, Khizhnyak'ın çalışmalarını temel alan Voltera integral denklemlerini kullanmıştır [Khizhnyak, 1958].

Yukarıda anlatılan yaklaşımlara karşın, bu tez çalışmasında Maxwell operatöründen ayrılan ve kendi kendine özdeş bir operatör çifti yardımı ile özdeğer-özvektör probleminin elde edilmesine dayanan analitik bir metot ele alınmıştır. Böylece tamamlanmış baz fonksiyonları kümesi elde edilerek dalga kılavuzlarında elektromagnetik alan bağımlılıkları zaman domeninde analitik ifadeler kaynak zaman bağımlılıklarının Walsh fonksiyonları biçiminde olması durumunda elde edilmeye çalışılmıştır. Söz konusu metotla ilgili ilk temel teorik alt yapı Tretyakov tarafından verilmiştir [Tretyakov, 1986&1993]. İlk uygulamalar kavite problemi üzerine yapılmış ve sınırlı peryotlu sinüzoidal işaretler [Aksoy&Tretyakov, 2002] ve zaman bağımlılıkları Walsh fonksiyonları biçiminde olan kaynaklar tarafından kavitelere oluşturulan rezonans davranışları incelenmiştir [Aksoy&Tretyakov, 2004].

### 1.3.2. Problem için Tarihsel Gelişim

Dalga kılavuzlarının sinusoidal olmayan kaynaklar ile uyarılması durumunda darbe biçimli kaynaklar için deneysel olarak yayılan darbedeki bozulmalar literatürde ilk kez etraflıca Beck tarafından gösterilmiştir [Beck, 1955]. Söz konusu problemin çeşitli analitik çözümleri frekansın lineer olmayan bir fonksiyonu olan faz sabitinin kesin ifadelerinin kullanılması ile kayıplı ve kayıpsız dalga kılavuzları için Heaviside ve Dirac fonksiyonu tipindeki kaynaklar açısından ele alınmış fakat elde edilen kontur integralinin analitik değerlendirilmesindeki zorluklar ve yalnızca Dirac türü kaynaklar için kontur integralinin bilinen fonksiyonlar cinsinden kesin ifadelerinin bulunabilmesi nedeni ile çözümler Beck'in sonuçları ile karşılaştırılmayarak pratik anlamda uygulanamamıştır [Cerillo, 1948], [Cotte, 1954]. Kontur integralinin sayısal hesaplanmasına dayalı çözümler dalga kılavuzu duvarlarının kayıplarının da hesaba katılmasıyla modüle edilmiş birim basamak tipi [Gajewski, 1958] ve çeşitli RF sistemlerinde taşıyıcı frekanslı Gaussian tipi darbeler türündeki kaynaklar için araştırılmıştır [Forrer, 1958]. Benzer bir diğer yaklaşım faz sabitinin Taylor serisine açılmasıyla yapılan yakınsama sonucu modüle edilmiş darbeler için uygulanmıştır [Elliot, 1957].

Beck'den sonra deneysel önemli bir katkıda Saxton ve Schmitt tarafından yapılmıştır [Saxton&Schmitt, 1963]. Aynı yıllarda daha önce Elliot tarafından elde edilen çözümlerin nedensellik prensibini bozması, fiziksel olmaması konusundaki

yorumlara Knob ve Cohn tarafından dikkat çekilmiştir [Knob&Cohn, 1963]. Deneysel bir diğer önemli katkıda yine Elliot'un teorik çalışmalarını kontrol etmek amacı ile Russo ve Schoep tarafından yapılmıştır [Russo&Schoep, 1964]. Bu yıllardan sonra mevcut çalışmalara alternatif olarak dalga kılavuzları yerine plazma modellerinin kullanılması ile çözümler Bessel fonksiyonları ve onların Neumann serileri biçimindeki bağımlılıklar şeklinde elde edilmeye çalışılmıştır [Knob, 1964] ve [Schmitt, 1965]. Aynı dönemde Ito tarafından sabit faz yöntemi kullanılarak taşıyıcı frekanslı Gaussian tipi kaynaklarla dalga kılavuzlarının uyarılması teorik ve pratik olarak ele alınmış fakat özellikle geniş bantlı işaretler bakımından semer noktası integrasyon yönteminin kullanılması sonucu kesin hata analizlerinin yapılamaması, nedenselliğin bozulmamasına rağmen çözümlerin zayıf yönünü oluşturmuştur [Ito, 1965]. İlerleyen yıllarda plazma modelleri için bulunan Neumann serileri biçimindeki ifadeler yerine modüle edilmiş birim basamak türü kaynaklar için iki değişkenli Lommel fonksiyonları biçiminde çözümlerde elde edilmiştir [Case&Haskell, 1966]. Plasma modellerinin etkin örneklerinden biri modüle edilmiş birim basamak türü kaynaklar için geliştirilmiş semer noktası yöntemi ile dispersif ortamlarda özellikle uzak mesafelere yayılım için yapılan analizler için kesin çözümlerin karşılaştığı yakınsama probleminin üstesinden gelebilmek amacı ile Haskell&Case tarafından ortaya konulmuştur [Haskell&Case, 1967]. Bu çözümlerde karşılaşılan integrallerin değerlendirilmesi konusunda çalışmalar Sommerfeld ve Brillouin tarafından daha önce ele alınmıştır [Brillouin, 1960]. Bu çalışmalarda birim darbe yayılımı için Sommerfeld öncül göstericileri bulunmuştur. Bu öncül göstericiler sinyalin ana kısmından daha önce gelen ve spektrumu yüksek frekanslardan çalışma frekansına doğru sürekli bir biçimde azalan bir karaktere sahiptir. Kayıpsız izotropik plazma modellerinin tek mod, ideal ve kayıpsız dalga kılavuzları ile aynı dispersiyon karakteristiğine sahip olması nedeni ile yoğun olarak kullanılması sonrası homojen, dominant mod ve kayıpsız dalga kılavuzları için kesin çözümler Laplace dönüşümü kullanılarak birim darbe, keskin darbe v.b. çeşitli işaretler için araştırılmıştır. Bu çalışmalarda Sommerfeld öncül göstericileri yanı sıra uygulanan frekanstan kesim frekansına doğru asimptotik olarak azalan bir karakteristiğe sahip Sommerfeld ardıl göstericileri de gözlenmiştir [DuBois, 1970]. Araştırmalar modüle edilmiş herhangi bir kaynak dağılımının ideal dalga kılavuzları içinde oluşturacağı alanlar açısından geliştirilmeye çalışılmış fakat yalnızca modüle edilmiş ikili-üstel darbe işaretler için analiz pratik olmayan çok kısa



mesafeler için yapılabilmektedir. Bu yöntemde de Fourier integralinin sonsuz toplamı Bessel serileri formunda gösterilmesi ile kesin çözümler elde edilmiştir [Vogler, 1970]. Çok kısa darbelerin sayısal haberleşme ve kodlama uygulamalarında ki kullanımı sonucu darbe-kod modülasyonlu işaretlerin dalga kılavuzlarında yayılımı esnasında önemli olan köşe bozulmalarının kontrolü amaçlı Fourier integralini temel alan kesin çözümler değişik uygulamalar bakımından tamamlanmamış Weber integrali ve iki değişkenli Lommel fonksiyonu yada tamamlanmamış Lipschitz-Hankel integralleri biçiminde elde edilmeye çalışılmıştır [Vaisleib&Gan, 1977]. İlerleyen yıllarda sinüsoidal olmayan kaynakların paralel düzlemli dalga kılavuzlarında oluşturduğu dalga yayılımı genelleştirilmiş Fourier serileri ile çözülmüştür [Harmuth, 1984]. Bu çalışmalarla beraber dyadic Green fonksiyonlarının iki değişkenli Lommel fonksiyonları aracılığı ile düzenlenmesi sonucu benzer problemler için çözümler yapılmış fakat herhangi bir uygulama veya sonuç gösterilmemiştir [Muhammadian, 1988]. Daha sonraki yıllarda dalga kılavuzlarında ışık hızından daha yüksek hızlarda mikrodalga darbelerin yayılıp yayılamayacağına yönelik deneysel çalışmalar yapılmıştır [Su&Besieris&Riad, 1992]. Yakın dönemde modüle edilmiş keskin darbelerin dalga kılavuzlarında yayılımı probleminin çözümleri Fourier integrallerini temel alan tamamlanmamış Lipschitz-Hankel integrallerinin sayısal olarak değerlendirilmesi şeklinde verilmiştir [Dvorak, 1994]. Aynı metot kullanılarak ikili üstel darbelerin plazma karakterindeki dispersif ortamlarda yayılımı da incelenmiştir [Dvorak&Dudley, 1995]. Lipschitz-Hankel integralleri yardımı ile elde edilen çözümler yakınsak ve asimptotik olarak değerlendirilebilen seri açılımlarının bir uygulaması biçimindedir. Aynı dönemde, birim basamak şeklindeki kaynakların kılavuzlarında oluşturacağı elektromagnetik dalgaların deneysel bir incelemesi Stenius ve York tarafından verilmiştir [Stenius&York, 1995]. Aynı yıllarda sabit nokta yöntemi ile Raleigh paketçikleri biçimli kaynakların dalga kılavuzlarında oluşturacağı dalgaların karakteristik özellikleri teorik ve deneysel olarak araştırılmıştır [Kralj&Mei&Hsu&Varin, 1995]. Lipschitz-Hankel integral metodu ile elde edilen çözümlerin özel fonksiyonların karmaşık biçimlerini içermesi ve değerlendirme zorluklarına bir alternatif olarak en dış iniş çizgisi yöntemi ile birinci ve ikinci mertebeden asimptotik çözümlerin Laplace dönüşümü yardımı ile elde edildiği çalışmalar dalga kılavuzlarında ikili üstel darbe [Liu&Wang, 1997], keskin darbe biçimli modüle edilmiş işaretler [Liu&Wang, 1998] ve dispersif Debye ortamında ikili üstel darbe tipi [Liu&Wang, 2001]



kaynakların oluşturduğu dalga yayılımları için sayısal integrasyonun kullanılması ile araştırılmıştır. Yukarıda bahsedilen problemlerin sayısal metodlar ile çözümlerine yönelik çeşitli çalışmalarda mevcut olmasına rağmen bu tez çalışmasında daha çok analitik yöntemlerle elde edilen çözümler üzerinde durulacaktır. Sayısal çözümlere ilginç ve yeni bir örnek olarak Guassian tipi kaynaklar için elde edilen çözüm verilebilir [Dou&Yung, 2001].

Son yıllarda darbe katarları biçimindeki sayısal işaretlerin haberleşme ve kodlama teknolojilerinde son derece önem kazanması nedeni ile [Bequchamp, 1975], Walsh fonksiyonları biçiminde modellenen darbe katarlarının içi boş dikdörtgen biçimli dalga kılavuzları boyunca yayılımı tez çalışmasında bahsedilen “*Dalga Kılavuzları için Zaman Domeninde Elektromagnetik Teoriye Yeni bir Yaklaşım*” metodu kullanılarak incelenmiştir [Aksoy&Tretyakov, 2003].



## 2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

### 2.1. Standart Formülasyon

#### 2.1.1. Dalga Kılavuzu Tanımlamaları

$Oz$  eksenini boyunca düzenli olarak geometrik bir hacim şeklinde yerleştirilmiş bir dalga kılavuzu ele alınsın. Dalga kılavuzunun yalnızca dikey kesiti enlemsel kılavuz koordinatlarının herhangi bir şekilde ki fonksiyonu olabilecektir. Dalga kılavuzu için sınır konturu  $L$  biçiminde gösterilerek sol yönlü olarak düşünülmüştür.  $L$  konturuna teğet birim vektör kontur yönü ile aynı yönlü olacak biçimde  $\vec{l}$  olarak, normal birim vektör  $\vec{n}$  olarak ve  $z$  yönündeki birim vektör ise  $\vec{e}_z$  olarak gösterilmiştir. Böylece  $\{\vec{l}, \vec{n}, \vec{e}_z\}$  olmak üzere birbirlerine dik olan vektörler kümesi oluşturulmuştur. Dalga kılavuzunda yer vektörü  $\vec{R}$  ile gösterilecek olursa  $\vec{R} = \vec{r} + z\vec{e}_z$  biçiminde ifade edilebilir. Burada  $\vec{r}$  iki boyutlu olup üç boyutlu olan  $\vec{R}$  yer vektörünün dalga kılavuzu üzerine izdüşümünü tanımlar. Bu nedenle  $\vec{r}$  vektörü,  $S$  domeni içerisindeki yer vektörünü oluşturur.  $r \in S$  gösterilimi  $S$  açık domeninde  $\vec{r}$  yer vektörünün konumu tanımlar.  $r \in \bar{S}$  gösterilimi  $\bar{S} = S + L$  olacak biçimde  $S$  kapalı domenindeki  $\vec{r}$  vektörünün konumunu tanımlar. Dalga kılavuzu içerisinde bilinmeyen elektromagnetik alan büyüklükleri  $\vec{E}(\vec{R}, t) \equiv \vec{E}(\vec{r}, z, t)$ ,  $\vec{H}(\vec{R}, t) \equiv \vec{H}(\vec{r}, z, t)$  biçimindedir. Dalga kılavuzunun herhangi bir malzeme ile doldurulmuş olması durumunda bünye bağıntıları  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E})$ ,  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}(\vec{H}))$  ve  $\vec{J} = \vec{J}_o(\vec{E}, \vec{H})$  biçiminde ifade edilebilir. Burada  $\epsilon_0$  ve  $\mu_0$  boş uzayın elektrik ve magnetik geçirgenliklerini,  $\vec{P}(\vec{E})$  elektrik polarizyon vektörünü  $\vec{M}(\vec{H})$  manyetik polarizasyon vektörünü ve  $\vec{J}_o(\vec{E}, \vec{H})$  elektrik iletkenlik hacimsel akım yoğunluğunu göstermektedir. Elektrik ve manyetik kaynak akım yoğunlukları  $\vec{J}_e(\vec{R}, t)$  ve  $\vec{J}_h(\vec{R}, t)$  biçimde ifade edilebilir.

## 2.1.2. Maxwell Denklem Sistemi ve Cauchy Problemi

Söz konusu sınır değer probleminin çözümü; Maxwell denklem sistemi

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{\mathcal{H}} &= \partial_t \vec{D} + \vec{J}_\sigma + \vec{J}_e, & \text{div} \vec{B} &= \rho_h \\ -\text{rot} \vec{\mathcal{E}} &= \partial_t \vec{B} + \vec{J}_h, & \text{div} \vec{D} &= \rho_\sigma + \rho_e \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{teğ}}(\vec{r}, z, t)|_S = 0, \quad \vec{\mathcal{H}}_{\text{norm}}(\vec{r}, z, t)|_S = 0 \quad (2.2)$$

biçiminde düzenlenerek  $t = 0$  anında verilen başlangıç koşulları yardımı ile

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, z, 0) = \vec{\mathcal{E}}_0(\vec{r}, z), \quad \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, z, 0) = \vec{\mathcal{H}}_0(\vec{r}, z) \quad (2.3)$$

sağlanabilir. (2.1) - (2.3) problemi için çözüm elektromagnetik enerjinin sınırlı olması gerekliliğinden yola çıkılarak fonksiyonları karesel olarak integre edilebilen ve kompleks değerli vektör fonksiyonları sınıfında

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{S'} (\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{E}}^* + \mu_0 \vec{\mathcal{H}} \vec{\mathcal{H}}^*) ds < \infty \quad (2.4)$$

şartını sağlamalıdır. Burada  $S' \subseteq S$  olup \*, kompleks konjugeyi göstermektedir.

Polarizasyon ve magnetizasyon vektörleri ise lineer ve lineer olmayan biçimde

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{\mathcal{E}}) &= \varepsilon_0 \alpha(z, t) \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}) \\ \vec{M}(\vec{\mathcal{H}}) &= \mu_0 \chi(z, t) \vec{\mathcal{H}} + \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}) &= \vec{P}(\vec{\mathcal{E}}) - \varepsilon_0 \alpha(z, t) \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}) &= \vec{M}(\vec{\mathcal{H}}) - \mu_0 \chi(z, t) \vec{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ele alınarak

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{\mathcal{E}}) &= \varepsilon_0 \varepsilon(z, t) \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}) \\ \vec{B}(\vec{\mathcal{H}}) &= \mu_0 \mu(z, t) \vec{\mathcal{H}} + \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon(z, t) &= 1 + \alpha(z, t) \\ \mu(z, t) &= 1 + \chi(z, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde düzenlenebilir. Özel olarak  $\vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}) = \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}) = 0$  olması durumunda, bünye bağıntıları  $\vec{D}(\vec{\mathcal{E}}) = \varepsilon_0 \varepsilon(z, t) \vec{E}$ ,  $\vec{B}(\vec{\mathcal{H}}) = \mu_0 \mu(z, t) \vec{H}$  biçiminde yazılabilir. Bu durum malzeme özellikleri zamanla ve bir yönde konumla değişebilen tipte lineer malzemeler ile dalga kılavuzunun doldurularak incelenebileceğini göstermektedir. Buradaki çalışmalarda ise  $c_1$  ve  $c_2$  pozitif sabit sayılar olmak üzere  $\varepsilon(z, t) \geq c_1 > 0$ ,  $\mu(z, t) \geq c_2 > 0$  biçiminde olduğu varsayımı ile basit ortamlar için problem ele alınacaktır. (2.6) ifadeleri (2.1) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{\mathcal{H}} &= \varepsilon_0 \partial_t \{ \varepsilon \vec{\mathcal{E}} \} + \{ \partial_t \vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}) + \vec{J}_\sigma + \vec{J}_e \} \\ \text{rot} \vec{\mathcal{E}} &= \mu_0 \partial_t \{ \mu \vec{\mathcal{H}} \} + \{ \partial_t \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}) + \vec{J}_h \} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \text{div} \{ \varepsilon \vec{\mathcal{E}}(\vec{R}, t) \} &= -\text{div} \vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}) + \rho_\sigma + \rho_e \\ \mu_0 \text{div} \{ \mu \vec{\mathcal{H}}(\vec{R}, t) \} &= -\text{div} \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}) + \rho_h \end{aligned}$$

elde edilir. (2.7) denkleminde ifadelerde eş akım ve yükler tanımlanarak

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}} &= \partial_t \vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}) + \vec{J}_\sigma(\vec{\mathcal{E}}, \vec{H}) + \vec{J}_e, & \rho &= -\text{div} \vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}) + \rho_\sigma + \rho_e \\ \vec{\mathcal{I}} &= \partial_t \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}) + \vec{J}_h, & g &= -\text{div} \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}) + \rho_h \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.7) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{\mathcal{H}} &= \varepsilon_0 \partial_t \{ \varepsilon \vec{\mathcal{E}} \} + \vec{\mathcal{J}} & \varepsilon_0 \text{div} \{ \varepsilon \vec{\mathcal{E}} \} &= \rho \\ -\text{rot} \vec{\mathcal{E}} &= \mu_0 \partial_t \{ \mu \vec{\mathcal{H}} \} + \vec{\mathcal{I}} & \mu_0 \text{div} \{ \mu \vec{\mathcal{H}} \} &= g \end{aligned} \quad (2.9)$$

denklemleri bulunur.

## 2.2. Enlemsel ve Boylamsal Durumlarda Maxwell Denklemleri

### 2.2.1. Enlemsel ve Boylamsal Olarak Vektörlerin Ayrılması

Üç boyutlu  $\vec{\mathcal{E}}$  ve  $\vec{\mathcal{H}}$  vektörleri enlemsel ve boylamsal parçalarına

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{R}, t) &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, z, t) = \vec{E}(\vec{r}, z, t) + \vec{e}_z E_z(\vec{r}, z, t) \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{R}, t) &= \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, z, t) = \vec{H}(\vec{r}, z, t) + \vec{e}_z H_z(\vec{r}, z, t)\end{aligned}$$

biçiminde ayrıştırılabilirler.  $\vec{E}$  ve  $\vec{H}$  vektörleri dalga kılavuzunun dikey kesitine  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{R}, t)$  ve  $\vec{\mathcal{H}}(\vec{R}, t)$  vektörlerinin izdüşümünü,  $E_z$  ve  $H_z$  büyüklükleri ise aynı vektörlerin  $Oz$  eksenine izdüşümünü göstermektedir. Benzer biçimde (2.8) denklemindeki eşdeğer akımlar  $\vec{\mathcal{J}} = \vec{J} + \vec{e}_z J_z$  ve  $\vec{\mathcal{I}} = \vec{I} + \vec{e}_z I_z$  biçiminde düzenlenebilir. Maxwell denklemlerinde ayrı formda çözümün elde edilebilmesi için Nabla operatörü  $\nabla_{\perp}$ ,  $S$  yüzeyine dikey kesit üzerinde etkiyen bir operatör olmak kaydı ile  $\nabla = \nabla_{\perp} + \vec{e}_z \partial_z$  biçiminde ayrıklaştırılacaktır.

### 2.2.2. Birinci Dereceden Diferansiyel Denklem Sisteminin Eldesi

$\nabla = \nabla_{\perp} + \vec{e}_z \partial_z$  gösterilimi ile (2.9) ifadesindeki bünye bağıntıları

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \operatorname{div} \{ \varepsilon \vec{\mathcal{E}} \} &= \varepsilon_0 \nabla \cdot ( \varepsilon \vec{\mathcal{E}} ) = \varepsilon_0 ( \nabla_{\perp} + \vec{e}_z \partial_z ) \cdot \{ \varepsilon ( \vec{E} + \vec{e}_z E_z ) \} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon \nabla_{\perp} \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \partial_z \{ \varepsilon E_z \} = \rho \\ \Rightarrow \varepsilon_0 \partial_z \{ \varepsilon E_z \} &= \rho - \varepsilon_0 \varepsilon \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\mu_0 \operatorname{div} \{ \mu \vec{\mathcal{H}} \} &= \mu_0 \mu \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} + \mu_0 \partial_z \{ \mu H_z \} = g \\ \mu_0 \partial_z \{ \mu H_z \} &= -\mu_0 \mu \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} + g\end{aligned}\tag{2.11}$$

olacaktır. (2.10)'un düzenlenmesinde  $\varepsilon$  terimi  $\nabla_{\perp}$  operatörü için bir sabit olacağından ( $x$  ve  $y$  bağımlılığı olmaması nedeni ile)  $\nabla_{\perp} \varepsilon = \varepsilon \nabla_{\perp}$  şeklinde düzenlenmiştir.  $\nabla = \nabla_{\perp} + \vec{e}_z \partial_z$  operatörü yardımı ile benzer biçimde (2.9) ifadesinde bulunan Maxwell denklemleri yeniden düzenlenerek

$$\begin{aligned}
rot\vec{H} &= [(\nabla_{\perp} + \vec{e}_z \partial_z) \times (\vec{H} + \vec{e}_z H_z)] = \varepsilon_0 \partial_t \{ \varepsilon \vec{E} + \vec{J} \} + \vec{e}_z \{ \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon E_z + J_z \} \\
-rot\vec{E} &= -[(\nabla_{\perp} + \vec{e}_z \partial_z) \times (\vec{E} + \vec{e}_z E_z)] = \mu_0 \partial_t \{ \mu \vec{H} + \vec{I} \} + \vec{e}_z \{ \mu_0 \partial_t \mu H_z + I_z \}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

denklemleri elde edilir. (2.12) denklemlerinin incelenmesi için üç boyutlu bir  $\vec{A}$  vektörünün toplamlar şeklinde rotasyoneli bulunmaya çalışılsın. Bu amaçla  $\vec{A} = \vec{A} + \vec{e}_z A_z$  biçimde  $\vec{A}$  vektörünün enlemsel ve boylamsal olarak ikiye bölünmüş şekli düşünülerek rotasyonel işlemi

$$rot\vec{A} = [(\nabla_{\perp} + \vec{e}_z \partial_z) \times (\vec{A} + \vec{e}_z A_z)] = [\nabla_{\perp} \times \vec{A}] + [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z A_z] + [\vec{e}_z \partial_z \times \vec{A}] + [\vec{e}_z \partial_z \times \vec{e}_z A_z]$$

şeklinde bulunur. Böylece  $[\vec{e}_z \partial_z \times \vec{e}_z A_z] = 0$ ,  $[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z A_z] = [\nabla_{\perp} A_z \times \vec{e}_z] = [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] A_z$  ve  $[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] = -[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}]$ ,  $[\vec{e}_z \times \vec{A}] = \partial_z [\vec{e}_z \times \vec{A}]$  ifadeleri ile rotasyonel ifadesi

$$rot\vec{A} = [(\nabla_{\perp} + \vec{e}_z \partial_z) \times (\vec{A} + \vec{e}_z A_z)] = [\nabla_{\perp} \times \vec{A}] + [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] A_z + \partial_z [\vec{e}_z \times \vec{A}]$$

şeklinde son halinde elde edilir. Söz konusu işlemler (2.11) üzerinde uygulanarak

$$\begin{aligned}
rot\vec{H} &= [\nabla_{\perp} \times \vec{H}] + [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] H_z + \partial_z [\vec{e}_z \times \vec{H}] = \varepsilon_0 \partial_t \{ \varepsilon \vec{E} + \vec{J} \} + \vec{e}_z \{ \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon E_z + J_z \} \\
-rot\vec{E} &= -[\nabla_{\perp} \times \vec{E}] + [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] E_z + \partial_z [\vec{E} \times \vec{e}_z] = \mu_0 \partial_t \{ \mu \vec{H} + \vec{I} \} + \vec{e}_z \{ \mu_0 \partial_t \mu H_z + I_z \}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

denklemleri bulunur. (2.13)'ün ilk ve ikinci denklemleri  $\vec{e}_z$  ile skaler olarak çarpılarak, rotasyonel ifadelerinin dikey kesit üzerine olan izdüşümleri sırası ile

$$\begin{aligned}
\vec{e}_z rot\vec{H} &= \vec{e}_z [\nabla_{\perp} \times \vec{H}] = \{ \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon E_z + J_z \} \\
-\vec{e}_z rot\vec{E} &= -\vec{e}_z [\nabla_{\perp} \times \vec{E}] = \{ \mu_0 \partial_t \mu H_z + I_z \}
\end{aligned} \tag{2.14.a}$$

$$\begin{aligned}
[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] H_z + \partial_z [\vec{e}_z \times \vec{H}] &= \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon \vec{E} + \vec{J} \\
[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] E_z + \partial_z [\vec{E} \times \vec{e}_z] &= \mu_0 \partial_t \mu \vec{H} + \vec{I}
\end{aligned} \tag{2.14.b}$$

şeklinde bulunur. (2.11)'in ikinci denklemi ile (2.14.b) denklemleri  $\vec{H}_z = H_z(\vec{r}, z, t)$  ile ilgili olarak denklem seti şeklinde düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] H_z &= \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon \vec{E} + \partial_z [\vec{H} \times \vec{e}_z] + \vec{J} & (a) \\ \mu_0 \partial_z (\mu H_z) &= -\mu_0 \mu \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} + g & (b) \\ \mu_0 \partial_t (\mu H_z) &= \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \vec{E}] - I_z & (c) \end{aligned} \quad (2.15)$$

seti elde edilir. (2.15) denklemlerinin elde edilmesinde  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ ,  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ ,  $[\vec{A} \times \vec{B}] \cdot \vec{C} = [\vec{B} \times \vec{C}] \cdot \vec{A} = [\vec{C} \times \vec{A}] \cdot \vec{B}$  bağıntıları kullanılmıştır.

(2.15) denklemine benzer şekilde (2.10), (2.14.a)'nın birinci ve (2.14.b)'nin ikinci denklemleri kullanılarak  $E_z = E_z(\vec{r}, z, t)$  ile ilgili olarak

$$\begin{aligned} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] E_z &= \partial_z [\vec{e}_z \times \vec{E}] + \mu_0 \partial_t \mu \vec{H} + \vec{I} & (a) \\ \varepsilon_0 \partial_t (\varepsilon E_z) &= \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{e}_z] - J_z & (b) \\ \varepsilon_0 \partial_z (\varepsilon E_z) &= \rho - \varepsilon_0 \varepsilon \nabla_{\perp} \cdot \vec{E} & (c) \end{aligned} \quad (2.16)$$

denklem takımı elde edilir.

### 2.2.3. İkinci Dereceden Diferansiyel Denklem Sisteminin Eldesi

(2.15.a) ve (2.16.a) denklemlerinde  $E_z$  ve  $H_z$  görülmektedir. Aynı denklemlerin (b) ve (c) ifadeleri ile  $E_z$  ve  $H_z$  yok edilmeye çalışılsın. Bu amaçla  $[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] H_z = \vec{F}_H$  olarak gösterilirse (2.15.a) denklemi  $\vec{F}_H = \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon \vec{E} + \partial_z [\vec{H} \times \vec{e}_z] + \vec{J}$  biçiminde gösterilebilir.  $\vec{F}_H$  üzerine  $\mu_0 \partial_z \mu$  operatörü uygulanırsa  $\mu_0 \partial_z \mu [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] H_z = \mu_0 \partial_z \mu \vec{F}_H$  elde edilir. Burada  $\mu$  bir sabit olup  $[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z]$  operatörü yalnızca enlemsel koordinatlar üzerinde etkili olacağından  $\mu_0 \partial_z \mu [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] H_z = [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \mu_0 \partial_z (\mu H_z)$  biçimi elde edilebilir. Buna göre

$$[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \{ \mu_0 \partial_z (\mu H_z) \} = \mu_0 \partial_z \{ \mu \vec{F}_H \} \quad (2.17.a)$$

bulunur. (2.15.b) denklemi yardımı ile (2.17.a) denklemi

$$[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \{ -\mu_0 \mu \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} + g \} H_z = \mu_0 \partial_z \{ \mu \vec{F}_H \}$$

şeklinde elde edilir. (2.17.a) 'nın sol yanı tekrar düzenlenerek

$$\begin{aligned} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \{ -\mu_0 \mu \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} + g \} H_z &= \mu_0 \mu [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} + [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] g = \mu_0 \partial_z \{ \mu \vec{F}_H \} \\ \Rightarrow [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} &= \mu^{-1} \partial_z \{ \mu \vec{F}_H \} + (\mu_0 \mu)^{-1} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} g] \end{aligned} \quad (2.17.b)$$

elde edilir.  $[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] H_z = \vec{F}_H$  denklemi üzerine benzer biçimde  $\mu_0 \partial_t \mu$  uygulanarak

$$[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \{ \mu_0 \partial_t (\mu H_z) \} = \mu_0 \partial_t \{ \mu \vec{F}_H \} \quad (2.18)$$

ifadesi elde edilir. Buradan (2.15.c) denklemi ile

$$[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \{ \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}] - I_z \} = \mu_0 \partial_t \{ \mu \vec{F}_H \}$$

bulunur.  $\phi = \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}]$  gösterilimi ile (2.18) denklemi

$$\begin{aligned} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \{ \phi - I_z \} &= [\nabla_{\perp} \phi \times \vec{e}_z] - [\nabla_{\perp} I_z \times \vec{e}_z] = \mu_0 \partial_t \{ \mu \vec{F}_H \} \\ \Rightarrow [\nabla_{\perp} \phi \times \vec{e}_z] &= \mu_0 \partial_t \{ \mu \vec{F}_H \} + [\nabla_{\perp} I_z \times \vec{e}_z] \end{aligned} \quad (2.19)$$

biçimi bulunur. (2.19) denklemi  $\vec{e}_z$  birim vektörü ile vektörel olarak çarpılarak

$$\vec{e}_z \times \{ [\nabla_{\perp} \phi \times \vec{e}_z] = \mu_0 \partial_t \{ \mu \vec{F}_H \} + [\nabla_{\perp} I_z \times \vec{e}_z] \}$$



$$\nabla_{\perp}\phi = \mu_0\partial_t \left\{ \mu \left\{ \vec{e}_z \times \vec{F}_H \right\} + \nabla_{\perp}I_z \right\} \quad (2.20)$$

elde edilir. Bu işlem sırasında  $\vec{e}_z \times [\nabla_{\perp}\phi \times \vec{e}_z] = (\vec{e}_z\vec{e}_z)\nabla_{\perp}\phi - \vec{e}_z(\vec{e}_z\nabla_{\perp}\phi) = \nabla_{\perp}\phi$  özelliği kullanılmıştır. Burada  $\vec{e}_z$  ve  $\nabla_{\perp}$  birbirine diktir. (2.20) denkleminin eldesinde (2.15) denkleminin eldesinde kullanılan skaler  $\phi$

$$\phi = \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}] = [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{E} = -[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}$$

biçiminde düzenlenerek

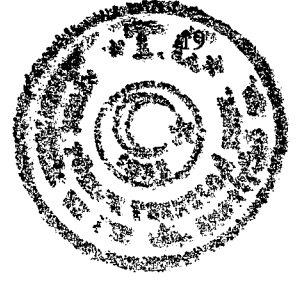
$$\nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E} = -\mu_0\partial_t \left\{ \mu \left\{ \vec{e}_z \times \vec{F}_H \right\} \right\} - \nabla_{\perp}I_z \quad (2.21)$$

bulunur. Böylece (2.18) ve (2.21) denklemleri ile

$$\left( \begin{array}{l} \varepsilon_0^{-1} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} \\ \mu_0^{-1} \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \mu^{-1} \partial_z \left\{ \mu \varepsilon_0^{-1} \vec{F}_H \right\} + (\varepsilon_0 \mu_0 \mu)^{-1} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} g] \\ -\partial_t \left\{ \mu \left\{ \vec{e}_z \times \vec{F}_H \right\} \right\} - \mu_0^{-1} \nabla_{\perp} I_z \end{array} \right) \quad (2.22)$$

sistemi bulunur. (2.16.a)'nın sağ kısmı  $\vec{F}_E = \partial_z [\vec{e}_z \times \vec{E}] + \mu_0\partial_t (\mu\vec{H}) + \vec{I}$  biçiminde gösterilsin. Daha önce  $\vec{F}_H$  denkleminde uygulanan işlemler  $\vec{F}_E$  denkleminde uygulanarak (2.16.b) denklemini ile  $E_z$  yok edilirse  $\nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H} = -\varepsilon_0\partial_t \left\{ \varepsilon [F_E \times \vec{e}_z] \right\} - \nabla_{\perp}J_z$  bulunur. Aynı biçimde (2.16.c) ile  $[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot \vec{E} = \varepsilon^{-1}\partial_z (\varepsilon\vec{F}_E) + (\varepsilon_0\varepsilon)^{-1} [\nabla_{\perp}\rho \times \vec{e}_z]$  bağıntısı bulunur.  $\vec{F}_E$  ile ilgili elde edilen son iki denklem yeniden düzenlenerek

$$\left( \begin{array}{l} \varepsilon_0^{-1} \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H} \\ \mu_0^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot \vec{E} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} -\partial_t \left\{ \varepsilon [F_E \times \vec{e}_z] \right\} - \nabla_{\perp}J_z \\ \varepsilon^{-1} \partial_z (\varepsilon\mu_0^{-1} \vec{F}_E) + (\varepsilon_0\mu_0\varepsilon)^{-1} [\nabla_{\perp}\rho \times \vec{e}_z] \end{array} \right) \quad (2.23)$$



sistemi bulunur.

#### 2.2.4. Sınır Koşulları

(2.2) denklemindeki sınır koşulları dalga kılavuzları için  $\vec{\mathcal{H}}_{norm}|_L = 0$ ,  $\vec{\mathcal{E}}_{teğ}|_L = 0$  şeklinde ele alınarak

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}_{norm}|_L &= (\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{H}})|_L = (\vec{n} \cdot (\vec{H} + \vec{e}_z H_z))|_L = (\vec{n} \cdot \vec{H})|_L = 0 \\ \vec{\mathcal{E}}_{teğ}|_L &= (\vec{l} \cdot \vec{\mathcal{E}})|_L = (\vec{l} \cdot (\vec{E} + \vec{e}_z E_z))|_L = (\vec{l} \cdot \vec{E})|_L = E_z|_L = 0\end{aligned}\quad (2.24)$$

biçiminde düzenlenebilir. Sınır koşullarının enlemsel alan bileşenleri şeklinde ifade edilebilmesi için  $J_z(\vec{e}_z, z, t)|_L = 0$  ve  $\rho(\vec{e}_z, z, t)|_L = 0$  olduğu göz önüne alınarak (2.16.b) ve (2.16.c) denklemleri  $\varepsilon_0 \partial_t (\varepsilon E_z) = \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{e}_z]$  ve  $\varepsilon_0 \partial_z (\varepsilon E_z) = -\varepsilon_0 \varepsilon \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}$  biçimini alır. Bu denklemlerde (2.24)'de bulunan  $E_z|_L = 0$  ifadesi yerine konulursa

$$\nabla_{\perp} \cdot (\vec{H} \times \vec{e}_z)|_L = 0, \quad (\nabla_{\perp} \cdot \vec{E})|_L = 0 \quad (2.25)$$

bulunur.

#### 2.2.5. Dalga-Sınır Operatörü (DSO)

(2.22) denkleminin sol tarafı 4'e 4'lük bir diferansiyel operatör ve 4 elemanlı enlemsel vektör biçiminde

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_0^{-1} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} \\ \mu_0^{-1} \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_0^{-1} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \\ \mu_0^{-1} \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \hat{W}_H X \quad (2.26)$$



gösterilebilir. (2.26) ifadesinde  $O$ ,  $2$ 'ye  $2$ 'lik sıfır matrisini  $X$  ise,  $X = \text{col}(\vec{E}, \vec{H})$  biçimini göstermektedir.  $X$ 'in gösteriliminde ki elemanlar  $\vec{E}$  ve  $\vec{H}$  vektörlerinin dalga kılavuzunun  $S$  domeni üzerindeki izdüşümlerini tanımlar.  $\hat{W}_H$  operatörü açık  $S$  domeni üzerinde tanımlıdır. Dolayısı ile  $S$  domeninin  $L$  sınırında (2.24) ile verilen sınır koşulları dikkate alınmalıdır. Bu nedenle kapalı  $S$  domeninde etkili olacak biçimde  $\hat{W}_H$  operatörü,  $W_H$  operatörü biçiminde düzenlenecek olursa

$$W_H = \begin{cases} \hat{W}_H X & r \in S \\ \left( \vec{n} \cdot \vec{H} \right) \Big|_L = 0, \left( \vec{l} \cdot \vec{E} \right) \Big|_L = 0 & r \in L \end{cases} \quad (2.27)$$

bulunur. Benzer şekilde (2.23) denkleminin sol tarafı  $4$ 'e  $4$ 'lük bir diferansiyel operatör ve  $4$  elemanlı enlemsel vektör biçiminde düzenlenerek

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_0^{-1} \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H} \\ \mu_0^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot \vec{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \varepsilon_0^{-1} \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \\ \mu_0^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \hat{W}_E X \quad (2.28)$$

bulunur.  $\hat{W}_E$  sınır koşulları ile kapalı  $S$  domeni için yeniden düzenlenirse

$$W_E = \begin{cases} \hat{W}_E X & r \in S \\ \left( \vec{n} \cdot \vec{H} \right) \Big|_L = 0, \left( \vec{l} \cdot \vec{E} \right) \Big|_L = 0 & r \in L \end{cases} \quad (2.29)$$

ifadesi elde edilir. Böylece Maxwell denklemlerinden  $W_H$  ve  $W_E$  notasyonu ile gösterilen ve sadece enlemsel koordinatlar üzerinde etkili olan ve dalga sınır operatörü (DSO) adı verilen iki adet operatör elde edilmiştir. Daha sonra her iki operatörün ayrı ayrı kendine özdeş olduğunun ispat edilmesi ile enlemsel koordinatlara bağlı biçimde DSO'nun özvektör kümesi elde edilmeye çalışılacaktır. Böylece DSO'nun çözüm uzayında bir baz oluşturduğunun gösterilmesi ile elektromagnetik alan ifadelerinin  $z$  koordinat ve  $t$  zamana bağlı özdeğerler cinsinden ifade edilmesi sonucu baz elemanları üzerinden enlemsel ve boylamsal koordinatlara bağlı biçimde Maxwell denklemlerinin izdüşümleri ile bilinmeyen skaler katsayılar için yeni bir denklem sistemi elde edilmiş olacaktır.

## 3. DSO DOMENİNDE OLUŞAN BAZLAR

### 3.1. Operatör Formundaki Özdeğer Problemi

#### 3.1.1. DSO'nun Domeni

Maxwell denklemlerinden elde edilen  $W_E$  ve  $W_H$  operatörleri 4 elemanlı  $\vec{X} \equiv \vec{X}(\vec{r}, z, t)$  elektromagnetik alan bileşenlerinin sınır koşulları altında yalnızca enlemsel koordinatları üzerine etki ederler. Bu durum kolaylık açısından  $(z, t)$  gösterilmeksizin 4 elemanlı  $\vec{X}(\vec{r})$  biçiminde gösterilecektir.  $\vec{r}$  kapalı  $S$  domeninde bir arguman olmak üzere  $\vec{X}(\vec{r})$  vektör fonksiyonları açık  $S$  domeninde iki kez türetilmeli, dalga kılavuzunun sınır koşullarını ve (2.4) denklemini sağlamalıdır. Bu tür bir fonksiyon sınıfı

$$\vec{X}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad \vec{r} \in S; \quad \begin{matrix} \vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0 \end{matrix}, \quad \vec{r} \in L \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece (3.1) ile ifade edilen fonksiyonların tanım sınıfı kısıtlanmış olur. Bu durumu açıklayabilmek için (2.4) denklemi enlemsel ve boylamsal koordinatlar biçimine ayrılırsa

$$\int_{S'} (\epsilon_0 \vec{E} \vec{E}^* + \mu_0 \vec{H} \vec{H}^*) ds \equiv \int_{S'} (\epsilon_0 \vec{E} \vec{E}^* + \mu_0 \vec{H} \vec{H}^*) ds + \int_{S'} (\epsilon_0 E_z E_z^* + \mu_0 H_z H_z^*) ds < \infty \quad (3.2)$$

bulunur. (3.2) denkleminde vektörler skaler çarpılmakta olup “\*” işareti kompleks konjuge’yi tanımlar ve  $S' \subset \bar{S}$  biçimindedir. (3.2)’deki ilk integral (3.1)deki gibi 4 elemanlı vektörler için

$$\langle \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle = \int_{S'} (\epsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \mu_0 \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) ds \quad (3.3)$$

biçiminde bir iç çarpım tanımlar. (3.3) ifadesinde  $X_1$  ve  $X_2$ ; enlemsel koordinatların herhangi bir vektör fonksiyonları çifti olup açık  $S$  domeninde değişir ve domenin sınır koşullarını sağlar. Bu durumda  $X_1$  ve  $X_2$  fonksiyonları

$$\begin{aligned} \vec{X}_1(\vec{r}) &= \begin{pmatrix} \vec{E}_1(\vec{r}) \\ \vec{H}_1(\vec{r}) \end{pmatrix}, \vec{r} \in S & \vec{l} \cdot \vec{E}_1(\vec{r}) &= 0 & \vec{r} \in L \\ & & \vec{n} \cdot \vec{H}_1(\vec{r}) &= 0 & \\ \vec{X}_2(\vec{r}) &= \begin{pmatrix} \vec{E}_2(\vec{r}) \\ \vec{H}_2(\vec{r}) \end{pmatrix}, \vec{r} \in S & \vec{l} \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) &= 0 & \vec{r} \in L \\ & & \vec{n} \cdot \vec{H}_2(\vec{r}) &= 0 & \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak yazılabilir. (3.3) ifadesi bir iç çarpım olarak  $W_E$  ve  $W_H$  operatörlerin domeninde “Hilbert uzayını” tanımlar. Söz konusu fonksiyonel uzay, sonlu  $\bar{S}$  domeninde 4 elemanlı vektörlerin yer aldığı iki boyutlu Hilbert uzayı olarak  $L^4(V)$  şeklinde gösterilebilir.

### 3.1.2. DSO'nun Kendine Özdeşliği ve Özdeğer Problemi

$\bar{S}$  domenine yerleştirilmiş  $L'$  konturu tanımlansın.  $\bar{S}$  domeni  $L$  sınırına yakın fakat hiçbir zaman  $L$  sınırını kesmeyen bir özelliğe sahip olsun. Bu nedenle daha önce tanımlanmış olan  $\hat{W}_E$  ve  $\hat{W}_H$  diferansiyel işlemleri  $L$  ile sınırlanmış  $\bar{S}$  kapalı domeninde tanımlıdır.

#### - $W_H$ Operatörünün Kendine Özdeşliği

$W_H$  operatörünün kendine özdeşliğinin ispatı için (3.3) ve (2.26) bağıntıları ile

$$\langle \hat{W}_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle = \frac{1}{S'} \int_{S'} \left[ \vec{E}_2^* [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1 + \vec{H}_2^* \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_1 \right] ds \quad (3.5.a)$$

$$\langle \vec{X}_1, \hat{W}_H \vec{X}_2 \rangle = \frac{1}{S'} \int_{S'} \left[ \vec{E}_1 [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_2 + \vec{H}_1 \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_2 \right] ds \quad (3.5.b)$$

ifadeleri elde edilir. (3.5.a) ve (3.5.b) denklemlerinde düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} - \vec{E}_2^* \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1 &= \vec{E}_2^* \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] (\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1) = \vec{E}_2^* \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1)] \\ &= [\vec{E}_2^* \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1) = -[\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1 \end{aligned}$$

$$- H_2^* \cdot \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_1 = -\vec{H}_2^* \cdot \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{E}_1 = -H_2^* \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_1]$$

$$- \vec{E}_1 \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_2^* = -[\vec{e}_z \times \vec{E}_1] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_2^*$$

$$- \vec{H}_1 \cdot \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_2^* = -\vec{H}_1 \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*]$$

bulunur. Yapılan düzenlemeler (3.5.a) ve (3.5.b) denklemlerinde yerine konulursa

$$\langle \hat{W}_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle' = -\frac{1}{S'} \int_S' [[\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1 + H_2^* \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_1]] ds \quad (3.6.a)$$

$$\langle \vec{X}_1, \hat{W}_H \vec{X}_2 \rangle' = -\frac{1}{S'} \int_S' [[\vec{e}_z \times \vec{E}_1] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_2^* + \vec{H}_1 \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*]] ds \quad (3.6.b)$$

bulunur. (3.6.a) denklemi (3.6.b)'den çıkartılacak olursa

$$\begin{aligned} &\langle \hat{W}_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle' - \langle \vec{X}_1, \hat{W}_H \vec{X}_2 \rangle' = \\ &= \frac{1}{S'} \int_S' ([\vec{e}_z \times \vec{E}_1] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_2^* - H_2^* \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_1]) ds \\ &+ \frac{1}{S'} \int_S' (\vec{H}_1 \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*] - [\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1) ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

denklemi elde edilir. İki boyutlu Gauss denklemi kullanılarak bulunabilen aşağıdaki bağıntı göz önüne alınsın.

$$\frac{1}{S'} \int_S (\vec{A} \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{A}) ds = \frac{1}{S'} \oint_L \left\{ (\vec{n}' \cdot \vec{A})(\nabla_{\perp} \cdot \vec{B}) - (\vec{n}' \cdot \vec{B})(\nabla_{\perp} \cdot \vec{A}) \right\} dl \quad (3.8)$$

burada  $\vec{n}'$ ,  $L'$  konturundan dışarıya normal vektördür. (3.8) ile (3.7) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \langle \hat{W}_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle' - \langle \vec{X}_1, \hat{W}_H \vec{X}_2 \rangle' = \\ & = \frac{1}{S'} \int_L \left\{ (\vec{n}' \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_1]) (\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_2^*) - (\vec{n}' \cdot \vec{H}_2^*) (\nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_1]) \right\} dl \\ & + \frac{1}{S'} \int_L \left\{ (\vec{n}' \cdot \vec{H}_1) (\nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*]) - (\vec{n}' \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*]) (\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1) \right\} dl \end{aligned} \quad (3.9)$$

bulunur. (3.9) denklemini

$$\vec{n}' \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_1] = [\vec{n}' \times \vec{e}_z] \cdot \vec{E}_1 = \vec{l}' \cdot \vec{E}_1 \quad , \quad \vec{n}' \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*] = [\vec{n}' \times \vec{e}_z] \cdot \vec{E}_2^* = \vec{l}' \cdot \vec{E}_2^*$$

bağıntıları yardımı ile yeniden düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned} & \langle \hat{W}_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle' - \langle \vec{X}_1, \hat{W}_H \vec{X}_2 \rangle' = \\ & = \frac{1}{S'} \int_L \left\{ (\vec{l}' \cdot \vec{E}_1) (\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_2^*) - (\vec{n}' \cdot \vec{H}_2^*) (\nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_1]) \right\} dl \\ & + \frac{1}{S'} \int_L \left\{ (\vec{n}' \cdot \vec{H}_1) (\nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}_2^*]) - (\vec{l}' \cdot \vec{E}_2^*) (\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_1) \right\} dl \end{aligned} \quad (3.10)$$

bulunur. Burada  $\vec{l}'$  vektörü  $L'$  konturuna teğet olan birim vektör olup çoklu bölgeler için  $\vec{l}'$  biçiminde düşünülebilir. (3.10) denklemi limit durumunda ( $L' \rightarrow L$ ) iken ( $\hat{W}_H \rightarrow W_H$ ) olup, sınırdaki değerlerde hesaba katılarak

$$\lim_{L' \rightarrow L} \left\{ \langle \hat{W}_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle' - \langle \vec{X}_1, \hat{W}_H \vec{X}_2 \rangle' \right\} = \langle W_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle - \langle \vec{X}_1, W_H \vec{X}_2 \rangle$$

elde edilir.  $\vec{l}' \cdot \vec{E}_1 = \vec{l}' \cdot \vec{E}_2^* = 0$  ve  $\vec{n}' \cdot \vec{H}_1 = \vec{n}' \cdot \vec{H}_2^* = 0$  sınır koşulları (3.10) denklemi tarafından sağlanmalıdır. Buna göre (3.10) deki integraller tümü ile sıfır olarak

$$\langle W_H \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle - \langle \vec{X}_1, W_H \vec{X}_2 \rangle = 0 \quad (3.11)$$

bağıntısı elde edilir. Böylece çözüm uzayında baz tanımlamaları için bize anahtar bilgiyi veren  $W_H$  operatörünün kendine özdeşliği ispat edilmiş olmaktadır.

### - $W_E$ Operatörünün Kendine Özdeşliği

$W_H$  için yapılan işlemler  $W_E$  operatörü içinde geçerlidir. (2.28) denklemi ve (3.3) iç çarpımı ile  $W_E$  operatörü için

$$\langle \hat{W}_E X_1, X_2 \rangle = \frac{1}{S'} \int_{S'} [\vec{E}_2^* \cdot \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H}_1 + \vec{H}_2^* \cdot [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_1] ds \quad (3.12.a)$$

$$\langle X_1, \hat{W}_E X_2 \rangle = \frac{1}{S'} \int_{S'} [\vec{E}_1 \cdot \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H}_2 + \vec{H}_1 \cdot [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_2^*] ds \quad (3.12.b)$$

bağıntıları elde edilebilir.  $W_E$  operatörünün kendine özdeşliğin ispatı için (3.12.a) ve (3.12.b) denklemlerinde aşağıdaki gibi düzenlemeler yapılarak

$$- \vec{E}_2^* \cdot \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H}_1 = -\vec{E}_2^* \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H}_1 \times \vec{e}_z]$$

$$- \vec{H}_2^* \cdot [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_1 = -[\vec{H}_2^* \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_1$$

$$- \vec{E}_1 \cdot \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H}_2^* = -\vec{E}_1 \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H}_2^* \times \vec{e}_z]$$

$$- \vec{H}_1 \cdot [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_2^* = -[\vec{H}_1 \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_2^*$$

bulunur. Yapılan düzenlemeler tekrar (3.12.a) ve (3.12.b) denklemlerinde yerine konularak (3.12.a) denklemi (3.12.b) denkleminde çıkarılacak olursa

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{W}_E X_1, X_2 \rangle - \langle X_1, \hat{W}_E X_2 \rangle \\
&= \frac{1}{S'} \int_S \left\{ \vec{E}_1 \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H}_2^* \times \vec{e}_z] - [\vec{H}_2^* \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_1 \right\} ds \\
&+ \frac{1}{S'} \int_S \left\{ [\vec{H}_1 \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_2^* - \vec{E}_2^* \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H}_1 \times \vec{e}_z] \right\} ds
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Limit durumunda (3.8) ve  $[\vec{n} \times \vec{e}_z] = \vec{l}$  bağıntısı ile (3.13) denkleminde (2.25) ile verilen sınır koşulları nedeni ile integral ifadeleri sıfır olacaktır. Böylece

$$\langle W_E X_1, X_2 \rangle - \langle X_1, W_E X_2 \rangle = 0$$

$W_E$  operatörünün de kendine özdeşliği ispat edilmiştir.

### 3.2. Eş Vektör ve Eş Skaler Sınır Özdeğer Problemi

$W_E$  ve  $W_H$  operatörleri (3.1) ile tanımlanan aynı kapalı  $\bar{S} = S + L$  domeninde ki vektörler üzerinde etkili olup domenlerinde kendine özdeş olmaları nedeni ile Hilbert uzayında birer özvektör setine sahiptirler.  $W_E$  ve  $W_H$  operatörlerinin özvektörleri, operatör özdeğer probleminin çözümleri olup

$$W_E \vec{Z}_n(\vec{r}) = q_n \vec{Z}_n(\vec{r}), \quad W_H \vec{Y}_m(\vec{r}) = p_m \vec{Y}_m(\vec{r}) \tag{3.14}$$

biçimindedirler. Burada  $p_m$  ve  $q_n$  özdeğerleri,  $\vec{Y}_m(\vec{r})$  ve  $\vec{Z}_n(\vec{r})$  özvektörleri tanımlarlar.  $W_E$ ,  $W_H$  ve  $p_m$ ,  $q_n$ 'in bazı özellikleri aşağıda verilmiştir [Aksoy, 1999]

-  $p_m$  ve  $q_n$  reeldir.

-  $p_m$  ve  $q_n$ 'in spektrumları ayırık olup her birinin sonsuzda yerleşimi yoğunlaşan tek bir noktası vardır.

-  $p_m \neq 0$  ve  $q_n \neq 0$  biçimindeki özdeğerler çakışabilir. Fakat çakışmanın gücü her zaman sonludur. Bu durum aynı özdeğere karşı düşen lineer bağımsız sonlu sayıda özvektör olduğunu gösterir. Söz konusu özvektörler dikleştirilebilir ve normalleştirilebilirler.

-  $p_m \neq 0$ ,  $q_n \neq 0$  gösteriliminde  $m$  ve  $n$  artan  $p_m$  ve  $q_n$  değerlerini olabilecek çakışmaları da içine alacak biçimde numaralandırmak amacı ile kullanılmaktadır.

-  $W_E$  ve  $W_H$  operatörleri  $p_0 = 0$  ve  $q_0 = 0$  biçiminde 0 özdeğerlerine sahiptirler.  $p_0 = 0$  ve  $q_0 = 0$  özdeğerleri  $p_m \neq 0$  ve  $q_n \neq 0$  özdeğerlerinden farklı biçimde sonsuz çakışma gücüne sahiptirler.

- Ayrık özdeğerlere karşı gelen her bir özvektör (3.3) bağıntısını sağlayacak biçimde birbirine diktir.

### 3.2.1. $W_H$ Operatörü için Sınır Özdeğer Problemi

(3.14) denklemi (3.1) gösterilimi yardımı ile yeniden düzenlenerek

$$\vec{Y}_m(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{E}_m(\vec{r}) \\ \vec{H}_m(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \vec{l} \cdot \vec{E}_m(\vec{r})|_L &= 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{H}_m(\vec{r})|_L &= 0 \end{aligned} \Rightarrow W_H \vec{Y}_m(\vec{r}) = p_m \vec{Y}_m(\vec{r}) \quad (3.15)$$

şekli elde edilir.  $W_H$  operatörünün (2.27) denklemi ile verilen ifadesi ele alınarak (3.15) denklemi düzenlenirse

$$\varepsilon_0^{-1} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_m(\vec{r}) = p_m \vec{E}_m(\vec{r}), \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_m(\vec{r})|_L = 0 \quad (3.16.a)$$

$$\mu_0^{-1} \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_m(\vec{r}) = p_m \vec{H}_m(\vec{r}), \quad \vec{l} \cdot \vec{E}_m(\vec{r})|_L = 0 \quad (3.16.b)$$

bulunur.



### - $p_m \neq 0$ Özdeğerlerinin Çakışmaları

(3.16.a) ve (3.16.b) denklemlerinin çözümü genel anlamda kompleks değerli bir çift fonksiyon biçimindedir. Öyleki bu çözüm

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \vec{E}'_m(\vec{r}) + i\vec{E}''_m(\vec{r}), \quad \vec{H}_m(\vec{r}) = \vec{H}'_m(\vec{r}) + i\vec{H}''_m(\vec{r})$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $i = \sqrt{-1}$  ve  $p_m \neq 0$  olacak biçimde ele alınmıştır.  $p_m \neq 0$  olacak biçimde, kompleks konjuge  $\vec{E}_m^*(\vec{r}) = \vec{E}'_m(\vec{r}) - i\vec{E}''_m(\vec{r})$  ve  $\vec{H}_m^*(\vec{r}) = \vec{H}'_m(\vec{r}) - i\vec{H}''_m(\vec{r})$  ifadeleri de aynı özdeğerleri karşılayacak biçimde bir başka çözümü oluşturmaktadır. Bu durum  $p_m \neq 0$  özdeğerlerinin 4 elemanlı özvektörlerin bir çiftine sahip olduğunu gösterir. Bu durumda özvektörler

$$\vec{Y}_m(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{E}_m(\vec{r}) \\ \vec{H}_m(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}_m^*(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{E}_m^*(\vec{r}) \\ \vec{H}_m^*(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

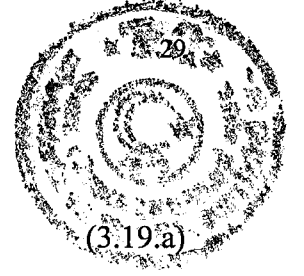
biçiminde ifade edilebilirler. Bu durumda aynı özdeğere karşılık gelen özvektörler

$$\vec{Y}'_m = \frac{1}{2}(\vec{Y}_m + \vec{Y}_m^*) = \begin{pmatrix} \vec{E}'_m \\ \vec{H}'_m \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}''_m = \frac{1}{2}(\vec{Y}_m - \vec{Y}_m^*) = i \begin{pmatrix} \vec{E}''_m \\ \vec{H}''_m \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

formunda gösterilebilirler.  $p_m = 0$  ve  $p_m \neq 0$  durumları için (3.15) denklemi açısından analizler ayrı ayrı yapılmalıdır.

### - $p_m \neq 0$ iken Özdeğer ve Özvektörlerin Simetrikliği

$\mathcal{W}_H$ 'in tüm özdeğerleri  $p_m \neq 0$  olmak üzere  $p_o = 0$  ile ilgili olarak  $Op$  reel eksene göre simetriklerdir. Simetrik özdeğerler  $p_{+m} > 0$  olmak üzere  $p_{-m} = -p_{+m} < 0$  biçiminde ifade edilebilirler.  $p_{+m} > 0$  özdeğerleri



$$\vec{Y}_{+m} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{+m} \\ \vec{H}_{+m} \end{pmatrix}, \vec{Y}_{+m}^* = \begin{pmatrix} \vec{E}_{+m}^* \\ \vec{H}_{+m}^* \end{pmatrix} \quad (3.19.a)$$

özvektörlerini karşılama üzere  $p_{-m}$  özdeğerleri

$$\vec{Y}_{-m} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{+m} \\ -\vec{H}_{+m} \end{pmatrix}, \vec{Y}_{-m}^* = \begin{pmatrix} \vec{E}_{+m}^* \\ -\vec{H}_{+m}^* \end{pmatrix} \quad (3.19.b)$$

özvektörlerini karşılar. Bu durumu ispat için ilk sınır değer problemi ele alınırsa

$$\epsilon_0^{-1} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_{+m} = p_{+m} \vec{E}_{+m}, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_{+m} \Big|_L = 0 \quad (3.20.a)$$

$$\mu_0^{-1} \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_{+m} = p_{+m} \vec{H}_{+m}, \quad \vec{l} \cdot \vec{E}_{+m} \Big|_L = 0$$

elde edilir. Burada ilk ve ikinci satır  $-1$  ile çarpılıp yeniden düzenlenerek

$$\epsilon_0^{-1} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot (-\vec{H}_{+m}) = (-p_{+m}) \vec{E}_{+m}, \quad \vec{n} \cdot (-\vec{H}_{+m}) \Big|_L = 0 \quad (3.20.b)$$

$$\mu_0^{-1} \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_{+m} = (-p_{+m}) (-\vec{H}_{+m}), \quad \vec{l} \cdot \vec{E}_{+m} \Big|_L = 0$$

elde edilir. (3.20.b) denklemi tekrar  $W_H \vec{Y}_{-m} = p_{-m} \vec{Y}_{-m}$  biçiminde düzenlenecek olursa

$$\epsilon_0^{-1} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot (-\vec{H}_{+m}) = p_{-m} \vec{E}_{-m}, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_{-m} \Big|_L = 0 \quad (3.20.c)$$

$$\mu_0^{-1} \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_{+m} = p_{-m} \vec{H}_{-m}, \quad \vec{l} \cdot \vec{E}_{-m} \Big|_L = 0$$

elde edilir. (3.20.b) ve (3.20.c) kıyas edilirse  $p_{-m} = -p_{+m}$ ,  $\vec{E}_{-m} = \vec{E}_{+m}$  ve  $\vec{H}_{-m} = -\vec{H}_{+m}$  olduğu görülür.  $p_m \neq 0$  iken elde edilen simetrik özellikler  $p_{-m} = -p_{+m}$  bağıntısı yardımı ile hesaplamaları iki kez azaltacağından dolayı önemlidirler.

-  $p_m \neq 0$  iken Skaler Özdeğer Problemi

(3.20.a) vektör sınır değer problemi (2.25) sınır koşulları ile bilinmeyen  $\vec{E}_{+m}$  ve  $\vec{H}_{+m}$  vektörlerinin  $\psi_m$  gibi bir skaler aracılığı ile hesaplanabileceğini gösterir. (2.25) denklemi ile verilen sınır koşulları ele alınarak

$$\nabla_{\perp} \cdot (\vec{H}_{+m} \times \vec{e}_z) \Big|_{L_i} = 0, \quad (\nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_{+m}) \Big|_{L_i} = 0 \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.21) denklemindeki  $\vec{E}_{+m}$  ve  $\vec{H}_{+m}$  vektörleri  $\psi_m$  gibi bir skaler ile

$$\vec{E}_{+m} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z], \quad \vec{H}_{+m} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_{\perp} \psi_m \quad (3.22)$$

biçiminde ifade edilebilirler. (3.22) denklemi (3.20.a) da yerine konularak,

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon_0^{-1} \mu_0^{-1}} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi_m &= p_{+m} [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z], \quad \vec{n} \cdot \nabla_{\perp} \psi_m \Big|_L = 0 \\ \sqrt{\epsilon_0^{-1} \mu_0^{-1}} \nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z] &= p_{+m} \nabla_{\perp} \psi_m, \quad \vec{l} \cdot [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z] \Big|_L = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

ve (3.23) denkleminde sınır koşulları yeniden ele alınarak

$$\vec{n} \cdot \nabla_{\perp} \psi_m \Big|_L = \frac{\partial}{\partial n} \psi_m \Big|_L = 0, \quad \vec{l} \cdot [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z] \Big|_L = [\vec{e}_z \times \vec{l}] \cdot \nabla_{\perp} \psi_m \Big|_L = \vec{n} \cdot \nabla_{\perp} \psi_m \Big|_L = \frac{\partial}{\partial n} \psi_m \Big|_L = 0$$

bulunur. (3.23) vektör diferansiyel denklemi yeniden düzenlenerek

$$\nabla_{\perp} (\Delta_{\perp} \psi_m + p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \psi_m) = 0 \quad (3.24)$$

bulunur. Burada  $\Delta_{\perp} \equiv \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \equiv \Delta - \partial^2 / \partial z^2$  Laplacian operatörünün enlemsel koordinatlar üzerinde etkili olan kısmını göstermektedir. Gerçekte  $[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi_m = p_{+m} [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z]$  formu  $[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] (\Delta_{\perp} \psi_m) = [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] (-p_{+m} \psi_m)$  ifadesine eşit olup (3.24) denklemi elde edilebilir. (3.23) de bulunan ikinci denklem

$$[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot [\nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z] = -[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot [\nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z] = -\nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m = \Delta_{\perp} \Psi_m$$

biçiminde ele alınıp bir başka biçimde tekrar (3.24) denklemini elde edilebilir. Böylece (3.23) vektör denklemini sınır koşulları yardımı ile

$$\left( \Delta_{\perp} \Psi_m + p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \Psi_m \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \Psi_m \Big|_L = 0 \quad (3.25)$$

biçiminde Neumann sınır özdeğer problemi biçiminde  $\Psi_m$  potansiyel aracılığı ile çözülmüş olacaktır. Neumann sınır koşulunu tanımlayan fonksiyon sınıfında ki  $\{\Psi_m\}_{m=1}^{\infty}$  potansiyelleri tamamlanmış bir set olup uygun yollarla normalize edilebilir.

### - $p_m \neq 0$ iken $\Psi_m$ Potansiyelinin Tekliği

(3.22) ile verilen potansiyellerin tekliğinin ispatı için  $\vec{E}_{+m}$  ve  $\vec{H}_{+m}$ 'in ayrı ayrı  $\Psi_{m1}$  ve  $\Psi_{m2}$  potansiyelleri ile aşağıdaki gibi sağlanıyor olduğu varsayalım.

$$\vec{E}_{+m} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \Psi_{m1} \times \vec{e}_z], \quad \vec{H}_{+m} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_{\perp} \Psi_{m2} \quad (3.26)$$

(3.26) denklemini (3.20.a) denkleminde yerine konularak (3.24)'dekine benzer

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \left( \Delta_{\perp} \Psi_{m1} + p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \Psi_{m2} \right) &= 0, & \frac{\partial}{\partial n} \Psi_{m1} \Big|_L &= 0, & \frac{\partial}{\partial n} \Psi_{m2} \Big|_L &= 0 \\ \nabla_{\perp} \left( \Delta_{\perp} \Psi_{m2} + p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \Psi_{m1} \right) &= 0, & & & & \end{aligned} \quad (3.27)$$

denklemleri bulunur. (3.27) ifadeleri üzerinde yapılan düzenlemeler yardımı ile  $\Psi_{m1}$  ve  $\Psi_{m2}$  ile ilgili bir potansiyel çiftine bağlı olarak

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \left( (\Delta_{\perp} - p_{+m} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) (\Psi_{m1} - \Psi_{m2}) \right) = 0 & \quad \frac{\partial}{\partial n} (\Psi_{m1} - \Psi_{m2}) \Big|_L = 0 \\ \nabla_{\perp} \left( (\Delta_{\perp} + p_{+m} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) (\Psi_{m1} + \Psi_{m2}) \right) = 0 & \quad \frac{\partial}{\partial n} (\Psi_{m1} + \Psi_{m2}) \Big|_L = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

ifadeleri elde edilebilir. (3.28) denklemindeki ifadeler

$$\left( \Delta_{\perp} - p_{+m} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \right) (\Psi_{m1} - \Psi_{m2}) = G_m^{(-)}, \quad \left( \Delta_{\perp} + p_{+m} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \right) (\Psi_{m1} + \Psi_{m2}) = G_m^{(+)} \quad (3.29)$$

biçiminde düzenlenerek (3.27) denklemleri  $\nabla_{\perp} G_m^{(\pm)} = 0$  şeklinde gösterilebilir. (3.25)

Neumann sınır değer problemi ile beraber  $\nabla_{\perp} G_m^{(\pm)}$  gösterilimi  $S$  domeni içinde integre edilecek olursa

$$\int_S \nabla_{\perp} \Psi_k(r) \cdot \nabla_{\perp} G_m^{(\pm)}(r) ds = 0 \quad (3.30)$$

bulunur.  $\nabla_{\perp} G_m^{(\pm)} = 0$  olması (3.30) integralini sıfır yapar. Böylece  $\nabla_{\perp} \cdot (\varphi \nabla_{\perp} \psi) = \nabla_{\perp} \psi \cdot \nabla_{\perp} \varphi + \varphi \Delta_{\perp} \psi$  bağıntısı ile (3.30) integrali

$$\int_S \nabla_{\perp} \Psi_k \cdot \nabla_{\perp} G_m^{(\pm)} ds = p_k \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \int_S \Psi_k G_m^{(\pm)} ds + \oint_L G_m^{(\pm)} \frac{\partial}{\partial n} \Psi_k dl = 0 \quad (3.31)$$

şeklinde düzenlenebilir. (3.25) denklemleri ile  $-\Delta_{\perp} \Psi_m = p_{+m} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \Psi_m$  bağıntısı elde edilir. (3.31) denkleminin sağ yanındaki ikinci terim (3.25) denklemleri ile verilen sınır koşulları nedeni ile sıfır olacağından (3.31) denklemleri

$$p_k \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \int_S \Psi_k G_m^{(\pm)} ds = 0 \quad (3.32)$$

haline dönüşür.  $p_k \neq 0$  olmak üzere tamamlanmış  $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  seti için (3.32) denkleminin sağlanabilmesi için ayrı ayrı  $G_m^{(+)} = 0$  ve  $G_m^{(-)} = 0$  denklemlerinin sağlanması gereklidir. Bu durumda (3.29) ile verilen ilk denklem

$$G_m^{(-)} = (\Delta_{\perp} - p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}) (\psi_{m1} - \psi_{m2}) = 0 \quad (3.33)$$

olur. (3.33)'ün sağlanması için  $p_{+m} > 0$  iken her zaman  $\Delta_{\perp} (\psi_{m1} - \psi_{m2}) < 0$  olması gerektiğinden  $(\psi_{m1} - \psi_{m2}) = 0$  şartı geçerli olur.  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  seti tamamlanmış olduğundan  $\psi_m = \psi_{m1} = \psi_{m2}$  bağıntısı geçerli olacaktır. Böylece (3.33) denklemini

$$(\Delta_{\perp} + p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}) \psi_m = 0 \quad (3.34)$$

biçiminde ifade edilebilir. (3.34) denkleminin özdeğerlerinin davranışlarını araştırmak amacı ile  $p_0 = 0$  ve diğer durumlar için ayrı ayrı incelemeler yapılacaktır.

#### - $p_0 = 0$ olması hali

(3.25) skaler sınır özdeğer problemi  $p_0 = 0$  durumunda  $\psi_0$  için ele alınırsa

$$\Delta_{\perp} \psi_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial n} \psi_0 \right|_L = 0 \quad (3.35)$$

elde edilir.  $\psi_0$  Laplace denklemini sağladığından harmonik bir fonksiyon olup çözümü kapalı  $\bar{S} = S + L$  domeninde  $C$  gibi sabit bir sayıdan ibarettir.  $C$  sayısının 1 seçilmesi genelliği bozmayacağından dolayı  $\psi_0 = 1$  biçimde çözüm elde edilebilir.  $p_0 = 0$  özdeğeri (3.22) bağıntıları nedeni ile sıfır-değerli özvektörlere karşılık geleceğinden  $\vec{E}_0 = 0$  ve  $\vec{H}_0 = 0$  özvektörleri ile (3.14) denkleminlerindeki  $W_H$  operatörü  $W_H \vec{Y}_0(\vec{r}) = 0$  şeklinde elde edilebilir. Böylece (3.16.a.b) denklemleri

$$[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_0(\vec{r}) = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_0(\vec{r}) \Big|_L = 0 \quad (3.36)$$

$$\nabla_{\perp} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) = 0, \quad \vec{l} \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) \Big|_L = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda (3.16) problemindeki gibi birbiri ile bağımlı bir denklem takımı yerine artık birbirinden bağımsız  $\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_0(\vec{r}) = 0$  ve  $[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) = 0$  formunda yeni bir denklem takımı elde edilmiş olur. Bu denklem takımının sıfır olmayan çözümlerinin bulunabilmesi için

$$\vec{H}_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi'], \quad \vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \phi'']$$

biçiminde potansiyeller ele alınsın.  $\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}_0(\vec{r}) = 0$  ve  $[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) = 0$  ifadeleri  $\phi'$  ve  $\phi''$  değerleri ile ilişkilendirilerek

$$\left. \frac{\partial \phi'}{\partial l} \right|_L = 0 \quad \left. \frac{\partial \phi''}{\partial l} \right|_L = 0$$

şeklinde  $\phi'$  ve  $\phi''$  değerlerinin  $C'$  ve  $C''$  gibi sabitler olduğu düşünülebilir.

### 3.2.2. $W_E$ Operatörü için Sınır Özdeğer Problemi

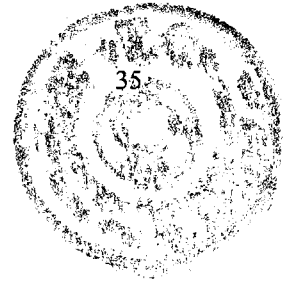
(3.14) denklemi (3.1) gösterilimi ile yeniden düzenlenerek

$$\vec{Z}_n(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{E}_n(\vec{r}) \\ \vec{H}_n(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \vec{l} \cdot \vec{E}_n(\vec{r})|_L = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{H}_n(\vec{r})|_L = 0 \end{matrix} \Rightarrow W_E \vec{Z}_n(\vec{r}) = q_n \vec{Z}_n(\vec{r}) \quad (3.37)$$

olarak elde edilebilir.  $W_E$  operatörünün (2.29) denklemi ile verilen tanımı ele alınarak (3.37) denklemi yeniden düzenlenirse aşağıdaki gibi bulunur.

$$\epsilon_0^{-1} \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H}_n(\vec{r}) = q_n \vec{E}_n(\vec{r}), \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_n(\vec{r})|_L = 0 \quad (3.38.a)$$

$$\mu_0^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_n(\vec{r}) = q_n \vec{H}_n(\vec{r}), \quad \vec{l} \cdot \vec{E}_n(\vec{r})|_L = 0 \quad (3.38.b)$$



### - $q_n \neq 0$ iken Özdeğerlerinin Çakışmaları

(3.38.a.b) denklemlerinin çözümü genel anlamda kompleks değerli bir çift fonksiyon biçimindedir. Öyleki bu çözümler

$$\vec{E}_n(\vec{r}) = \vec{E}'_n(\vec{r}) + i\vec{E}''_n(\vec{r}), \quad \vec{H}_n(\vec{r}) = \vec{H}'_n(\vec{r}) + i\vec{H}''_n(\vec{r})$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $i = \sqrt{-1}$  ve  $q_n \neq 0$  biçimindedir.  $q_n \neq 0$  olmak üzere kompleks konjuge  $\vec{E}_n^*(\vec{r}) = \vec{E}'_n(\vec{r}) - i\vec{E}''_n(\vec{r})$  ve  $\vec{H}_n^*(\vec{r}) = \vec{H}'_n(\vec{r}) - i\vec{H}''_n(\vec{r})$  ifadeleri de aynı özdeğerleri karşılayacak biçimde çözümü oluşturmaktadırlar. Bu durum  $q_n \neq 0$  özdeğerlerinin 4 elemanlı özvektörlerin bir çiftine sahip olduğunu gösterir. Kompleks ve kompleks konjuge biçiminde özvektörler

$$\vec{Z}_n(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{E}_n(\vec{r}) \\ \vec{H}_n(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_n^*(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{E}_n^*(\vec{r}) \\ \vec{H}_n^*(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

olarak ifade edilebilirler. Aynı özdeğere karşılık gelen özvektörlerde

$$\vec{Z}'_n(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{E}'_n \\ \vec{H}'_n \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}''_n(\vec{r}) = i \begin{pmatrix} \vec{E}''_n \\ \vec{H}''_n \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

şeklinde gösterilebilirler.  $q_n = 0$  ve  $q_n \neq 0$  için analizler ayrı ayrı yapılmalıdır.

### - $q_n \neq 0$ iken Özdeğer ve Özvektörlerin Simetrikliği

$\mathcal{W}_E$ 'nin tüm özdeğerleri  $q_o = 0$  özdeğeri ile ilgili olarak  $Oq$  reel ekseninde simetriklerdir. Bu nedenle özdeğerler  $q_{+n} = -q_{-n} > 0$  biçiminde ifade edilebilirler.

$q_{+n} > 0$  özdeğerleri



$$\vec{Z}_{+n} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{+n} \\ \vec{H}_{+n} \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_{+n}^* = \begin{pmatrix} \vec{E}_{+n}^* \\ \vec{H}_{+n}^* \end{pmatrix}$$

özvektörlerini karşılamak üzere  $q_{-n}$  özdeğerleri

$$\vec{Z}_{-n} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{+n} \\ -\vec{H}_{+n} \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_{-n}^* = \begin{pmatrix} \vec{E}_{+n}^* \\ -\vec{H}_{+n}^* \end{pmatrix} \quad (3.41.b)$$

özvektörlerini karşılar. Bu durum  $\vec{Y}_{+m}$  özvektörleri için daha önce yapıldığı gibi ispatlanabilir.  $q_{+n} > 0$  özdeğerlerine karşılık gelen özvektör çifti (3.18) denkleminde olduğu gibi seçilirse  $q_{+n} = -q_{-n}$  biçimindeki simetrik özdeğerler için

$$\vec{Z}_n = \begin{pmatrix} \vec{E}_n \\ -\vec{H}_n \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_n^* = i \begin{pmatrix} \vec{E}_n^* \\ -\vec{H}_n^* \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

bulunur.

### - $q_n \neq 0$ iken Skaler Özdeğer Problemi

(3.38) sınır özdeğer probleminde  $\vec{E}_n$  ve  $\vec{H}_n$  vektörleri  $\phi$  skaler potansiyeli ile

$$\vec{E}_n(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \phi], \quad \vec{H}_n(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi] \quad (3.43)$$

gösterilebilir. (3.43) ifadeleri (3.38) denkleminde yerine konularsa

$$\nabla_{\perp} (\Delta_{\perp} + q_{+n} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}) \phi = 0 \quad (3.44)$$

bulunur. (3.43) ifadeleri (3.37) denklemlerindeki sınır koşullarında yerine konularak





-  $q_0 = 0$  durumu

$q_0 = 0$  durumunda (3.48) probleminin çözümü  $\Delta_{\perp}\phi_0 = 0$  ilişkisi nedeni ile  $\phi_0 = C_0$  biçiminde olacaktır. Genelliği bozmaksızın  $C_0 = 1$  biçiminde çözüm ele alınabilir. Bu durumda  $\vec{E}_0(\vec{r}) = 0$  ve  $\vec{H}_0(\vec{r}) = 0$  olacaktır.  $q_0 = 0$  özdeğeri biçiminde sınır özdeğer problemi

$$\nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H}_0(\vec{r}) = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_0(\vec{r}) \Big|_L = 0 \quad (3.51.a)$$

$$[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) = 0, \quad \vec{l} \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) \Big|_L = 0 \quad (3.51.b)$$

biçiminde elde edilebilir. Böylece daha önce yapıldığı gibi (3.51.a.b) denklemlerinden birbirinden bağımsız

$$[\nabla_{\perp} \times \vec{e}_z] \cdot \vec{H}_0(\vec{r}) = 0, \quad \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) = 0 \quad (3.52)$$

denklemleri bulunur. (3.52) ifadeleri  $\vec{E}_0(\vec{r}) \neq 0$  ve  $\vec{H}_0(\vec{r}) \neq 0$  biçiminde sıfırdan farklı çözümlere sahiptirler. Söz konusu çözümler  $\varphi'$  ve  $\varphi''$  potansiyelleri ile

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \varphi'' \times \vec{e}_z], \quad \vec{H}_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_{\perp} \varphi' \quad (3.53)$$

biçiminde gösterilebilir. (3.53) denklemi ile verilen ifadeler (3.51.a.b) denklemleri aracılığı ile Neumann tipi sınır koşulunu

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi'(r) \Big|_L = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \varphi''(r) \Big|_L = 0 \quad (3.54)$$

biçiminde sağlarlar.



### 3.3. DSO Özvektör Setinin Ortonormalizasyonu

#### 3.3.1. $\{\vec{Y}_{\pm m}\}_{m=1}^{\infty}$ Özaltvektör Setinin Ortonormalizasyonu

$\vec{Y}_{\pm m}$  özaltvektör seti dört elemanlı olup aşağıdaki biçimde ifade edilebilir,

$$\vec{Y}_{+m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z] \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_{\perp} \Psi_m \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}_{-m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z] \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_{\perp} \Psi_m \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Ortonormalizasyon işlem adımları için (3.55) ifadeleri

$$\vec{Y}_{+m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z] \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_{\perp} \Psi_m \end{pmatrix} = \vec{Y}_m^+ + \vec{Y}_m^-, \quad (3.56.a)$$

$$\vec{Y}_{-m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z] \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_{\perp} \Psi_m \end{pmatrix} = \vec{Y}_m^+ - \vec{Y}_m^- \quad (3.56.b)$$

$$\vec{Y}_m^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}_m^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_{\perp} \Psi_m \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

biçiminde düzenlenmelidir.  $\vec{Y}_m^+$  ve  $\vec{Y}_m^-$  terimleri sırası ile saf elektrik ve saf magnetik alan terimlerini içeren vektörler olup  $\vec{Y}_m^+$  ve  $\vec{Y}_m^-$  terimleri ile  $\vec{Y}_{\pm m} = \vec{Y}_m^+ \pm \vec{Y}_m^-$

biçiminde gösterilebilir. (3.3) iç çarpım bağıntısı kullanılarak  $\vec{Y}_m^+$  ve  $\vec{Y}_m^-$  vektörlerinin farklı kombinasyonları

$$\langle \vec{Y}_{+m}, \vec{Y}_{+m} \rangle = \langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^+ \rangle + \langle \vec{Y}_m^-, \vec{Y}_m^- \rangle \quad (3.58.a)$$

$$\langle \vec{Y}_{-m}, \vec{Y}_{-m} \rangle = \langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^+ \rangle + \langle \vec{Y}_m^-, \vec{Y}_m^- \rangle \quad (3.58.b)$$

$$\langle \vec{Y}_{+m}, \vec{Y}_{-m} \rangle = \langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^+ \rangle - \langle \vec{Y}_m^-, \vec{Y}_m^- \rangle \quad (3.59.b)$$

biçiminde bulunur. (3.58) denklemlerinde bulunan  $\langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^+ \rangle$  ve  $\langle \vec{Y}_m^-, \vec{Y}_m^- \rangle$  terimleri

$$\langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^+ \rangle = \frac{1}{S} \int_S \left\{ \sqrt{\epsilon_0} \cdot 0 \cdot [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z] + \sqrt{\mu_0} \cdot 0 \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* \right\} ds \equiv 0 \quad (3.60.a)$$

$$\langle \vec{Y}_m^-, \vec{Y}_m^- \rangle = \frac{1}{S} \int_S \left\{ \sqrt{\epsilon_0} \cdot 0 \cdot [\nabla_{\perp} \psi_m^* \times \vec{e}_z] + \sqrt{\mu_0} \cdot 0 \cdot \nabla_{\perp} \psi_m \right\} ds \equiv 0 \quad (3.60.b)$$

biçiminde sıfır olurlar. Benzer biçimde  $\langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^+ \rangle$  ve  $\langle \vec{Y}_m^-, \vec{Y}_m^- \rangle$  terimleri

$$\langle \vec{Y}_m^-, \vec{Y}_m^- \rangle = \frac{1}{S} \int_S \left\{ \nabla_{\perp} \psi_m \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* \right\} ds \equiv \frac{1}{S} \int_S |\nabla_{\perp} \psi_m|^2 ds \quad (3.61.a)$$

$$\langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^+ \rangle = \frac{1}{S} \int_S \left\{ \nabla_{\perp} \psi_m \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* \right\} ds \equiv \frac{1}{S} \int_S |\nabla_{\perp} \psi_m|^2 ds \quad (3.61.b)$$

bulunur. (3.61) bağıntıları ile  $\psi_m$  potansiyeli

$$\frac{1}{S} \int_S |\nabla_{\perp} \psi_m|^2 ds = 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.62)$$

biçiminde uygun bir normalizasyon koşulu ile normalize edilebilir.  $\Psi_m$  potansiyelinin sağladığı (3.34) denklemi ile (3.62) normalizasyon koşulu

$\nabla_{\perp} \cdot (\Psi_m^* \nabla_{\perp} \Psi_m) = \nabla_{\perp} \Psi_m^* \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m + \Psi_m^* \Delta_{\perp} \Psi_m$  bağıntısı ile

$$\frac{1}{S} \int_S |\nabla_{\perp} \Psi_m|^2 ds = p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \int_S |\Psi_m|^2 ds + \oint_L \Psi_m^* \frac{\partial}{\partial n} \Psi_m dl = 1 \quad (3.63)$$

şeklinde düzenlenebilir. (3.63) denklemindeki son terim Neumann tipi sınır koşulunu sağlaması nedeni ile (3.63) denklemi

$$\langle \vec{Y}_m^-, \vec{Y}_m^- \rangle = \langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^+ \rangle = p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \int_S |\Psi_m|^2 ds = 1 \quad (3.64)$$

elde edilebilir. Böylece 4 elemanlı  $\vec{Y}_{\pm m}$  özvektörleri için  $p_{\pm m} \neq 0$  olması durumunda  $\langle \vec{Y}_m^-, \vec{Y}_m^- \rangle = \langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^+ \rangle = 1$ ,  $\langle \vec{Y}_m^+, \vec{Y}_m^- \rangle = 0$  biçiminde ortonormallik sağlanır.

### 3.3.2. $\{\vec{Z}_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$ Özaltvektör Setinin Ortonormalizasyonu

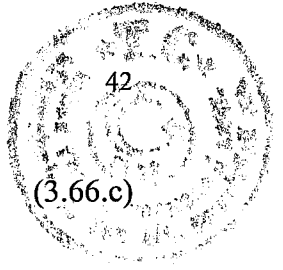
3.3.1. bölümünde ki işlemlere benzer biçimde  $\vec{Z}_{\pm n}$  özaltvektör seti

$$\vec{Z}_n^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_n^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \nabla_{\perp} \phi_n \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

biçiminde ifade edilebilir. Böylece

$$\langle \vec{Z}_{+n}, \vec{Z}_{+n} \rangle = \langle \vec{Z}_n^+, \vec{Z}_n^+ \rangle + \langle \vec{Z}_n^-, \vec{Z}_n^- \rangle \quad (3.66.a)$$

$$\langle \vec{Z}_{-n}, \vec{Z}_{-n} \rangle = \langle \vec{Z}_n^+, \vec{Z}_n^+ \rangle + \langle \vec{Z}_n^-, \vec{Z}_n^- \rangle \quad (3.66.b)$$



$$\langle \vec{Z}_{+n}, \vec{Z}_{-n} \rangle = \langle \vec{Z}_n^+, \vec{Z}_n^+ \rangle - \langle \vec{Z}_n^-, \vec{Z}_n^- \rangle$$

(3.66.c)

olarak farklı kombinasyonlar elde edilebilir. (3.3) iç çarpımı yardımı ile (3.66)

denklemlerinde  $\langle \vec{Z}_n^+, \vec{Z}_n^+ \rangle = \langle \vec{Z}_n^-, \vec{Z}_n^- \rangle$  biçiminde

$$\langle \vec{Z}_n^+, \vec{Z}_n^+ \rangle = \frac{1}{S} \int_S \{ [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n^*] \} ds \equiv \frac{1}{S} \int_S |\nabla_{\perp} \phi_n|^2 ds \quad (3.67.a)$$

$$\langle \vec{Z}_n^-, \vec{Z}_n^- \rangle = \frac{1}{S} \int_S \{ \nabla_{\perp} \phi_n \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* \} ds \equiv \frac{1}{S} \int_S |\nabla_{\perp} \phi_n|^2 ds \quad (3.67.b)$$

elde edilir. (3.67) denklemleri yardımı ile  $\phi_n$  uygun bir normalizasyon koşulu ile

$$\frac{1}{S} \int_S |\nabla_{\perp} \phi_n|^2 ds = 1, \quad n=1,2,3,\dots \quad (3.68)$$

normalize edilebilir. Daha önce kullanılan  $\nabla_{\perp} \cdot (\psi_m^* \nabla_{\perp} \psi_m) = \nabla_{\perp} \psi_m^* \cdot \nabla_{\perp} \psi_m + \psi_m^* \Delta_{\perp} \psi_m$  bağıntısı yardımı ile (3.48) denklemi ve Dirichlet sınır koşulu ile (3.68) denklemi

$$\frac{1}{S} \int_S |\nabla_{\perp} \phi_n|^2 ds = q_{+n} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \int_S |\phi_n|^2 ds + \oint_L \phi_n \frac{\partial}{\partial n} \phi_n^* dl = 1 \quad (3.69)$$

elde edilir. Dirichlet sınır koşulu ile (3.69) integralinde ikinci terim sıfır olacağından

$$\langle \vec{Z}_n^+, \vec{Z}_n^+ \rangle = \langle \vec{Z}_n^-, \vec{Z}_n^- \rangle = q_{+n} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \int_S |\phi_n|^2 ds = 1 \quad (3.70)$$

bulunur. Böylece  $\vec{Z}_{\pm n}$  özvektörleri için  $q_{\pm n} \neq 0$  durumunda  $\langle \vec{Z}_n^+, \vec{Z}_n^+ \rangle = \langle \vec{Z}_n^-, \vec{Z}_n^- \rangle = 1$  ve  $\langle \vec{Z}_n^+, \vec{Z}_n^- \rangle = 0$  biçiminde ortonormallik sağlanmış olur.

### 3.4. Üç Elemanlı Vektör Fonksiyonlarının Baz Kümesi

$\vec{\mathcal{E}}$  ve  $\vec{\mathcal{H}}$  vektörleri enlemsel ve boylamsal koordinatlara bölünmüş bir şekilde

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{R}, t) &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, z, t) = \vec{E}(\vec{r}, z, t) + \vec{e}_z E_z(r, z, t) \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{R}, t) &= \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, z, t) = \vec{H}(\vec{r}, z, t) + \vec{e}_z H_z(r, z, t)\end{aligned}\quad (3.71)$$

ifade edilebilir. Dalga sınır operatörü (DSO) özvektör setinin Hilbert uzayında  $L_2^4(V)$  bir baz tanımladığının ispat edilebilmesi için enlemsel dalga terimlerinin enlemsel koordinatlar aracılığı ile seriye açılabileceği gösterilmelidir. Bu ise söz konusu baz fonksiyonlarının Hilbert uzayında tamamlanmış olmasını gerektirir. Bu amaçla enlemsel ve boylamsal alanlar aşağıda ayrı ayrı incelenecektir.

### 3.4.1. Enlemsel Vektör Elemanlarının Baz Kümesi

DSO operatörünün özvektör seti  $L_2^4(V)$  Hilbert uzayında lineer bir  $M$  manifoldu biçiminde ifade edilebilir.  $M$  manifoldunun birbirine dik üç alt uzaydan oluştuğundan  $M = N \oplus D \oplus \Omega$  biçiminde ortogonal alt uzayların direkt toplamı şeklinde ifade edilebilir.  $M$  manifoldu  $L_2^4(V)$  Hilbert uzayında mevcut olup bu uzayda bir baz oluşturmaktadır. Bu durumu ispat etmek için öncelikle  $N$ ,  $D$ ,  $\Omega$  alt uzaylarının  $L_2^2(V)$  Hilbert alt uzaylarından oluştuğunu göstermek gerekir.  $L_2^2(V)$  Hilbert alt uzayında  $N$ ,  $D$ ,  $\Omega$  alt uzayları iki elemanlı vektör fonksiyonlarını karşılayacak biçimde

$$N = \begin{pmatrix} G_N^2 \\ J_N^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} G_D^2 \\ J_D^2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} G_\Omega^2 \\ J_\Omega^2 \end{pmatrix}\quad (3.72)$$

gösterilebilir. Burada  $N$ ,  $D$ ,  $\Omega$  indisleri sınırdaki özvektörlerin Dirichlet ve Neumann sınır koşulunu sağladıklarını göstermektedir.  $G_N^2$  ve  $J_N^2$  elemanları  $\psi_m$  potansiyeli tarafından

$$J_N^2 : \{[\nabla_\perp \psi_m \times \vec{e}_z]\}_{m=1}^\infty, \quad G_N^2 : \{\nabla_\perp \psi_m\}_{m=1}^\infty\quad (3.73)$$



üretmişlerdir.  $\psi_m$  potansiyelleri Neumann sınır özdeğer probleminin normalize edilmiş özdeğerleri olup

$$(\Delta_{\perp} + \nu_m^2)\psi_m = 0, \quad \frac{\partial \psi_m}{\partial n} \Big|_L = 0, \quad \frac{\nu_m^2}{S} \int_S |\psi_m|^2 ds = 1 \quad (3.74)$$

biçiminde elde edilebilirler.  $G_D^2$  ve  $J_D^2$  elemanları benzer biçimde  $\phi_n$  potansiyelleri tarafından

$$J_D^2 : \{\nabla_{\perp} \phi_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad G_D^2 : \{\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (3.75)$$

üretmişlerdir.  $\phi_n$  potansiyeli Dirichlet sınır özdeğer probleminin normalize edilmiş özdeğerleri olup

$$(\Delta_{\perp} + \chi_n^2)\phi_n = 0, \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial n} \Big|_L = 0, \quad \frac{\chi_n^2}{S} \int_S |\phi_n|^2 ds = 1 \quad (3.76)$$

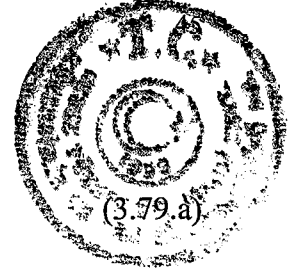
biçiminde hesaplanabilirler.  $G_{\Omega}^2$  ve  $J_{\Omega}^2$  alt uzayları sonlu sayıda harmonik vektör içermekte olup sıfır değerini sağlarlar ve aynı  $u$  potansiyeli ile  $\Delta u = 0$  olmak üzere

$$J_{\Omega}^2 : \{\mathbf{0}\}_{\Omega=1}^{\infty}, \quad G_{\Omega}^2 : \{\mathbf{0}\}_{\Omega=1}^{\infty} \quad (3.77)$$

biçiminde üretmişlerdir.  $M$  toplamı (3.72) denklemi anlamında ele alınarak

$$M = \begin{pmatrix} G_N^2 \\ J_N^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} G_D^2 \\ J_D^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} G_{\Omega}^2 \\ G_{\Omega}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_N^2 \oplus G_D^2 \oplus G_{\Omega}^2 \\ J_N^2 \oplus J_D^2 \oplus G_{\Omega}^2 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

biçiminde yazılabilir.  $M$  toplamının  $L_2^4(V)$  Hilbert uzayına karşılık olarak tamamlanmış bir uzay oluşturduğu “Weyl Teoremi” ile ispat edilebilir. Weyl teoremi Hilbert uzayları için,  $L_2^2(V)$  Hilbert uzayının  $J$ ,  $G$  ve  $U$  biçiminde alt uzaylara bölünmesi ve bu alt uzayların



$$J: \left\{ [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \varphi]: (\Delta + k^2)\varphi = 0, \varphi|_L = 0 \text{ veya } \frac{\partial}{\partial n}|_L = 0 \right\} \quad (3.79.a)$$

$$G: \left\{ \nabla \varphi: (\Delta + k^2)\varphi = 0, \varphi|_L = 0 \text{ veya } \frac{\partial}{\partial n}|_L = 0 \right\} \quad (3.79.b)$$

$$U: \{ \nabla u: \Delta u = 0 \} \quad (3.79.c)$$

şartlarını sağlaması halinde  $J \oplus G \oplus U$  toplamının tamamlanmış bir öz vektör setinin söz konusu uzayda oluştuğunu tanımlar [Weyl, 1970]. Burada  $J$ ,  $G$  ve  $U$  alt uzayları (3.79) uyarınca  $N$ ,  $D$ ,  $U$  alt uzaylarına karşılık geldiğinden  $M = N \oplus D \oplus U$  toplamının  $L_2^4(V)$  Hilbert uzayında tamamlanmış bir öz vektör setini oluşturduğu gösterilmiş olur.

### 3.4.2. Boylamsal Vektör Elemanlarının Baz Kümesi

(3.71) denkleminde enlemsel  $\vec{E}$  ve  $\vec{H}$  alan büyüklüklerinden başka boylamsal  $E_z$  ve  $H_z$  skaler alan büyüklükleri mevcuttur.  $E_z(r, z, t)$  elemanı dalga kılavuzu sınırında Dirichlet sınır koşulunu  $E_z(r, z, t)|_L = 0$ ,  $r \in L$  olacak biçimde sağlar. Bu nedenle daha önce elde edilen Dirichlet sınır özdeğer problemini tanımlayan, tamamlanmış ve ortonormalize edilmiş  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  potansiyelleri ile  $E_z(r, z, t)$  alan ifadesi  $\phi_n$  terimlerinin oluşturduğu seriler şeklinde ifade edilebilir.

Benzer biçimde boylamsal  $H_z(r, z, t)$  alan ifadesi dalga kılavuzu sınırında Neumann sınır koşulunu sağladığında daha önce elde edilen Neumann sınır özdeğer problemini, tamamlanmış ve ortonormalize edilmiş  $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$  potansiyellerinin oluşturduğu seriler şeklinde ifade edilebilirler. Özel olarak  $\psi_0 = 1$  durumu özel bir kılavuzu moduna karşılık gelir. Söz konusu mod yalnızca enlemsel  $\vec{H}_o(\vec{r}, z, t) = \vec{e}_z H_{zo}(r, z, t)$  alan bileşenine sahip olup boylamsal  $\vec{E}_o$  ve  $\vec{H}_o$  alan bileşenleri  $\nabla_{\perp} \psi_0 = 0$  olması nedeni ile sıfırdır.

## 4. VEKTÖR ALANLARININ BAZ ÜZERİNE İZDÜŞÜMLERİ

### 4.1. Enlemsel Vektörlerin Baz Üzerine İzdüşümleri

(3.72) denkleminde  $M = N \oplus D \oplus U$  biçiminde dalga kılavuzu kesiti üzerinde ortak olarak birbirine dik olan ve kılavuz sınırlarında sınır koşullarını sağlayan  $\{\vec{Y}_{\pm m}\}_{m=1}^{\infty}$ ,  $\{\vec{Z}_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\vec{U}_{\pm k}\}_{k=1}^N$  alt özvektör kümeleri ifade edilmiştir. Söz konusu alt vektör kümeleri daha önce gösterildiği biçimde tamamlanmış olmaları nedeni ile alt özvektör kümelerinin oluşturduğu ve  $M$  toplamına karşılık gelen  $\vec{X}(\vec{r}, z, t)$  vektör alanı  $z$  ve  $t$  değişkenlerine bağlı açılım katsayıları yardımı ile seriler biçiminde

$$\vec{X}(\vec{r}, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{\pm m}(z, t) \vec{Y}_{\pm m}(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{\pm n}(z, t) \vec{Z}_{\pm n}(\vec{r}) + \sum_{k=1}^N C_{\pm k}(z, t) \vec{U}_{\pm k}(\vec{r}) \quad (4.1)$$

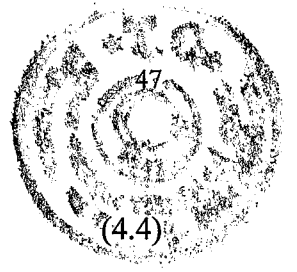
ifade edilebilir. (4.1) denkleminde bulunan öz vektörler daha önce ifade edildiği gibi  $\vec{Y}_{\pm m} = \vec{Y}_m^+ \pm \vec{Y}_m^-$ ,  $\vec{Z}_m = \vec{Z}_m^+ \pm \vec{Z}_m^-$ ,  $\vec{U}_k = \vec{U}_k^+ \pm \vec{U}_k^-$  biçiminde düzenlenerek (4.1)'de yerine konulursa  $\vec{Y}_{\pm m} = \vec{Y}_m^+ \pm \vec{Y}_m^-$  öz vektörü için

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{\pm m}(z, t) \vec{Y}_{\pm m}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} \{A_{+m}(z, t) \vec{Y}_m^+(\vec{r}) + A_{-m}(z, t) \vec{Y}_m^-(\vec{r})\} \quad (4.2)$$

ifadesi bulunur. (4.2) denkleminde

$$A_{+m} \vec{Y}_m^+ + A_{-m} \vec{Y}_m^- = A_{+m} (\vec{Y}_m^+ + \vec{Y}_m^-) + A_{-m} (\vec{Y}_m^+ - \vec{Y}_m^-) = (A_{+m} + A_{-m}) \vec{Y}_m^+ + (A_{+m} - A_{-m}) \vec{Y}_m^- \quad (4.3)$$

biçiminde düzenleme yapılarak



$$(A_{+m} + A_{-m}) = V_m^h(z, t), \quad (A_{+m} - A_{-m}) = I_m^h(z, t)$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{\pm m}(z, t) \vec{Y}_{\pm m}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h(z, t) \vec{Y}_m^+(\vec{r}) + \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h(z, t) \vec{Y}_m^-(\vec{r}) \quad (4.4)$$

biçiminde ifade edilebilir. Benzer işlem adımları ile (4.1) ifadesindeki ikinci terim

$$(B_{+n} + B_{-n}) = V_n^e(z, t), \quad (B_{+n} - B_{-n}) = I_n^e(z, t)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{\pm n}(z, t) \vec{Z}_{\pm n}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e(z, t) \vec{Z}_n^+(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e(z, t) \vec{Z}_n^-(\vec{r}) \quad (4.5)$$

ve üçüncü terim

$$(C_{+k} + C_{-k}) = V_k(z, t), \quad (C_{+k} - C_{-k}) = I_k(z, t)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{\pm k}(z, t) \vec{U}_{\pm k}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(z, t) \vec{U}_k^+(\vec{r}) + \sum_{k=1}^N I_k(z, t) \vec{U}_k^-(\vec{r}) \quad (4.6)$$

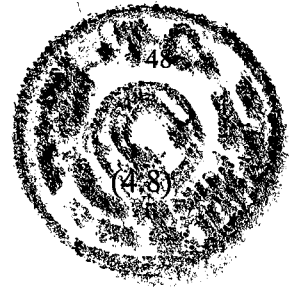
biçiminde elde edilebilir. (4.4), (4.5) ve (4.6) denklemleri yardımı ile (4.1) denklemi

$$\vec{X} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{\pm m} \vec{Y}_{\pm m} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{\pm n} \vec{Z}_{\pm n} + \sum_{k=1}^N C_{\pm k} \vec{U}_{\pm k}$$
$$= \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h [\nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z] + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e \nabla_{\perp} \phi_n + \sum_{k=1}^N V_k \nabla_{\perp} \Omega_k \right\} \\ -\sqrt{\mu_0} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h \nabla_{\perp} \Psi_m + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] + \sum_{k=1}^N I_k [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k] \right\} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

biçiminde elde edilir. (4.7) alan ifadeleri üzerine çeşitli izdüşümler alınarak bilinmeyen katsayıların hesaplanması mümkün olacaktır.

## 4.2. Boylamsal Vektörlerin Baz Üzerine İzdüşümleri

$E_z$  elemanı için izdüşüm işlemleri sınır koşulunu sağlayan tamamlanmış potansiyel fonksiyonu  $\phi_n$ 'in kullanılması ile



$$E_z(r, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z, t) \chi_n^2 \phi_n \quad (4.8)$$

biçiminde ele alınabilir.  $E_z$  elemanına benzer biçim de  $H_z$  elemanı için izdüşüm işlemleri sınır koşullarını da sağlayan tamamlanmış potansiyel fonksiyonu  $\psi_m$ 'in kullanılması ile

$$H_z(r, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \left\{ h_0(z, t) + \sum_{m=1}^{\infty} h_m(z, t) v_m^2 \psi_m \right\} \quad (4.9)$$

biçiminde ele alınabilir. Böylece dalga kılavuzu içindeki alan ifadeleri fiziksel olarak kılavuz içindeki modlara karşılık gelen serilerle gösterilmiştir. Ele alınan serilerde bulunan  $(z, t)$ 'ye bağlı bilinmeyen katsayılar farklı modlar için

$$\begin{aligned} & \left\{ h_0(z, t), h_m(z, t), V_m^h(z, t), I_m^h(z, t) \right\}_{m=1}^{\infty} \\ & \left\{ e_n(z, t), V_n^e(z, t), I_n^e(z, t) \right\}_{n=1}^{\infty} \\ & \left\{ V_k(z, t), I_k(z, t) \right\}_{k=1}^N \end{aligned} \quad (4.10)$$

biçiminde ifade edilebilir. (4.10) denklemindeki satırlar sırası ile  $TE$ ,  $TM$  ve  $TEM$  dalga kılavuzu modlarının analizi için çözülmesi gereken bilinmeyenleri gösterir.

## 5. MAXWELL DENKLEMLERİNİN BAZ ÜZERİNE İZDÜŞÜMLERİ

### 5.1. $H_z$ için İzdüşümler

#### 5.1.1. Skaler Diferansiyel Denklem İzdüşümleri

(2.15) denklem takımı tekrar ele alınacak olursa

$$\begin{aligned}\mu_0 \partial_z (\mu H_z) &= -\mu_0 \mu \nabla_{\perp} \cdot \vec{H} + g \\ \mu_0 \partial_t (\mu H_z) &= \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}] - I_z\end{aligned}\quad (5.1)$$

elde edilir. (5.1) denkleminde  $\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}$  ve  $\nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}]$  ifadelerinin hesaplanması gereklidir. Bu amaç için (4.7) denkleminde  $\nabla_{\perp} \cdot$  operatörü uygulanacak olursa

$$\begin{aligned}\nabla_{\perp} \cdot \vec{H} &= \sqrt[2]{\mu_0} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi_m + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] + \sum_{k=1}^N I_k \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k] \right\} \\ &= \sqrt[2]{\mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h \Delta_{\perp} \psi_m = -\sqrt[2]{\mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h v_m^2 \psi_m\end{aligned}\quad (5.2)$$

bulunur. (4.7) denkleminde benzer biçimde  $\vec{E}$  için  $\nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}]$  işlemi yapılarak

$$\begin{aligned}\nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \vec{E}] &= \sqrt[2]{\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi_m + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] + \sum_{k=1}^N V_k \nabla_{\perp} \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k] \right\} \\ &= \sqrt[2]{\epsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h \Delta_{\perp} \psi_m = -\sqrt[2]{\epsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h v_m^2 \psi_m\end{aligned}\quad (5.3)$$

ifadesi elde edilir. (5.2) ve (5.3) denklemleri (5.1) denkleminde yerine konularak



$$\begin{aligned}\mu_0 \partial_z (\mu H_z) &= \sqrt{\mu_0} \mu \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h v_m^2 \psi_m + g \\ \mu_0 \partial_t (\mu H_z) &= \sqrt{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h v_m^2 \psi_m - I_z\end{aligned}\quad (5.4)$$

bulunur. (4.9) denklemi (5.4) denkleminin sağ yanında yerine konularak

$$\begin{aligned}\mu_0 \partial_z (\mu H_z) &= \sqrt{\mu_0} \left\{ \partial_z (\mu h_o) + \sum_{m=1}^{\infty} \partial_z (\mu h_m) v_m^2 \psi_m \right\} \\ \mu_0 \partial_t (\mu H_z) &= \sqrt{\varepsilon_0} \left\{ \partial_t (\mu h_o) + \sum_{m=1}^{\infty} \partial_t (\mu h_m) v_m^2 \psi_m \right\}\end{aligned}\quad (5.5)$$

denklemi elde edilir. (5.4) ve (5.5) denklemleri beraber ele alınırsa

$$\begin{aligned}\partial_z (\mu h_o \psi_o) + \sum_{m=1}^{\infty} \partial_z (\mu h_m) v_m^2 \psi_m &= \mu \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h v_m^2 \psi_m + \sqrt{\mu_0} g \\ \partial_{ct} (\mu h_o \psi_o) + \sum_{m=1}^{\infty} \partial_{ct} (\mu h_m) v_m^2 \psi_m &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h v_m^2 \psi_m - \sqrt{\varepsilon_0} I_z\end{aligned}\quad (5.6)$$

elde edilir. Burada  $\psi_o = \psi_o(r) = 1$  ve  $\partial_{ct} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \partial_{ct}$  biçiminde olup  $c$  boşlukta ışık

hızını gösterir.  $\{\psi_o, \psi_m\}_{m=1}^{\infty}$  biçimindeki fonksiyonlar kümesi

$$\frac{1}{S} \int_S |\psi_o|^2 ds = 1, \quad \frac{1}{S} \int_S \psi_m' \psi_o^* ds = 0 \quad (5.7)$$

bağıntılarını sağlar. (5.6) denklemi  $\psi_o$  ile çarpılıp (5.7) şeklinde integre edilirse

$$\begin{aligned}\partial_z (\mu h_o) &= \sqrt{\mu_0} \frac{1}{S} \int_S g ds \\ \partial_{ct} (\mu h_o) &= -\sqrt{\varepsilon_0} \frac{1}{S} \int_S I_z ds\end{aligned}\quad (5.8)$$

bulunur. (5.6) denklemi tekrar  $\psi_m^*$  ile çarpılarak (5.7) şeklinde integre edilirse

$$\begin{aligned}\partial_z \{ \mu h_m(z,t) \} &= \mu I_m^h(z,t) + \sqrt[2]{\mu_o} \frac{1}{S} \int_S g \Psi_m^* ds \\ \partial_{ct} \{ \mu h_m(z,t) \} &= -V_m^h(z,t) - \sqrt{\epsilon_o} \frac{1}{S} \int_S I_z \Psi_m^* ds\end{aligned}\quad (5.9)$$

$m = 1, 2, 3 \dots$  olmak üzere elde edilir.

### 5.1.2. Vektör Diferansiyel Denklem İzdüşümleri

(2.15.a) denklemi tekrar ele alınarak  $\vec{e}_z$  ile vektörel olarak çarpılırsa

$$\nabla_{\perp} H_z = \epsilon_o \partial_t \left( \epsilon \left[ \vec{e}_z \times \vec{E} \right] \right) + \partial_z \vec{H} + \left[ \vec{e}_z \times \vec{J} \right] \quad (5.10)$$

ifadesi elde edilir. (5.10) denklemi ile (4.9) denklemi birlikte ele alınarak

$$\nabla_{\perp} H_z = \sqrt[2]{\mu_o} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(z,t) v_m^2 \nabla_{\perp} \Psi_m \quad (5.11)$$

bulunur. (5.10) denkleminin sağ yanındaki  $\left[ \vec{e}_z \times \vec{E} \right]$  terimi (4.7) ile düzenlenirse

$$\left[ \vec{e}_z \times \vec{E} \right] = \sqrt[2]{\epsilon_o} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h \nabla_{\perp} \Psi_m + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e \left[ \vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n \right] + \sum_{k=1}^N V_k \left[ \vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k \right] \right\} \quad (5.12)$$

$$\vec{H} = \sqrt[2]{\mu_o} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h \nabla_{\perp} \Psi_m + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e \left[ \vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n \right] + \sum_{k=1}^N I_k \left[ \vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k \right] \right\} \quad (5.13)$$

bulunur. (5.12) ve (5.13) denklemleri (5.10) denkleminde yerine konulursa  $\nabla_{\perp} \Psi_m$  ve  $\left[ \vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n \right]$  ifadeleri üzerine ayrı ayrı izdüşümler bulunabilir.

-  $\nabla_{\perp} \Psi_m$  üzerine izdüşüm

(5.11) denklemini  $\nabla_{\perp}\psi_m^*$  ifadesi ile skaler çarpılarak  $S$  dalga kılavuzu kesiti boyunca integre edilecek olursa

$$\frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} H_z \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds = \sqrt[2]{\mu_o} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(z,t) v_m^2 \cdot \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \psi_m \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds \quad (5.14)$$

bulunur. Ortonormalize koşulu

$$\frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \psi_{m'} \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds = \delta_{mm'} \quad (5.15)$$

kullanılarak

$$\frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} H_z \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds = \sqrt[2]{\mu_o} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(z,t) v_m^2 \delta_{mm'} = \sqrt[2]{\mu_o} h_m(z,t) v_m^2 \quad (5.16)$$

bulunur. Benzer biçimde  $\nabla_{\perp}\psi_m^*$  ifadesi  $[\vec{e}_z \times \vec{E}]$  bağıntısı ile çarpılıp  $S$  kesiti üzerinden integre edilirse

$$\frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \vec{E}] \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds = \sqrt[2]{\epsilon_o} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \psi_m \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds \\ & + \sum_{k=1}^N V_k \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k] \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

elde edilir. Ortogonalite koşulları yardımı ile

$$\frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds = 0, \quad \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k] \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds = 0 \quad (5.18)$$

(5.17) denklemini



$$\frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \vec{E}] \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds = \sqrt[2]{\epsilon_o} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h \delta_{mm} \right\} = \sqrt[2]{\epsilon_o} V_m^h(z, t) \quad (5.19)$$

şeklinde düzenlenebilir.  $\nabla_{\perp} \Psi_m^*$  ifadesi ile  $\vec{H}$  çarpılıp  $S$  üzerinden integre edilirse

$$\frac{1}{S} \int_S \vec{H} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds = \sqrt[2]{\mu_o} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \Psi_m \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds \\ & + \sum_{k=1}^N I_k \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k] \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

elde edilir. Ortogonalite koşulları ile

$$\frac{1}{S} \int_S \vec{H} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds = \sqrt[2]{\mu_o} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h \delta_{mm} \right\} = \sqrt[2]{\mu_o} I_m^h(z, t) \quad (5.21)$$

bulunur. (5.16), (5.19), (5.21) denklemleri (5.10)' da direkt yerine konularak

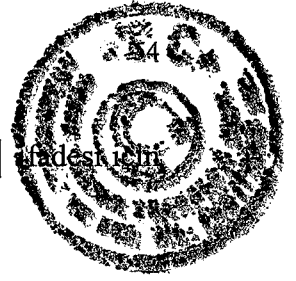
$$-\sqrt[2]{\mu_o} h_m(z, t) v_m^2 = \sqrt{\epsilon_o} \partial_t (V_m^h(z, t)) + \sqrt{\mu_o} \partial_z (I_m^h(z, t)) + \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \vec{J}] \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds \quad (5.22)$$

elde edilir. (5.22) denklemi yeniden düzenlenerek

$$-\partial_{ct} \{ \epsilon V_m^h(z, t) \} - \partial_z I_m^h(z, t) + v_m^2 h_m(z, t) = \frac{\sqrt{\mu_o}}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \vec{J}] \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds \quad (5.23)$$

bulunur.

-  $[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n]$  üzerine izdüşüm



Daha önce yapılan benzer işlemler biçiminde öncelikle  $[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n]$  ifadesi için ortonormalizasyon koşulu araştırılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n^*] ds &= \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \phi_n \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds = \delta_{nn} \\ \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \psi_m \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n^*] ds &= 0 \\ \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k] \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n^*] ds &= 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

ifadesi edilebilir. (5.24) denklemlerini ile (5.10) üzerinde tekrar izdüşümler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} H_z [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n^*] ds &= 0 \\ \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \vec{E}] \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n^*] ds &= \sqrt{\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} V_n^e \delta_{nm} \right\} = \sqrt{\epsilon_0} V_n^e(z, t) \\ \frac{1}{S} \int_S \vec{H} \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n^*] ds &= \sqrt{\mu_0} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} I_n^e \delta_{nm} \right\} = \sqrt{\mu_0} I_n^e(z, t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

sistemi elde edilir. (5.25) ifadelerinin (5.10) denkleminde yerine konulması ile

$$\sqrt{\epsilon_0} \partial_t \{ \epsilon V_n^e(z, t) \} - \sqrt{\mu_0} \partial_z I_n^e(z, t) + \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \vec{J}] \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n^*] ds = 0 \quad (5.26)$$

bağıntısı elde edilir. (5.26) denklemi yeniden düzenlenerek

$$\partial_t \{ \epsilon(z, t) V_n^e(z, t) \} + \partial_z I_n^e(z, t) = - \frac{\sqrt{\mu_0}}{S} \int_S \vec{J} \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds \quad (5.27)$$

bulunur.

-  $[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k]$  üzerine izdüşüm

İzdüşüm işlemi benzer biçimde

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k] \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k^*] ds &= \delta_{kk} \\ \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \Psi_m \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k^*] ds &= 0 \\ \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Psi_k^*] ds &= 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

ortonormalizasyon işlemleri yardımı ile kolayca yapılabilir. (5.11) denklemi üzerine (5.28) bağıntıları kullanılarak izdüşüm alınır

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} H_z \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k^*] ds &= 0 \\ \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \vec{E}] \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k^*] ds &= \sqrt{\epsilon_o} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} V_k \delta_{km} \right\} = \sqrt{\epsilon_o} V_k(z, t) \\ \frac{1}{S} \int_S \vec{H} \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k^*] ds &= \sqrt{\mu_o} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} I_k \delta_{km} \right\} = \sqrt{\mu_o} I_k(z, t) \end{aligned} \quad (5.29)$$

bulunur. (5.29) denklemleri (5.10) denkleminde yerine konularak

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon_o} \partial_t \{ \epsilon V_k(z, t) \} + \sqrt{\mu_o} \partial_z I_k(z, t) + \frac{1}{S} \int_S [\vec{e}_z \times \vec{J}] \cdot [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k^*] ds &= 0 \\ \partial_{ct} \{ \epsilon V_k(z, t) \} + \partial_z I_k(z, t) &= -\frac{\sqrt{\mu_o}}{S} \int_S \vec{J} \cdot \nabla_{\perp} \Omega_k^* ds \end{aligned} \quad (5.30)$$

biçiminde diferansiyel denklemleri elde edilir.

## 5.2. $E_z$ için İzdüşümleri

### 5.2.1. Skaler Diferansiyel Denklem İzdüşümleri

(2.16) sistemi tekrar ele alınacak olursa

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \partial_t (\varepsilon E_z) &= \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{e}_z] - J_z \\ \varepsilon_0 \partial_z (\varepsilon E_z) &= \rho - \varepsilon_0 \varepsilon \nabla_{\perp} \cdot \vec{E}\end{aligned}\quad (5.31)$$

elde edilir.  $E_z$  ifadesi (4.8) şeklinde alınacak olursa

$$E_z(\vec{r}, z, t) = \sqrt{2\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z, t) \chi_n^2 \phi_n(\vec{r}) \quad (5.32)$$

(5.31) denklemindeki  $\nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{e}_z]$  ve  $\nabla_{\perp} \cdot \vec{E}$  ifadelerinin için  $\nabla_{\perp} \cdot [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z] = 0$ ,

$\nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Omega_k \equiv \Delta_{\perp} \Omega_k = 0$  ve  $\nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \phi_n = \Delta_{\perp} \phi_n = -\chi_n^2 \phi_n$  ifadesi göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\nabla_{\perp} \cdot \vec{E} &= \sqrt{2\varepsilon_0} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h \nabla_{\perp} \cdot [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z] + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \phi_n + \sum_{k=1}^N V_k \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Omega_k \right\} \\ &= \sqrt{2\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e \Delta_{\perp} \phi_n = -\sqrt{2\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e \chi_n^2 \phi_n\end{aligned}\quad (5.33)$$

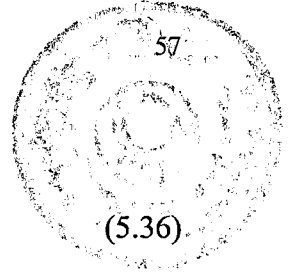
bulunur. Benzer biçimde

$$\nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{e}_z] = \sqrt{2\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e \Delta_{\perp} \phi_n = -\sqrt{2\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e \chi_n^2 \phi_n \quad (5.34)$$

bağıntısı elde edilir. (5.32), (5.33) ve (5.34) denklemleri (5.28) denkleminde yerine konularak daha önceki biçimde  $\phi_n^*$  ile çarpılarak integre edilirse

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \partial_t \left( \varepsilon \frac{1}{S} \int_S E_z \phi_n^* ds \right) &= \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{e}_z] \phi_n^* ds - \frac{1}{S} \int_S J_z \phi_n^* ds \\ \varepsilon_0 \partial_z \left( \varepsilon \frac{1}{S} \int_S E_z \phi_n^* ds \right) &= -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \cdot \vec{E} \phi_n^* ds + \frac{1}{S} \int_S \rho \phi_n^* ds\end{aligned}\quad (5.35)$$

elde edilir. Daha önce verilen ortonormalite koşulu  $\phi_n$  için göz önüne alınırsa



$$\frac{\chi_n^2}{S} \int_S \phi_n \phi_n^* ds = \delta_{mn} \quad (5.36)$$

bulunur. (5.35) denkleminde (5.32), (5.33) ve (5.34) denklemleri yerine konularak (5.36) ortonormalite koşulu ile

$$\begin{aligned} \partial_{ct} \{ \epsilon e_n(z,t) \} &= -I_n^e(z,t) - \frac{\sqrt{\mu_o}}{S} \int_S J_z \phi_n^* ds \\ \partial_z \{ \epsilon e_n(z,t) \} &= \epsilon(z,t) V_n^e(z,t) + \frac{\sqrt{\epsilon_o}}{S} \int_S \rho \phi_n^* ds \end{aligned} \quad (5.37)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

## 5.2.2. Vektör Diferansiyel Denklem İzdüşümleri

(2.17.a) denklemi göz önüne alınarak  $\vec{e}_z$  ile vektörel çarpılacak olursa

$$\nabla_{\perp} E_z = \partial_z \vec{E} + \mu_o \partial_t \left\{ \mu \left[ \vec{H} \times \vec{e}_z \right] \right\} + \left[ \vec{I} \times \vec{e}_z \right] \quad (5.38)$$

elde edilir. (5.32) ifadesi yardımı ile

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} E_z(\vec{r}, z, t) &= \sqrt{\epsilon_o} \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z,t) \chi_n^2 \nabla_{\perp} \phi_n(\vec{r}) \\ \vec{H} \times \vec{e}_z &= \sqrt{\mu_o} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h \left[ \nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z \right] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e \nabla_{\perp} \phi_n + \sum_{k=1}^N I_k \nabla_{\perp} \Omega_k \right\} \\ \vec{E} &= \sqrt{\epsilon_o} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h \left[ \nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z \right] + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e \nabla_{\perp} \phi_n + \sum_{k=1}^N V_k \nabla_{\perp} \Omega_k \right\} \end{aligned} \quad (5.39)$$

bulunur. (5.39) yardımı ile (5.38) bağıntısı üzerine çeşitli izdüşümler alınabilir.

-  $\nabla_{\perp} \phi_n$  üzerine izdüşüm

Daha önceki bölümde yapılan benzer işlemler ile

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} E_z \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds = \mu_o \partial_t \left\{ \mu \frac{1}{S} \int_S [H \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds \right\} \\ + \partial_z \left\{ \frac{1}{S} \int_S \vec{E} \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds \right\} + \frac{1}{S} \int_S [\vec{I} \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds \end{aligned} \quad (5.40)$$

bağıntısı elde edilir. Ortonormalizasyon koşulları yardımı ile

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \phi_n \cdot \nabla_{\perp} \phi_m^* ds = \delta_{nm} \\ \frac{1}{S} \int_S [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds = 0 \\ \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \Omega_k \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds = 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \vec{E} \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds = \sqrt{\epsilon_o} \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z,t) \chi_n^2 \delta_{nm} = \sqrt{\epsilon_o} e_n(z,t) \chi_n^2 \\ \mu \frac{1}{S} \int_S [H \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds = \sqrt{\mu_o} \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e(z,t) \delta_{nm} = \sqrt{\mu_o} I_n^e(z,t) \\ \frac{1}{S} \int_S \vec{E} \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds = \sqrt{\epsilon_o} \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e(z,t) \chi_n^2 \delta_{nm} = \sqrt{\epsilon_o} V_n^e(z,t) \end{aligned} \quad (5.42)$$

denklemleri elde edilir. (5.42) ve (5.41) denklemlerinin (5.40) denkleminde direkt olarak yerine konulması ile

$$\sqrt{\epsilon_o} e_n(z,t) \chi_n^2 = \sqrt{\mu_o} \{ \mu I_n^e(z,t) \} + \sqrt{\epsilon_o} \partial_z V_n^e(z,t) + \frac{1}{S} \int_S [\vec{I} \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds = 0 \quad (5.43)$$

bağıntısı elde edilir. (5.43) bağıntısının düzenlenmesi ile

$$\partial_{ct} \{ \mu I_n^e(z,t) \} - \partial_z V_n^e(z,t) + \chi_n^2 e_n(z,t) = -\frac{\sqrt{\epsilon_o}}{S} \int_S [\vec{I} \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds \quad (5.44)$$



denklemini elde edilir.

-  $\nabla_{\perp}\Psi_m \times \vec{e}_z$  üzerine izdüşüm

$\nabla_{\perp}\Psi_m \times \vec{e}_z$  ifadesi  $\nabla_{\perp}E_z$  ifadesi ile çarpılıp integre edilirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} E_z \cdot [\nabla_{\perp} \Psi_m^* \times \vec{e}_z] ds &= \mu_o \partial_t \left\{ \mu \frac{1}{S} \int_S \vec{H} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds \right\} \\ &+ \partial_z \left\{ \frac{1}{S} \int_S \vec{E} \cdot [\nabla_{\perp} \Psi_m^* \times \vec{e}_z] ds \right\} + \frac{1}{S} \int_S \vec{I} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds \end{aligned} \quad (5.45)$$

bağıntısı elde edilir. (5.45) integralinin değerlendirilmesinde ortogonalite koşulları

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S [\nabla_{\perp} \Psi_m \times \vec{e}_z] \cdot [\nabla_{\perp} \Psi_m^* \times \vec{e}_z] ds &= \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \Psi_m \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds = \delta_{mm'} \\ \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \phi_n \cdot [\nabla_{\perp} \Psi_m^* \times \vec{e}_z] ds &= 0, \quad \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \Omega_k \cdot [\nabla_{\perp} \Psi_m^* \times \vec{e}_z] ds = 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

biçiminde elde edilerek (5.45) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} E_z \cdot [\nabla_{\perp} \Psi_m^* \times \vec{e}_z] ds &= 0 \\ \frac{1}{S} \int_S \vec{H} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds &= \sqrt{\mu_o} \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h(z,t) \delta_{mm'} = \sqrt{\mu_o} I_m^h(z,t) \\ \frac{1}{S} \int_S \vec{E} \cdot [\nabla_{\perp} \Psi_m^* \times \vec{e}_z] ds &= \sqrt{\varepsilon_o} \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h(z,t) \delta_{mm'} = \sqrt{\varepsilon_o} V_m^h(z,t) \end{aligned} \quad (5.47)$$

bulunur. (5.47) denklem sistemi (5.46) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu_o} \partial_t \{ \mu I_m^h(z,t) \} + \sqrt{\varepsilon_o} \partial_z \{ V_m^h(z,t) \} + \frac{1}{S} \int_S \vec{I} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds &= 0 \\ \partial_z \{ \mu I_m^h(z,t) \} + \partial_t \{ V_m^h(z,t) \} &= -\sqrt{\varepsilon_o} \frac{1}{S} \int_S \vec{I} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_m^* ds \end{aligned} \quad (5.48)$$



sistemi bulunur.

-  $\nabla_{\perp}\Omega_k^*$  üzerine izdüşüm

$\nabla_{\perp}\Omega_k^*$  ifadesi  $\nabla_{\perp}E_z$  ile çarpılıp integre edilirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp}E_z \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds &= \mu_o \partial_t \left\{ \mu \frac{1}{S} \int_S [\vec{H} \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds \right\} \\ &+ \partial_z \left\{ \frac{1}{S} \int_S \vec{E} \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds \right\} + \frac{1}{S} \int_S [\vec{I} \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds \end{aligned} \quad (5.49)$$

bulunur. (5.49) denklemini değerlendirebilmek için ortonormalite koşulları

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp}\Omega_k \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds &= \delta_{kk'} \\ \frac{1}{S} \int_S [\nabla_{\perp}\Psi_m^* \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds &= 0, \quad \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp}\phi_n \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds = 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

biçiminde ele alınarak (5.49) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp}E_z \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds &= 0 \\ \frac{1}{S} \int_S [\vec{H} \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds &= \sqrt[2]{\mu_o} \sum_{m=1}^{\infty} I_k(z,t) \delta_{kk'} = \sqrt[2]{\mu_o} I_k(z,t) \\ \frac{1}{S} \int_S \vec{E} \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds &= \sqrt[2]{\epsilon_o} \sum_{m=1}^{\infty} V_k(z,t) \delta_{kk'} = \sqrt[2]{\epsilon_o} V_k(z,t) \end{aligned} \quad (5.51)$$

biçiminde elde edilir. (5.51) denklemleri (5.49) denkleminde yerine konularak

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu_o} \partial_t \{ \mu I_k(z,t) \} + \sqrt[2]{\epsilon_o} \partial_z \{ V_k(z,t) \} + \frac{1}{S} \int_S [\vec{I} \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds &= 0 \\ \partial_{ct} \{ \mu I_k(z,t) \} + \partial_z \{ V_k(z,t) \} &= -\sqrt{\epsilon_o} \frac{1}{S} \int_S [\vec{I} \times \vec{e}_z] \cdot \nabla_{\perp}\Omega_k^* ds \end{aligned} \quad (5.52)$$

denklem sistemi elde edilir.

### 5.3. Kısmi Diferansiyel Denklem Sistemi Kümesi

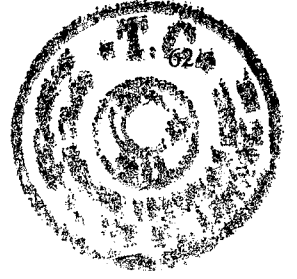
#### 5.3.1. Genel Kısmi Diferansiyel Denklem Sistemi

Daha önceki bölümde izdüşümler sonucu elde edilen diferansiyel denklem sistemleri bir bütün olarak göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 -\partial_{ct} \{ \mu I_n^e(z,t) \} - \partial_z V_n^e + \chi_n^2 e_n &= \frac{\sqrt{\epsilon_o}}{S} \int_S [ \vec{I} \times \vec{e}_z ] \cdot \nabla_{\perp} \phi_n^* ds \\
 \partial_z \{ \epsilon e_n \} &= \epsilon V_n^e + \frac{\sqrt{\epsilon_o}}{S} \int_S \rho \phi_n^* ds \\
 \partial_{ct} \{ \epsilon e_n \} &= -I_n^e - \frac{\sqrt{\mu_o}}{S} \int_S J_z \phi_n^* ds
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}
 -\partial_{ct} \{ \epsilon V_m^h \} - \partial_z I_m^h + \nu_m^2 h_m &= \frac{\sqrt{\mu_o}}{S} \int_S [ \vec{e}_z \times \vec{J} ] \cdot \nabla_{\perp} \psi_m^* ds \\
 \partial_z \{ \mu h_m \} &= \mu I_m^h + \frac{\sqrt{\mu_o}}{S} \int_S g \psi_m^* ds \\
 \partial_{ct} \{ \mu h_m \} &= -V_m^h - \frac{\sqrt{\epsilon_o}}{S} \int_S I_z \psi_m^* ds \\
 \partial_z \{ \mu h_o \} &= -\frac{\sqrt{\mu_o}}{S} \int_S g ds \\
 \partial_{ct} \{ \mu h_o \} &= -\frac{\sqrt{\epsilon_o}}{S} \int_S I_z ds
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{ct} \{ \mu I_k \} + \partial_z V_k &= -\frac{\sqrt{\epsilon_o}}{S} \int_S [ \vec{I} \times \vec{e}_z ] \cdot \nabla_{\perp} \Omega_k^* ds \\
 \partial_{ct} \{ \epsilon V_k \} + \partial_z I_k &= -\frac{\sqrt{\mu_o}}{S} \int_S \vec{J} \cdot \nabla_{\perp} \Omega_k^* ds
 \end{aligned} \tag{5.55}$$



sistemi elde edilir.

### 5.3.2. Dış Kaynak Uygulama ve Başlangıç Koşulları

Elde edilen probleminin çözülmesi için başlangıç anında elektromagnetik dalgaların değerlerinin verilmesi gerekir. Alan ifadeleri seriler biçiminde elde edildiğinden alan ifadelerinin başlangıç değerleri de aynı serilerle

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, z, t)\Big|_{t=0} &= \vec{E}(\vec{r}, z, 0) + \vec{e}_z E_z(\vec{r}, z, 0) \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, z, t)\Big|_{t=0} &= \vec{H}(\vec{r}, z, 0) + \vec{e}_z H_z(\vec{r}, z, 0)\end{aligned}\quad (5.56)$$

biçiminde ifade edilebilir. (5.56) denklemine göre alan ifadeleri

$$\begin{aligned}E_z &= -\sqrt{\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e_n(z, 0) \chi_n^2 \phi_n(r) \right\} \\ \vec{E} &= -\sqrt{\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} V_m^h(z, 0) [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{e}_z] + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^e(z, 0) \nabla_{\perp} \phi_n + \sum_{k=1}^N V_k(z, 0) \nabla_{\perp} \Omega_k \right\}\end{aligned}\quad (5.57)$$

$$\begin{aligned}H_z &= \sqrt{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ h_0(z, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} h_m(z, 0) v_m^2 \psi_m(r) \right\} \\ \vec{H} &= \sqrt{\mu_0} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} I_m^h(z, 0) \nabla_{\perp} \psi_m + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^e(z, 0) [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n] + \sum_{k=1}^N I_k(z, 0) [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \Omega_k] \right\}\end{aligned}\quad (5.58)$$

biçiminde elde edilebilir. (5.57) ve (5.58) denklemlerinde bulunan başlangıç koşulları ile ilgili  $(z, 0)$ 'a bağlı ifadeler bilinen fonksiyonların baz elemanları üzerine izdüşümleri ile hesaplanabilir.

## 6. DİKDÖRTGEN KESİTLİ DALGA KILAVUZU İÇİN SAYISAL UYGULAMA

Sayısal uygulama için dikdörtgen kesitli, içi boş,  $z$  yönünde sonsuz uzun ve mükemmel elektrik iletken duvarlardan yapılmış bir dalga kılavuzu düşünülmüştür. Bu durumda  $\vec{J}_e(\vec{R}, t) = 0$ ,  $\vec{J}_h(\vec{R}, t) = 0$ ,  $\vec{P}'(\vec{E}) = 0$ ,  $\vec{M}'(\vec{H}) = 0$ ,  $\vec{J}_\sigma(\vec{E}, \vec{H}) = 0$ ,  $\rho_e(\vec{r}, t) = 0$  ve  $\rho_h(\vec{r}, t) = 0$  olacaktır. Magnetizasyon ve polarizasyon vektörlerinin sıfır olması sonucu, bünye bağıntıları  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$  ve  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  olur. Bünye bağıntılarında bulunan dielektrik ve magnetik geçirgenlikler dalga kılavuzu içinin boş olması nedeni ile zamana ve konuma bağlı olmayıp sıfırdan büyük sabit sayılar biçimindedirler.  $\vec{J}_\sigma(\vec{E}, \vec{H}) = 0$  şartı dalga kılavuzu içerisinde iletkenlik nedeni ile kayıpların olmadığını ve dalga kılavuzu içerisinde serbest yük taşıyıcılarının bulunmadığını gösterir. Böylece (2.8) denklemleri ile verilen eş akım ve yük ifadeleri

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \partial_t \vec{P}'(\vec{E}) + \vec{J}_\sigma(\vec{E}, \vec{H}) + \vec{J}_e = 0 & \rho &= -\text{div} \vec{P}'(\vec{E}) + \rho_\sigma + \rho_e = 0 \\ \vec{I} &= \partial_t \vec{M}'(\vec{H}) + \vec{J}_h = 0 & g &= -\text{div} \vec{M}'(\vec{H}) + \rho_h = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

biçimini alır. Burada  $\vec{J} = \vec{J} + \vec{e}_z J_z$  ve  $\vec{I} = \vec{I} + \vec{e}_z I_z$  eş akımları yeniden düzenlenerek  $\vec{J} = 0$ ,  $J_z = 0$  ve  $\vec{I} = 0$ ,  $I_z = 0$  bağıntıları elde edilir. Bu şartlar altında (5.53), (5.54) ve (5.55) denklemleri ayrı ayrı homojen ve birbirinden bağımsız üç farklı diferansiyel denklem sistemi biçiminde ele alınabilirler.

Bu durum dalga kılavuzu içerisinde  $TE$ ,  $TM$  ve  $TEM$  modlarının ayrı ayrı analiz edilebileceğini ve modlar arasında geçişin olmadığını göstermektedir. Bu çalışmada elde edilecek çözümler nedensellik prensibini ve özel relativite teorisinin maksimum bilgi aktarma hızı konusundaki gereksinimlerini sağlamakta olup geometrik dalga kılavuzu dispersiyonun yayılan işaret üzerindeki bozucu etkisi de zaman domeninde araştırılmıştır. Bu alt başlıkların daha iyi anlaşılabilmesi açısından nedensellik prensibi ve dispersiyon kavramlarına aşağıda kısaca yer verilmiştir.



## - Nedensellik Prensibi

Nedensellik prensibi ifadesi zayıf ve kuvvetli nedensellik olmak üzere iki bölümde ele alınabilir [Hansen&Yaghjian, 1999]

1-) *Zayıf nedensellik*:  $t_0$  gibi bir gözlem noktası itibarı ile  $t_0 \leq t$  zaman aralığında eğer elektromagnetik kaynaklar yok ise tüm elektromagnetik dalga komponentlerinde sıfır olması gerekliliğidir.

2-) *Kuvvetli nedensellik*: Kuvvetli nedensellik özel relativite aksiyomları ile ilgili olarak zaman domeninde enerji taşıyan işaretin yayılım hızının ışık hızından daha büyük olamamasını gerektirir. Bu durum  $z$  yayılım yönü,  $c$  ışık hızı ve  $t$  zaman olmak üzere  $t_0$  gibi bir gözlem noktası itibarı ile  $[z/(t-t_0)] \leq c$  olmasını gerektirir.

Bu tez çalışmasında çözümler zayıf ve kuvvetli nedenselliği sağlamaktadırlar.

## - Dalga kılavuzlarında Dispersiyon

Literatüre bakıldığında üç temel dispersiyon türünden bahsedilebilir. Bunlar;

1-) *Malzeme dispersiyonu*: İlgili malzemedan oluşan ortamda malzemenin yapısı nedeni ile farklı dalga boylarına sahip elektromagnetik dalgaların farklı hızlarda yayılması nedeni ile oluşur.

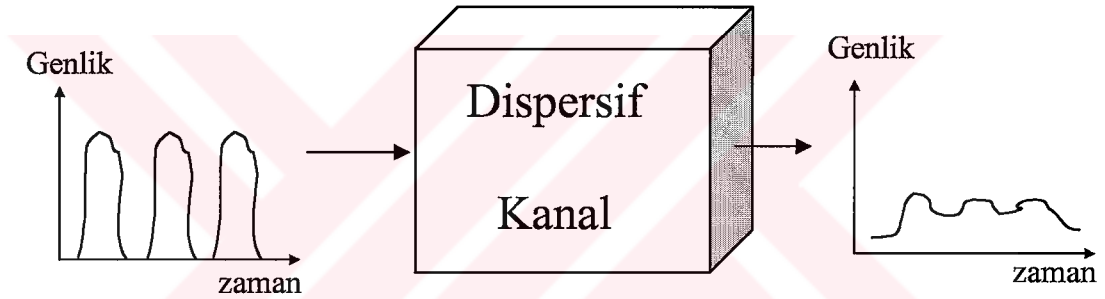
2-) *Mod dispersiyonu*: Dalga kılavuzlarında birden fazla uzaysal modda elektromagnetik dalga yayılımı gerçekleşmesi durumunda oluşur.

3-) *Geometrik dispersiyon*: Dalga kılavuzunun geometrisi nedeni ile yayılan elektromagnetik dalgaların faz hızlarının frekansa bağlı olması nedeni ile oluşur. Faz hızının frekansa bağımlılığı



$$v_{faz} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

şeklindedir. Buraca  $c$  ışık hızını,  $\omega_c$  kesim frekansını ve  $\omega$  çalışma frekansını gösterir. Eğer dalga kılavuzu monokromatik olmayan örneğin darbe türü bir kaynakla uyarılırsa, darbe'yi oluşturan her frekans harmoniği farklı faz hızları ile dalga kılavuzu boyunca yayılacaklardır. Dalga kılavuzunun çıkışında süperpozisyon gereği girişten verilen darbe için cevap aranılırsa darbe'nin her bir frekans harmoniği toplanarak elde edilebilir. Fakat her bir harmonik farklı faz hızları hareket ettiğinden bunların toplamları olan yeni işaret girişteki darbe şekline göre bozulmuş olarak elde edilir. Dispersiyonun istenmeyen etkisi genel anlamda aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 6.1. Dispersiyonun istenmeyen etkisi

Şekil 6.1'e göre dispersif bir kanala (çeşitli dalga kılavuzları, atmosfer tabakaları v.b.) giren darbeler kanal çıkışında zamanda yayılmış ve karışmış olarak gözükmetedir. Eğer darbeler birbirlerine çok yakın ise yayılım mesafesi ve süresine bağlı olarak çıkışta onları birbirinden ayırt etmek mümkün olmayabilir. Bu durum özellikle uzak mesafe haberleşmesinde alınan işaretlerin çözümlenememesine ve maksimum bilgi aktarım hızının düşmesine neden olmaktadır.

Bu tez çalışmasında dikdörtgen kesitli mükemmel iletken duvarlardan yapılmış dalga kılavuzlarında geometri nedeni ile oluşan dispersiyonun Walsh fonksiyonları ile modellenen sayısal işaretlerin oluşturduğu elektromagnetik dalgalar üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

## 6.1. *TM* Modları Analizi

(6.1) denklemini (5.53) denkleminde yerine konularak

$$\begin{aligned} -\partial_{ct} \{ \mu I_n^e \} - \partial_z V_n^e + \chi_n^2 e_n &= 0 \\ V_n^e &= \varepsilon^{-1} \partial_z \{ \varepsilon e_n \} \\ I_n^e &= -\partial_{ct} \{ \varepsilon e_n \} \end{aligned} \quad (6.2)$$

$n=1,2,3\dots$  olmak üzere ifadeleri bulunur. Burada  $e_n(z,t)$ ,  $V_n^e(z,t)$  ve  $I_n^e(z,t)$  elektromagnetik alan terimlerinin genliklerini göstermekte olup, dalga kılavuzunda *TM* modlarını tanımlayan elektromagnetik alan ifadeleri (4.7) gereği

$$\begin{aligned} E_{zn} &= \sqrt{\varepsilon_o} \chi_n^2 \phi_n(r) e_n(z,t), & \vec{E}_n &= \sqrt{\varepsilon_o} \nabla_{\perp} \phi_n(r) V_n^e(z,t) \\ H_{zn} &= 0, & \vec{H}_n &= \sqrt{\mu_o} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n(r)] I_n^e(z,t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

biçiminde elde edilir. (6.2) denklemini  $V_n^e(z,t)$  ve  $I_n^e(z,t)$  ifadeleri yok edilerek sadece  $e_n(z,t)$  ifadesine bağlı olacak biçimde düzenlenerek

$$\partial_{ct} \{ \mu \partial_{ct} \{ \varepsilon e_n \} \} - \partial_z \varepsilon^{-1} \partial_z \{ \varepsilon e_n \} + \chi_n^2 e_n = 0 \quad (6.4)$$

bulunur.  $e_n(z,t)$  yerine  $D_n(z,t) = \varepsilon e_n(z,t)$  dönüşümü ile (6.4) denklemini

$$\left( \varepsilon \partial_{ct} \mu \partial_{ct} - \varepsilon \partial_z \varepsilon^{-1} \partial_z + \chi_n^2 \right) D_n(z,t) = 0 \quad (6.5)$$

şeklinde ve “*Klein-Gordon*” denklemini olarak bilinir.  $D_n(z,t)$  gösterilimi ile *TM* modları için (6.3) ifadeleri

$$\begin{aligned} E_{zn} &= \sqrt{\varepsilon_o} \chi_n^2 \phi_n(r) \varepsilon^{-1} D_n(z,t), & \vec{E}_n &= \sqrt{\varepsilon_o} \nabla_{\perp} \phi_n(r) \varepsilon^{-1} \partial_{ct} D_n(z,t) \\ H_{zn} &= 0, & \vec{H}_n &= \sqrt{\mu_o} [\nabla_{\perp} \phi_n(r) \times \vec{e}_z] \partial_z D_n(z,t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$n = 1, 2, \dots$  olmak üzere biçiminde bulunur. (6.5) denkleminin homojen olması nedeni ile denklemle direkt kaynak terimleri ilişkilendirilememektedir. Buna karşın kaynak terimleri  $z$  boyunca uygun sınır koşulları kullanılarak denklemle ilişkilendirilebilir. Bu durum  $\xi(t)$  kaynak ifadesinin zaman bağımlılığı olmak üzere (6.5) denklemini için uygun sınır koşulları biçiminde

$$D_n(z, t)|_{z=0} = \xi(t) \quad (6.7)$$

$$e_n(z, t)|_{z=0} = \frac{\xi(t)}{\varepsilon} \quad (6.8)$$

olarak ifade edilebilir.

## 6.2. TE Modları Analizi

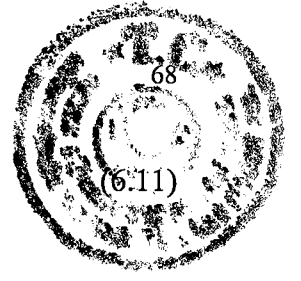
(6.1) ifadeleri (5.54) denkleminde yerine konularak

$$\begin{aligned} -\partial_{ct} \{ \varepsilon V_m^h \} - \partial_z I_m^h + v_m^2 h_m &= 0 \\ I_m^h = \mu^{-1} \partial_z \{ \mu h_m \}, V_m^h = -\mu^{-1} \partial_{ct} \{ \mu h_m \}, \partial_z \{ \mu h_o \} = 0, \partial_{ct} \{ \mu h_o \} = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

elde edilir. Burada  $n = 1, 2, 3, \dots$  olup (6.9) denkleminde ki son iki ifade  $h_o$ 'ın bir sabitten ibaret olduğunu gösterir. Eğer bu dalga kılavuzu modu sıfır ise değeri sıfır alınabilir. (6.9)'daki  $h_m(z, t)$ ,  $V_m^h(z, t)$ ,  $I_m^h(z, t)$  büyüklükleri elektromagnetik alan terimlerinin genliklerini göstermekte olup dalga kılavuzunda TE modlarını tanımlayan elektromagnetik alan ifadeleri (4.7) gereği

$$\begin{aligned} E_{zm} &= 0, \quad \vec{E}_m = \sqrt{\varepsilon_o} [\nabla_{\perp} \psi_m(r) \times \vec{e}_z] V_m^h(z, t) \\ H_{zm} &= \sqrt{\mu_o} v_m^2 \psi_m(r) h_m(z, t), \quad \vec{H}_m = \sqrt{\mu_o} \nabla_{\perp} \psi_m(r) I_m^h(z, t) \end{aligned} \quad (6.10)$$

biçiminde bulunabilir. (6.9) denkleminde  $V_m^h(z, t)$  ve  $I_m^h(z, t)$  ifadeleri yok edilerek sadece  $h_m(z, t)$  ifadesine bağlı olacak biçimde düzenlenerek,  $B_m(z, t) = \mu h_m(z, t)$  değişken dönüşümü yapılırsa



$$\left(\mu\partial_{ct}\varepsilon\partial_{ct} - \mu\partial_z\mu^{-1}\partial_z + \nu_m^2\right)B_m(z,t) = 0$$

(6.11)

ifadesi yine “Klein-Gordon” denkleminde elde edilir.  $B_m(z,t)$  ile  $TE$  modları için (6.10) alan ifadeleri

$$\begin{aligned} E_{zm} &= 0, & \vec{E}_m &= -\sqrt{\varepsilon_0} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \psi_m(r)] \partial_{ct} B_m(z,t) \\ H_{zm} &= -\sqrt{\mu_0} \nu_m^2 \psi_m(r) \mu^{-1} B_m(z,t), & \vec{H}_m &= -\sqrt{\mu_0} \nabla_{\perp} \psi_m(r) \mu^{-1} \partial_z B_m(z,t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

$m = 1, 2, \dots$  olmak üzere elde edilir. Yine (6.7)’ye benzer biçimde kaynak ifadeleri

$$B_m(z,t)|_{z=0} = \xi(t) \quad (6.13.a)$$

$$h_m(z,t)|_{z=0} = \frac{\xi(t)}{\mu} \quad (6.13.b)$$

şeklinde düzenlenebilir.

### 6.3. $TE$ ve $TM$ Modları için Klein Gordon Denklemi Çözümü

Dalga kılavuzunda  $TE$  ve  $TM$  modları için Klein Gordon denkleminin

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon\partial_{ct}\mu\partial_{ct} - \varepsilon\partial_z\varepsilon^{-1}\partial_z + \chi_n^2\right)D_n(z,t) &= 0 \\ \left(\mu\partial_{ct}\varepsilon\partial_{ct} - \mu\partial_z\mu^{-1}\partial_z + \nu_m^2\right)B_m(z,t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

biçimindedir. (6.14) denkleminin  $\partial_{ct}^2 = \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\partial_t^2 = c^{-2}\partial_t^2$  olarak düzenlenirse

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\partial_t^2 - \partial_z^2 + \kappa^2\right)F(z,t) = 0 \quad (6.15)$$

bulunur. Böylece  $\kappa$ ,  $\chi_n$  veya  $\nu_m$ ;  $F(z,t)$ ,  $D_n(z,t)$  veya  $B_m(z,t)$  olmak üzere (6.15) denkleminin  $TE$  veya  $TM$  modları için genel anlamda incelenebilir. (6.15)’in



çözümü, değişken dönüşümü ile  $F = F(z, t) = F[u(z, ct), v(z, ct)] = F(u, v) = U(u)V(v)$  biçiminde elde edilen  $F$  ifadesi yardımı ile

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F(u, v) &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right\} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(u, v) &= \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

bulunarak  $u$  ve  $v$  bağımsız değişkenler olması nedeni ile (6.16) denklemi

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(u, v) = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right\} \quad (6.17)$$

biçiminde basitleştirilebilir. (6.17) denkleminde benzer biçimde konuma bağlı türev

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} F(u, v) = \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \quad (6.18)$$

şeklinde elde edilir. (6.17) ve (6.18) ifadeleri (6.15) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} &\left[ \left( \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \left[ \left( \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \frac{\partial F}{\partial u} + \\ &\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \frac{\partial F}{\partial v} + 2 \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \kappa^2 F = 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

bulunur. (6.19) denklemi (6.15) denkleminin yeni değişkenlerle tanımlanmış biçimidir. (6.19) denkleminde bakılarak  $F(u, v) = U(u)V(v)$  biçiminde ele alınan değişken dönüşümündeki  $u(z, t)$  ve  $v(z, t)$  bağımlılıkları literatürde verilmiş olup [Miller, 1977]

$$\begin{aligned} u \cosh(v) &= ct, & 0 \leq u < \infty \\ u \sinh(v) &= z, & -\infty < v < \infty \end{aligned} \quad (6.20)$$

biçiminde ele alınan değişken dönüşümü ile

$$u = \sqrt{c^2 t^2 - z^2}, \quad v = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{ct + z}{ct - z} \right) \quad (6.21)$$

ifadeleri elde edilir. (6.21) ifadelerinin kısmi türevleri hesaplanarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -\frac{\sinh^2(v)}{u}, & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= -\frac{\cosh^2(v)}{u} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\sinh(2v)}{u^2}, & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\frac{\sinh(2v)}{u^2} \end{aligned} \quad (6.22)$$

(6.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial u} + \kappa^2 F - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0 \quad (6.23)$$

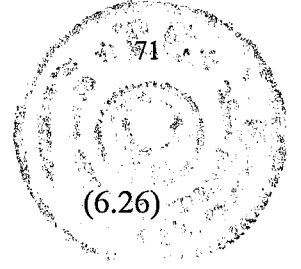
bulunur. (6.23) denklemi  $F = F(u, v) = U(u)V(v)$  şeklinde ele alınırsa

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \kappa^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V(v)}{V(v) \partial v^2} \right] U(u) = 0 \quad (6.24)$$

bulunur. Söz konusu denklem  $U(u)$  ve  $V(v)$  için ayrı ayrı ele alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(v)}{\partial v^2} &= \alpha^2 V(v) \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \kappa^2 - \frac{\alpha^2}{u^2} \right] U(u) &= 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

sistemi bulunur. (6.25) denklemlerinin ayrı ayrı  $F$  fonksiyonu şeklindeki çözümü



$$\begin{aligned}V(v) &= e^{\pm\alpha v} \\U(u) &= A_\alpha J_\alpha(\kappa u) + B_\alpha Y_\alpha(\kappa u) \\F(u, v) &= e^{\pm\alpha v} (A_\alpha J_\alpha(\kappa u) + B_\alpha Y_\alpha(\kappa u))\end{aligned}\tag{6.26}$$

biçimindedir. Burada (6.19) denklemini yardımı ile  $F$  fonksiyonunun çözümü

$$V(v) = e^{-\alpha v}, \quad U(u) = J_\alpha(\kappa u)\tag{6.27}$$

$$\begin{aligned}F(z, t) &= U(u)V(v) = e^{-\alpha v} J_\alpha(\kappa u) = e^{-\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{ct+z}{ct-z}} J_\alpha(\kappa \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \\F_\alpha(z, t) &= \left( \frac{ct+z}{ct-z} \right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\kappa \sqrt{c^2 t^2 - z^2})\end{aligned}\tag{6.28}$$

şeklinde bulunur. Burada  $\alpha$  bağımsız bir parametre olup, dış kaynakların kılavuz içerisinde uygulanabilmesi için daha önce anlatılan yol izlenerek

$$Kaynak = F_\alpha(z, t)|_{z=0} = J_\alpha(\kappa ct)\tag{6.29}$$

ifadesi kaynak için elde edilir.  $\alpha$  parametresi tamsayılar biçiminde ele alınırsa  $z = 0$  için çözüm  $\{J_\alpha(\kappa ct)\}_{n=0}^\infty$  halini alır.  $\{J_\alpha(\kappa ct)\}_{n=0}^\infty$  fonksiyonlar kümesinde  $\alpha$ 'lar tamsayı seçilerek tamamlanmış bir küme oluşur. Böylece herhangi bir  $\Psi(t)$  fonksiyonunun zamana bağımlılığı

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(\kappa ct)\tag{6.30}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $c_n$ 'ler  $\Psi(t)$  fonksiyonu ile hesaplanması gereken katsayılar olup (6.31) serisi "Neumann Serisi" olarak bilinir. Böylece (6.31) denklemini ile  $z = 0$ 'da uygulana kaynakların oluşturacağı elektromagnetik dalgaların çözümü

$$F(z, t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha \left( \frac{ct-z}{ct+z} \right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\kappa \sqrt{c^2 t^2 - z^2})\tag{6.31}$$

şeklinde (6.15) denkleminin çözümünü oluşturacak biçimde bulunur.

## 6.4. Kesim Frekansı Analizleri

(6.15)'in her iki tarafı  $\tau = \kappa ct$ ,  $\eta = \kappa z$  iken  $\kappa^2$ 'ye bölünerek düzenlenirse

$$\frac{1}{\kappa^2} \left( \partial_{ct}^2 - \partial_z^2 + \kappa^2 \right) F(z, t) = 0 \Rightarrow \left( \partial_\tau^2 - \partial_\eta^2 + 1 \right) \Phi(\tau, \eta) = 0 \quad (6.32)$$

denklemini boyutsuz olarak elde edilir. (6.32) denkleminin çözümü için  $\Phi(\tau, \eta) = T(\tau)Z(\eta)$  şeklinde değişken dönüşümü uygulanarak

$$\begin{aligned} \frac{T''}{T} = \text{sabit} = a^2 \Rightarrow T'' + a^2 T = 0 \Rightarrow T = e^{\pm ia\tau} \\ -a^2 - \frac{Z''}{Z} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{Z''}{Z} = -(a^2 - 1) \Rightarrow Z'' + (a^2 - 1)Z = 0 \Rightarrow Z = e^{\pm i\sqrt{(a^2 - 1)}\eta} \end{aligned} \quad (6.34)$$

biçiminde sağlanması gerekir.  $\tau = \kappa ct = \kappa t / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ,  $\eta = \kappa z$  olmak üzere (6.34)

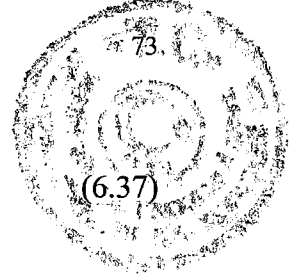
ifadeleri düzenlenirse  $w \triangleq a\kappa / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  olmak üzere

$$T = e^{\pm ia\tau} = e^{\pm ia \frac{\kappa t}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}} = e^{\pm i \left( \frac{a\kappa}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right) t} = e^{\pm iwt} \quad (6.35)$$

bağıntısı elde edilerek  $a = w\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} / \kappa$  iken  $Z$  için verilen çözümde yerine konulursa

$$Z = e^{\pm i \sqrt{\left( \frac{w\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\kappa} \right)^2 - 1} \eta} = e^{\pm i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \left( (w\sqrt{\epsilon_0 \mu_0})^2 - \kappa^2 \right)} \kappa z} = e^{\pm i \sqrt{(w^2 \epsilon_0 \mu_0 - \kappa^2)} z} \quad (6.36)$$

bulunur. Böylece  $\Phi(\tau, \eta) = T(\tau)Z(\eta)$  şeklindeki (6.32) denkleminin çözümü



$$\Phi(\tau, \eta) = \Phi(z, t) = e^{\pm i \left( \frac{\alpha \kappa}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right) t} e^{\pm i \sqrt{(w^2 \epsilon_0 \mu_0 - \kappa^2)} z} \quad (6.37)$$

olacaktır. Burada  $w$  açısal frekansı göstermek üzere (6.37) denkleminde sağ tarafta bulunan ikinci terime dikkat edilirse bu terimin ancak  $w^2 \epsilon_0 \mu_0 \geq \kappa^2$  iken  $z$  yönünde dalga yayılımı tanımlayacağı görülür. Aksi halde  $z$  yönünde üstel zayıflama yani sönen dalgalar söz konusu olacaktır. Bu nedenle  $w^2 \epsilon_0 \mu_0 = \kappa^2$  eşitliğini sağlayan

$$w_c^2 = \frac{\kappa^2}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (6.38)$$

değerine “kesim frekansı” adı verilir.  $\kappa$  dalga kılavuzu boyutları ve modları ile ilgili  $\kappa = \kappa_{pq}$  şeklinde bir parametredir. (6.31) denkleminin sinüzoidal olmayan kaynakların oluşturduğu elektromagnetik dalgalar ile ilgili çözüm olması durumunda kesim frekansı analizleri

$$F(z, t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_{\alpha} \left( \frac{ct - z}{ct + z} \right)^{\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(\kappa \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) = \sum_n A_n e^{inwt} \quad (6.39)$$

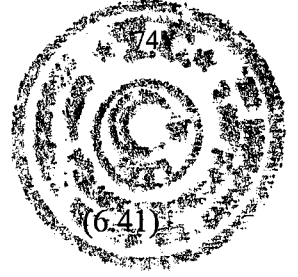
biçimde kaynağın zaman bağımlılığının Fourier serileri veya dönüşümü ile ifade edilebilme imkanına bağlı olarak yapılabilir. Bu çalışmada kesim frekansı analizleri  $\kappa$  ile ilgili olarak (6.31) çözümü üzerinden direkt zaman domeninde düşünülecektir.

## 6.5. TE modları için $\psi_m$ Çözümleri

(3.25) denklemi (3.64) ortonormalizasyon koşulu ile

$$\left( \Delta_{\perp} + p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \right) \psi_m = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi_m}{\partial n} \right|_L = 0, \quad \frac{p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{S} \int_S |\psi_m|^2 ds = 1 \quad (6.40)$$

biçiminde elde edilir. (6.40) ifadesindeki denklemler  $v_m^2 = p_{+m} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  dönüşümü ile



$$(\Delta_{\perp} + v_m^2)\Psi_m = 0, \quad \frac{v_m^2}{S} \int_S |\Psi_m|^2 ds = 1 \quad (6.41)$$

olur. (6.41) deki ilk denklemin çözümü sınır koşullarını otomatik olarak sağlayan

$$\Psi_m = B \cos\left(\frac{\pi px}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi qy}{b}\right), \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (6.42)$$

biçiminde ele alınarak diferansiyel denklemde yerine konularsa

$$\begin{aligned} (\Delta_{\perp} + v_m^2)\Psi_m &= \Delta_{\perp} \left( B \cos\left(\frac{\pi px}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi qy}{b}\right) \right) + v_m^2 \left( B \cos\left(\frac{\pi px}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi qy}{b}\right) \right) = 0 \\ &= B \left( \left( -\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi q}{b}\right)^2 \right) + v_m^2 \right) \cos\left(\frac{\pi px}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi qy}{b}\right) = 0 \\ &= \left( \left( -\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi q}{b}\right)^2 \right) + v_m^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

bulunur. Buradan  $v_m$  ve  $p_{+m}$  ifadesi

$$\Rightarrow v_m = \pi \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2} \Rightarrow p_{+m} = \frac{\pi \left( \left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 \right)}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (6.44)$$

olarak hesaplanır. Bilinmeyen  $B$  katsayısı (6.41) ifadesindeki ortonormalizasyon koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{B^2 v_m^2}{S} \int_S \cos^2\left(\frac{\pi px}{a}\right) \cos^2\left(\frac{\pi qy}{b}\right) dx dy = 1 &\Rightarrow \frac{B^2 v_m^2 ab}{ab} \frac{ab}{4} = 1 \Rightarrow B = \frac{2}{v_m} \\ &\Rightarrow B = \frac{2}{\pi \left( \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2} \right)^{-1}} \end{aligned} \quad (6.45)$$

olarak hesaplanır. Böylece  $\psi_m$  çözümü

$$\psi_m = \frac{2}{\pi} \left( \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2} \right)^{-1} \cos\left(\frac{\pi px}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi qy}{b}\right), \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (6.46)$$

bulunur.  $\psi_m$  çözümünün kullanılabilmesi için  $p + q \neq 0$  olmalıdır. Sıfır çözümünü veren  $p = 0, q = 0$  durumu kullanılmaz. (6.13) denklemi ile verilen elektromagnetik alan ifadelerinin bulunabilmesi için  $\nabla_{\perp} \psi_m$  ve  $[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \psi_m]$  ifadelerinin de hesaplanması gerekir.  $\psi_m$  için bulunan (6.46) çözüme  $\nabla_{\perp}$  operatörü uygulanarak

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \psi_m &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right] \left[ \frac{2}{\pi} \left( \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2} \right)^{-1} \cos\left(\frac{\pi px}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi qy}{b}\right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2} \right)^{-1} \left[ -\frac{p}{a} \cos\left(\frac{\pi qy}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi px}{a}\right) \vec{e}_x - \frac{q}{b} \cos\left(\frac{\pi px}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi qy}{b}\right) \vec{e}_y \right] \end{aligned} \quad (6.47)$$

bulunur. Bulunan  $\nabla_{\perp} \psi_m$  ifadesi kullanılarak  $[\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \psi_m]$  vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} [\vec{e}_z \times \nabla_{\perp} \psi_m] &= B \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{p}{a} \cos\left(\frac{\pi qy}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi px}{a}\right) & -\frac{q}{b} \cos\left(\frac{\pi px}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi qy}{b}\right) \vec{e}_y & 0 \end{vmatrix} \\ &= B \left[ -\frac{p}{a} \cos\left(\frac{\pi qy}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi px}{a}\right) \vec{e}_y + \frac{q}{b} \cos\left(\frac{\pi px}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi qy}{b}\right) \vec{e}_x \right] \end{aligned} \quad (6.48)$$

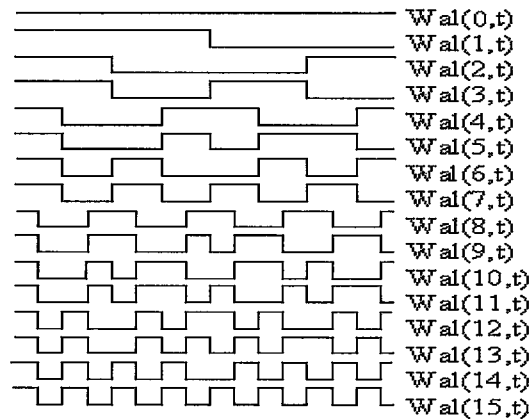
elde edilir. Böylece (6.47) ve (6.48) denklemleri ile (6.13) denklemi ile verilen alan denklemlerinin enlemsel koordinatlara bağlı çözümleri elde edilmiş olacaktır. *TM* modları içinde uygun potansiyeller benzer şekilde bulunabilir.

## 6.6. Elektromagnetik Alanın Zamana Bağımlılığı

Dalga kılavuzlarının elektromagnetik analizleri için literatür genellikle monokromatik zaman bağımlılıkları üzerine kurulmuştur. Bu çalışmada ise monokromatik zaman bağımlılığı yerine, elektromagnetik dalga kaynağının zaman bağımlılığının sayısal işaretlerin modellenmesi için Walsh fonksiyonları biçiminde olması durumu incelenmiştir. Walsh fonksiyonları hakkında geniş bilgiler aşağıdaki bölümde verilmiştir.

### 6.6.1. Walsh Fonksiyonları

Walsh fonksiyonları ortogonal fonksiyonların bir alt kümesi olup genlikleri +1 ve -1 değerleri arasında değişmektedir. Walsh fonksiyonları periyodik yada periyodik olmayan biçimlerde olabilirler ve türevleri birbirine dik olan sin-cos fonksiyonlarına benzer biçimde birbirlerini vermezler. Walsh fonksiyonları matematiksel olarak Hadamard matrisleri ile ifade edilebilirler. Böylece birim darbe fonksiyonu kullanılarak Walsh fonksiyonları sayısal işaretler şeklinde gösterilebilir. Walsh fonksiyonlarının tamamlanmış bir seti 1900'lu yıllar civarında J. A. Barrett tarafından bulunmuştur. Günümüzde Walsh fonksiyonları sayısal haberleşme teknolojilerinde sayısal işaretlerin kodlanmasında, şifrelenmesinde ve modellenmesinde kullanılmaktadır [Bequchamp, 1975]. Walsh fonksiyonlarının ardışık biçimde verilmiş genel bir kümesi şekil 6.2'de gösterilmiştir.



Şekil 6.2. Walsh fonksiyonlarının ardışık biçimde verilmiş genel bir kümesi

Walsh fonksiyonlarının matematiksel modeli Hadamard matrisleri ve birim darbe fonksiyonu  $U(t)$  aracılığı ile aşağıdaki biçimde ifade edilebilir,

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad H_{2n} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & \bar{H}_n \end{bmatrix}$$

$$W_n(t) = \sum_{i=1}^N h_n(i)U(t-(i-1)) \quad (6.49)$$

$$h_n(i) = \text{line}(H_{2n})_i, \quad h_n(i)h_n(j) = 0, \quad i \neq j$$

burada  $H_2$  en düşük mertebeli Hadamard matrisini,  $H_{2n}$  daha yüksek mertebeden Hadamard matrisini,  $\bar{H}_{2n}$  matrisi ise  $H_{2n}$  matrisinde 1'ler yerine -1'lerin konulması ile elde edilen yeni bir matrisi göstermektedir.  $h_n(i)$  ise  $n \times n$  boyutlu Hadamard matrisinin  $i$ 'inci satırını gösterir. Hadamard matrisinin her bir  $i$ 'inci satırı  $2n$  bitlik Walsh serilerini göstermekte olup literatürde “*Leksiographik Sıralama*” olarak bilinir. Walsh fonksiyonları sonlu zaman aralığında  $[0, T)$  tanımlanmış olup  $T$  “*etkin zaman*” olarak adlandırılır. Walsh fonksiyonları  $Wal_q(t)$  şeklinde gösterilmekte olup;  $q$  ardışıklık sayısı yani Walsh fonksiyonlarının zaman eksenini kesme sayısıdır.

### 6.6.2. Walsh Fonksiyonlarının Neumann Serileri İfadesi

Bölüm 6.1.3’de bahsedildiği gibi dış kaynaklar dalga kılavuzunda başlangıç koşulları ile ifade edilebilirler. Bu durum (6.30) gereği kaynak zaman bağımlılıklarının Neumann serileri biçiminde ifadesini gerektirir. Yani Walsh fonksiyonlarının

$$\Psi(t) = W_q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(\kappa ct) \quad (6.50)$$

biçiminde olması gerekmektedir. Klein-Gordon denkleminin çözümleri olan bu seriler nedensellik prensibini de sağlamalıdır. Walsh fonksiyonları birim darbe fonksiyonu ile türetildiğinden bu durum otomatik olarak sağlanır. Seri açılımındaki  $c_n$  katsayılarının bulunabilmesi için  $\Psi(t) = H(t)$  olmak üzere

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

burada  $c_0 = 1$ ,  $c_{2n+1} = 1$ ,  $c_{2n} = 2$  olmak üzere seri açılımı

$$H(t) = \begin{cases} J_0(\kappa ct) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\kappa ct), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

biçiminde bulunur [Watson, 1966]. (6.31) gereği birim basamak fonksiyonu için Klein-Gordon denkleminin tam çözümü

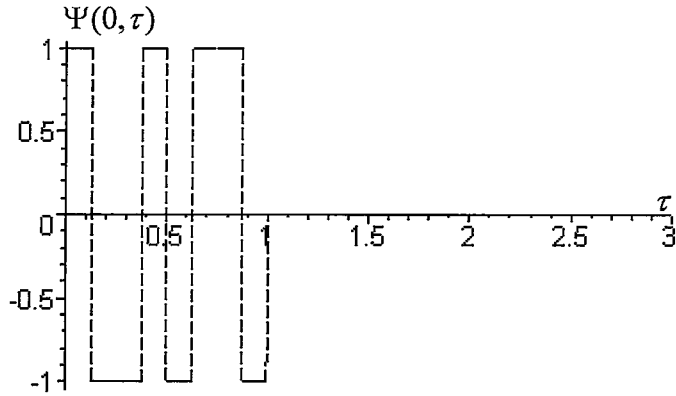
$$H(z, t) = \begin{cases} J_0(\kappa \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{ct - z}{ct + z} \right)^n J_{2n}(\kappa \sqrt{c^2 t^2 - z^2}), & ct \geq z \\ 0, & ct < z \end{cases} \quad (6.52)$$

şeklinde olacaktır. Daha sonra  $t \rightarrow t - T$  biçiminde ötelenmiş bir diğer çözümde

$$H_T(z, t) = \begin{cases} J_0(\kappa \sqrt{c^2 (t - T)^2 - z^2}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{c(t - T) - z}{c(t - T) + z} \right)^n J_{2n}(\kappa \sqrt{c^2 (t - T)^2 - z^2}), & c(t - T) \geq z \\ 0, & c(t - T) < z \end{cases} \quad (6.53)$$

olarak bulunur. Her iki çözüm  $U(z, t) = H(z, t) - H_T(z, t)$  şeklinde düzenlenerek birim darbe için sağlanmış olur. Böylece (6.49) gereği istenilen  $h_n(i)$  ifadeleri ile herhangi bir Walsh fonksiyonu için çözümler bulunabilecektir.  $TE$  modları için bölüm 6.5'de elde edilen  $\psi_m$  çözümleri ile (6.13) denklemini kullanılarak elektromagnetik alan ifadeleri bulunabilecektir. Bu tez çalışmasında sonuçlar hesaplamalarda kolaylık olması bakımından birim darbe için  $U(z, t)$  biçiminde verilen çözüm  $\tau = \kappa ct$ ,  $\eta = \kappa z$  olmak üzere  $\Psi(z, t)$  için boyutsuz hale getirilerek (6.31) yapısında  $\Psi(\eta, \tau)$  olarak

(6.49) gereği periyodik olmayan bir Walsh fonksiyonu (+1-1-1+1-1+1+1-1) olan  $Wal_5(\eta, \tau)$  tarafından boyutsuz etkin zaman  $T=1$  olmak üzere dalga kılavuzunun uyarılması hali için ele alınmıştır. Çözümlerde karşılaşılan Neumann serilerinin yakınsaklığı için kullanılan kriter Ek – III’de verilmiştir. Buna göre şekil 6.3’de  $\eta = 0, (z = 0)$  noktasında başlangıç koşulu olarak Neumann serilerine açılan  $\Psi(0, \tau)$



gösterilmiştir.

Şekil 6.3.  $\Psi(0, \tau)$ ’nin boyutsuz  $\tau$  boyunca değişimi

Şekil 6.3’de Neumann serisine açılan  $\Psi(0, \tau)$  fonksiyonu (6.31) gereği (6.15) denkleminin çözümlerini sağlamakta olup (6.12) denkleminde dikkat edilirse çözümün magnetik alanın  $z$  komponenti olduğu görülür. Bu durumda diğer alan komponentlerini hesabı için (6.12) gereği (6.51) ile verilen çözümün zamana ve aksenal konuma göre türevlerinin hesaplanması gerekmektedir. Türevlerin analitik ifadeleri ek-I ve ek-II’de verilmek kaydı ile zamana ve konuma bağlı türevler

$$\varphi_{2n}(\eta, \tau) = \sum_n \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \quad (6.54.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) = -\frac{t}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} J_1(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}), \quad n = 0 \quad (6.54.b)$$

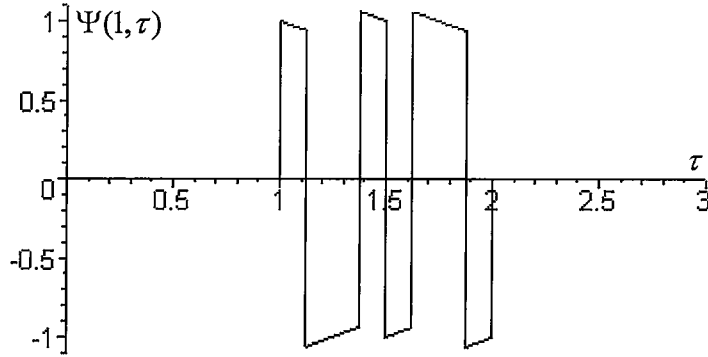
$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{2n}(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \{ \varphi_{2n-1}(\eta, \tau) - \varphi_{2n+1}(\eta, \tau) \}, \quad n \geq 1 \quad (6.54.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) = \frac{z}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} J_1(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}), \quad n = 0 \quad (6.54.d)$$

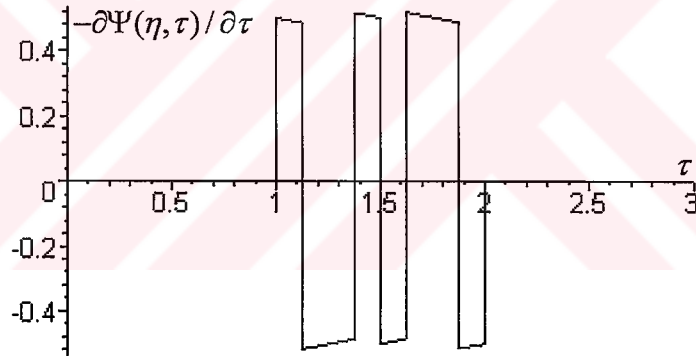
$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi_{2n}(\eta, \tau) = -\frac{1}{2} \{ \varphi_{2n-1}(\eta, \tau) + \varphi_{2n+1}(\eta, \tau) \}, \quad n \geq 1 \quad (6.54.e)$$

olacaktır. Burada  $J_\alpha$ ,  $\alpha$ 'ıncı mertebeden Bessel fonksiyonlarını göstermektedir.

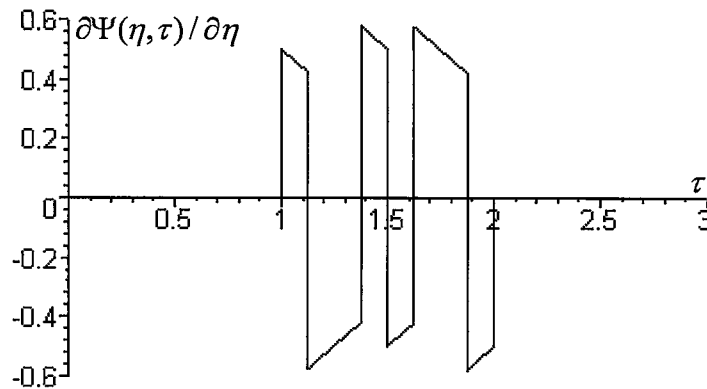
Yukarıdaki denklemlerle elektromagnetik dalganın diğerkomponentleri  $TE$  modları için (6.12) ile dalga kılavuzu ve ilerleyen zaman boyunca aşağıda verilmiştir.



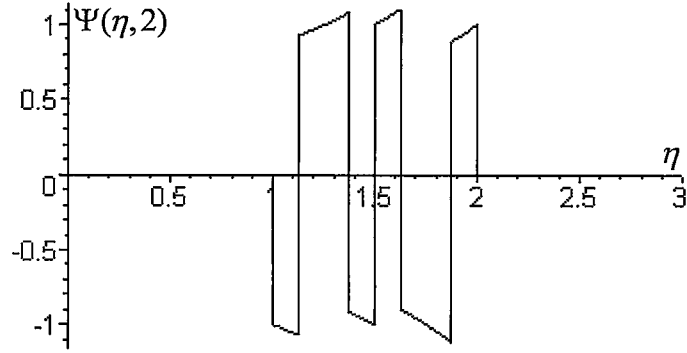
şekil 6.4.  $\Psi(1, \tau)$ 'nin boyutsuz zamana  $\tau$  göre değişimi



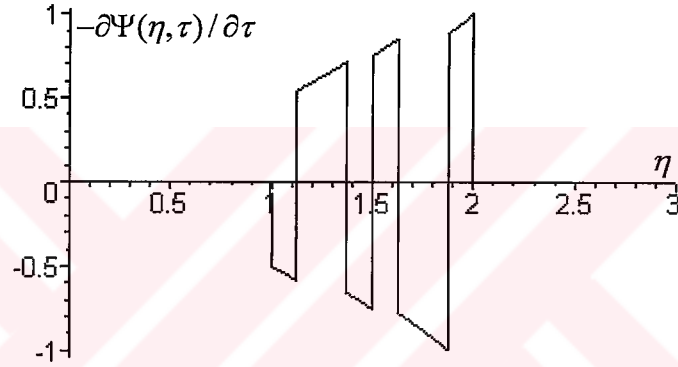
şekil 6.5.  $-\partial\Psi(\eta, \tau)/\partial\tau$ 'in  $\eta=1$ 'de boyutsuz zamana  $\tau$  gre değişimi



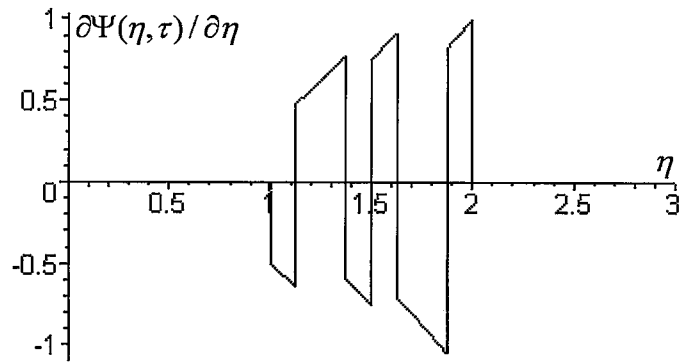
şekil 6.6.  $\partial\Psi(\eta, \tau)/\partial\eta$ 'in  $\eta=1$ 'de boyutsuz zamana  $\tau$  gre değişimi



Şekil 6.7.  $\Psi(\eta, 2)$ 'nin boyutsuz konuma  $\eta$  göre değişimi



Şekil 6.8.  $-\partial\Psi(\eta, \tau)/\partial\tau$ 'in  $\tau = 2$ 'de boyutsuz konuma  $\eta$  göre değişimi



Şekil 6.9.  $\partial\Psi(\eta, \tau)/\partial\eta$ 'in  $\tau = 2$ 'de boyutsuz konuma  $\eta$  göre değişimi

Şekil 6.4, 6.5 ve 6.6'da dikdörtgen kesitli dalga kılavuzlarının geometrisinden kaynaklanan dispersiyon etkisi öncül alçak frekanslar biçiminde; şekil 6.7, 6.8 ve 6.9'da ise ardıl uzaysal alçak frekanslar biçiminde bozulmalar şeklinde ortaya

çıkıştır [Middleton, 1971]. Bu bozulmalara teorik yorumlar (6.37) denklemi ile getirilebilir. Buna göre üstel ifadede pozitif işaret seçilmek kaydı ile faz

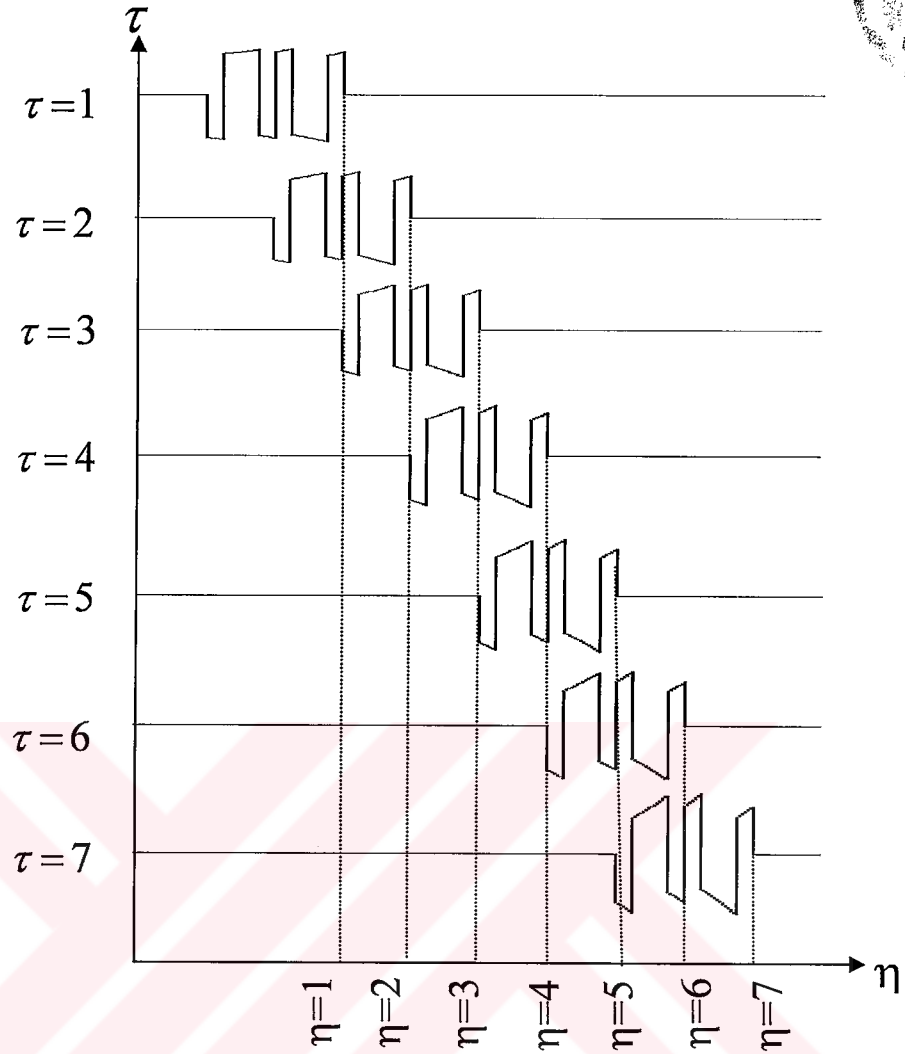
$$wt + \sqrt{(w^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \kappa^2)} z = \sqrt{(w^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \kappa^2) z^2 + w^2 t^2} \Rightarrow Faz = \sqrt{(w^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \kappa^2) z^2 + w^2 t^2}$$

$$\text{Konum sabit} \Rightarrow \sqrt{w^2 t^2 + \left(\frac{w^2}{c^2} - \kappa^2\right) z^2} \quad (6.55.a)$$

$$\text{Zaman sabit} \Rightarrow \sqrt{\kappa^2 z^2 - \left(\frac{z^2}{c^2} - t^2\right) w^2} \quad (6.55.b)$$

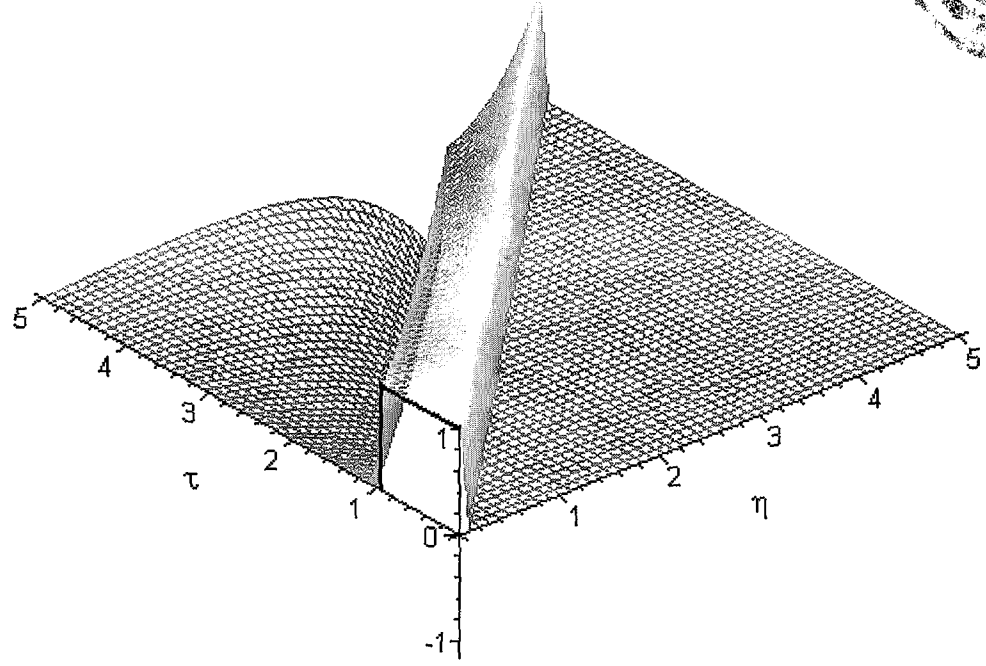
biçiminde ifade edilebilir. Konumun sabitlenip, zamanın değişken olduğu durumlarda (6.55.a) denkleminde yüksek frekansların daha çok gecikerek, alçak frekansların öncül olduğu ve benzer şekilde zamanın sabitlenip, konumun değişken olduğu durumlarda (6.55.b) denkleminde yola çıkarak uzaysal alçak frekansların daha çok gecikerek, uzaysal yüksek frekansların öncül olduğu yorumlanabilir.

Dalga kılavuzu boyunca ilerleyen farklı zamanlarda  $Wal_s(\eta, \tau)$  kaynakları tarafından oluşturulan elektromagnetik dalgaların yayılımı ve geometrik dispersiyonun dalga kılavuzu boyunca ilerleyen dalgalar üzerindeki artan bozucu etkisi şekil 6.10'da görülmektedir.

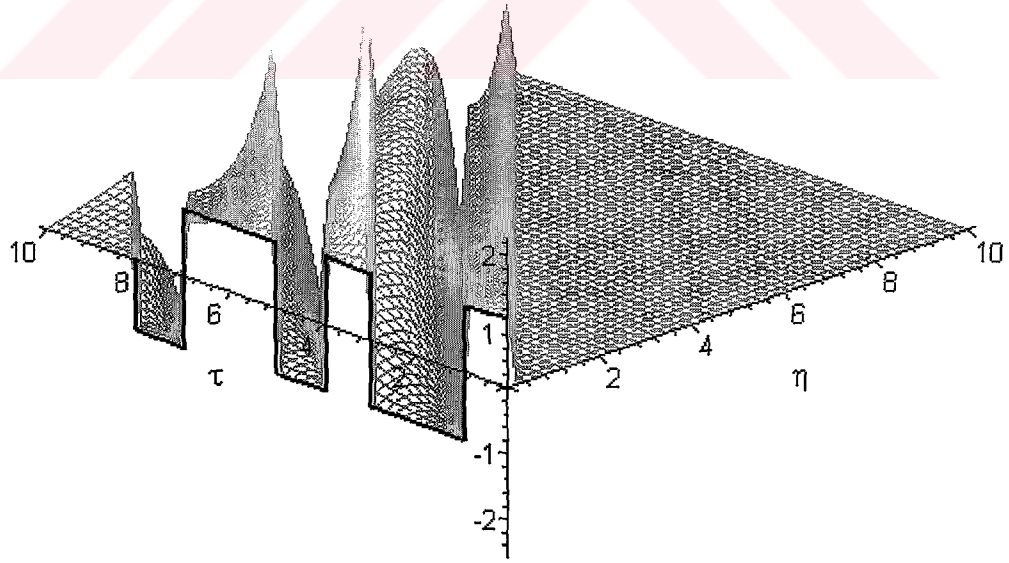


Şekil 6.10. Geometrik dispersiyonun  $\Psi(\eta, \tau)$  için dalga kılavuzu boyunca ilerleyen elektromagnetik dalgalar boyunca artan bozucu etkisi

Bir birimlik  $U(\eta, \tau)$  ve  $\Psi(\eta, \tau)$  türü kaynaklar tarafından dalga kılavuzunda uyarılan elektromagnetik dalgaların  $\eta - \tau$  düzlemi boyunca yayılımı ve dispersiyon nedeni ile bozulması üç boyutlu olarak şekil 6.11 ve 6.12'de gösterilmiştir.



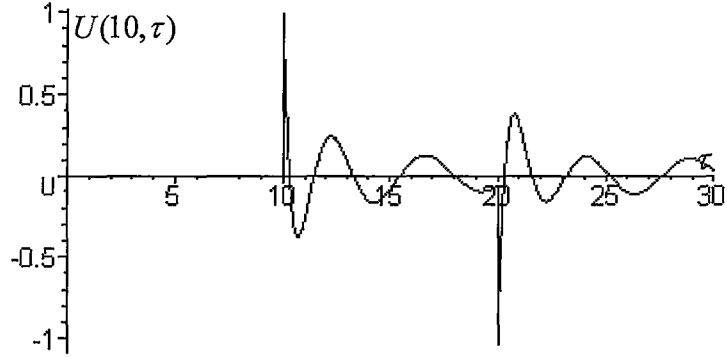
Şekil 6.11. Bir birimlik  $U(\eta, \tau)$  işaretinin  $\eta-\tau$  düzlemi boyunca yayılımı ve dispersiyon nedeni ile bozulması



Şekil 6.12.  $\Psi(\eta, \tau)$  işaretinin  $\eta-\tau$  düzlemi boyunca yayılımı ve dispersiyon nedeni ile bozulması

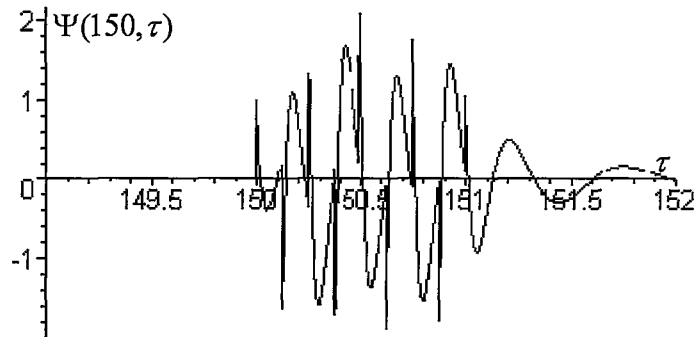


Problemin tarihçesi bölümünde anlatılan Sommerfeld öncül ve ardıl göstergeleri daha uzun gözlem zamanı veya daha uzun yayılım mesafeleri göz önüne alındığında çözümlerde izlenebilmektedir. Bu duruma örnek oluşturması için şekil 6.13’de boyutsuz ve zamanda 10 birim süreli tek bir darbenin boyutsuz 10 birim konumundan itibaren yayılımında öncül ve ardıl göstergeler gözükmemektedir.



Şekil 6.13. Boyutsuz 10 birimlik darbe'nin 10 birimlik  $\eta$  konum itibari ile  $\tau$  zamana göre değişimi

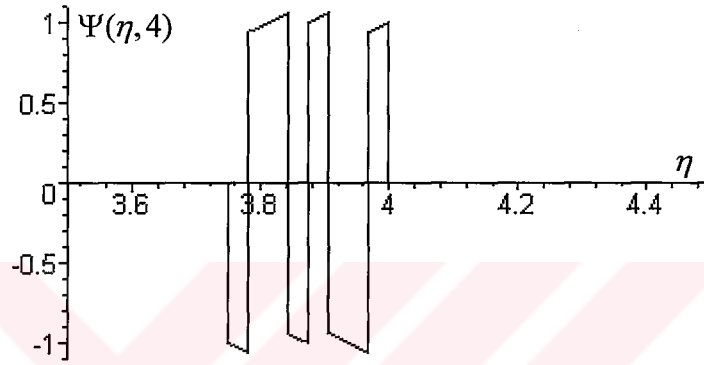
Şekil 6.13’e benzer biçimde şekil 6.4 ile verilen  $\Psi(1, \tau)$  fonksiyonunun  $\Psi(150, \tau)$  halindeki zamana göre değişimi ve karmaşık yapıdaki Sommerfeld öncül ve ardıl göstergeleri şekil 6.14’de gösterilmiştir.



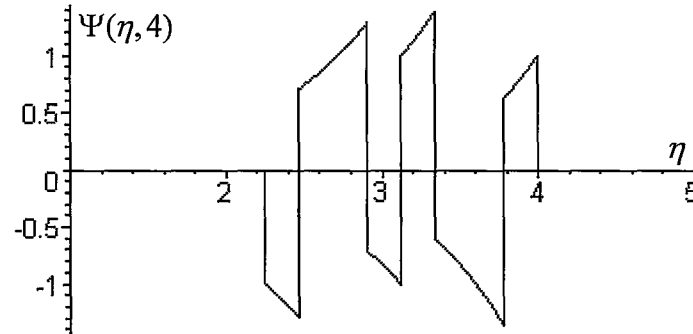
Şekil 6.14.  $\Psi(150, \tau)$ ’nin boyutsuz zamana  $\tau$  göre değişimi

### 6.6.3. Farklı Peryotlu Darbeler Üzerinde Dispersiyon Etkisi

Dalga kılavuzu geometrisi nedeni oluşan dispersiyonun yayılan işaretler üzerindeki bozucu etkisi farklı periyotlara sahip darbeler için araştırılmıştır. Buna göre (6.52) ve (6.53) denklemleri ile  $U(z,t) = U_1(z,t) - U_2(z,t)$  biçiminde birim darbe için çözüm  $\tau = \kappa ct$ ,  $\eta = \kappa z$  olmak üzere  $U(\eta, \tau)$  biçiminde kolaylık olması bakımından boyutsuzlaştırılarak boyutsuz ve birbirilerinin yedi katı fazla olan iki farklı  $\Psi(\eta, \tau)$  darbe için  $\tau = 4$  olmak üzere  $\eta$  boyunca değişim şekil 6.15 ve 6.16'da verilmiştir.



Şekil 6.15. Boyutsuz birim darbe süresi 0.03125 olan  $\Psi(\eta, \tau)$  türü uyarma için  $\tau = 4$  olmak üzere  $\eta$  boyunca değişim



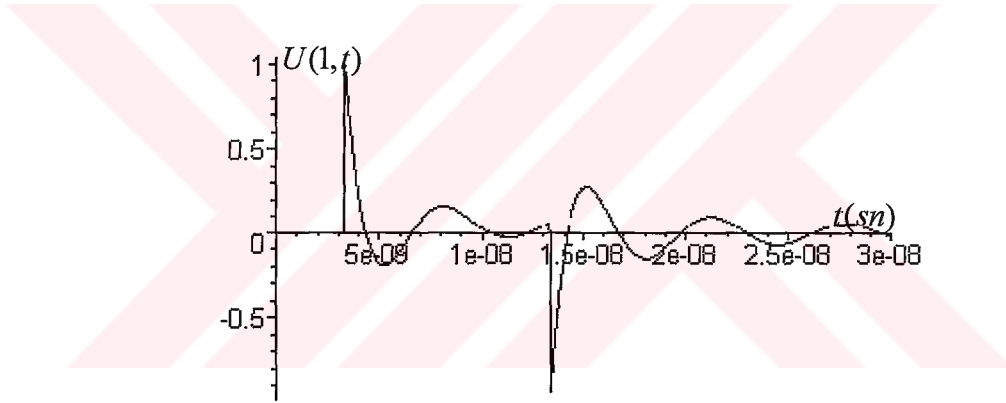
Şekil 6.16. Boyutsuz birim darbe süresi 0.21875 olan  $\Psi(\eta, \tau)$  türü uyarma için  $\tau = 4$  olmak üzere  $\eta$  boyunca değişim

Şekil 6.15 ve 6.16 kıyas edildiğinde görüldüğü gibi daha geniş birim darbeye sahip olan işaretin dispersiyon nedeni ile daha fazla bozulduğu görülmektedir. Bu durum zamanda daha uzun olan darbenin diğerine göre dispersiyona daha fazla maruz kalması nedeni ile daha fazla bozulduğu şeklinde yorumlanabilir.

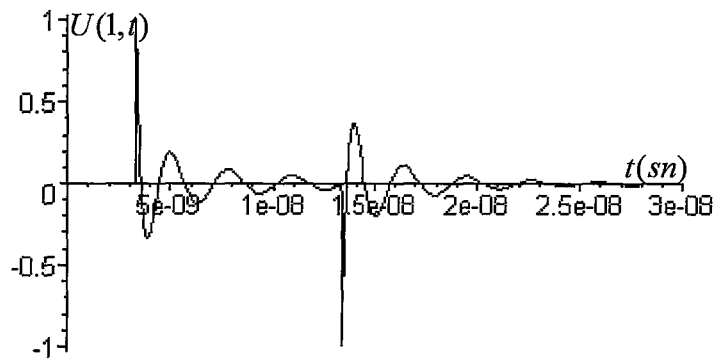


#### 6.6.4. Zaman Domeninde Kesim Frekansı'nın Etkisi

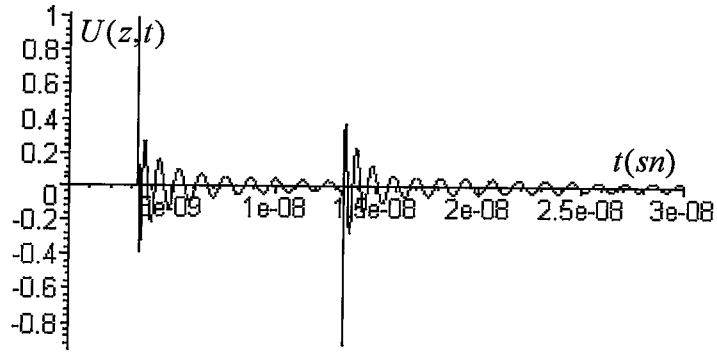
(6.38) ile ele alınan kesim frekansının, dikdörtgen kesitli bir dalga kılavuzunda zaman bağımlılığı şekil 1 ile verilen bir kaynak tarafından üretilen elektromagnetik dalgalarının yayılımına zaman domeninde olan etkisinin gösterilebilmesi için şekil 3'den itibaren kolaylık için boyutsuz halde ele alınan çözümler yerine direkt (6.52) ve (6.53) çözümleri ele alınmalıdır. Sonuçların daha iyi anlaşılabilmesi için şekil 8'e benzer biçimde tek bir darbe için kesim frekansı analizleri yapılmıştır. Buna göre  $TE_{10}$  modu için 1 metre genişliğinde sonsuz uzun bir dalga kılavuzunda  $15 \times 10^{-9}$  saniyelik bir darbe'nin yayılımı dalga kılavuzunun ilk 1 metresinde (6.44) denklemi gereği üç farklı  $\nu_{10}$  değeri için aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 6.17.  $\nu_{10} = \pi$  iken  $U(1 \text{ metre}, t \text{ saniye})$ 'nin zaman göre değişimi

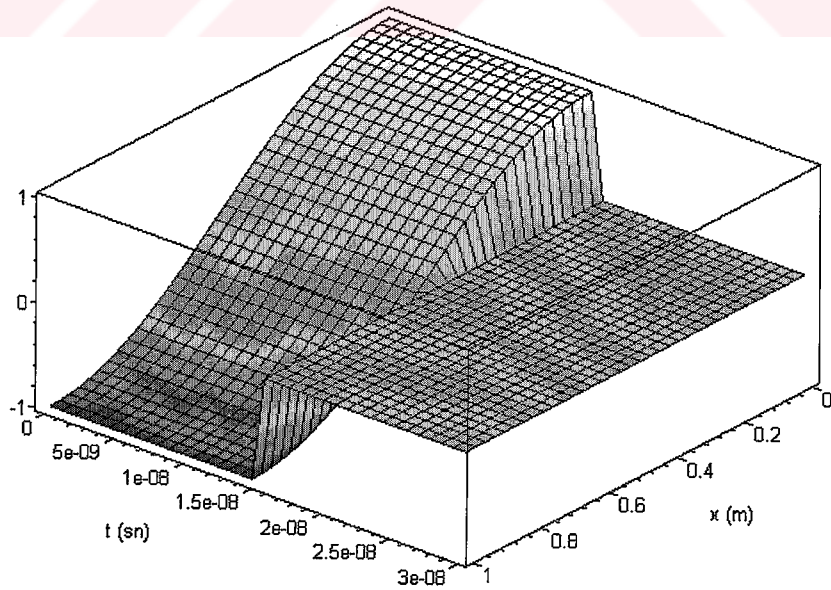


Şekil 6.18.  $\nu_{10} = 2\pi$  iken  $U(1 \text{ metre}, t \text{ saniye})$ 'nin zaman göre değişimi

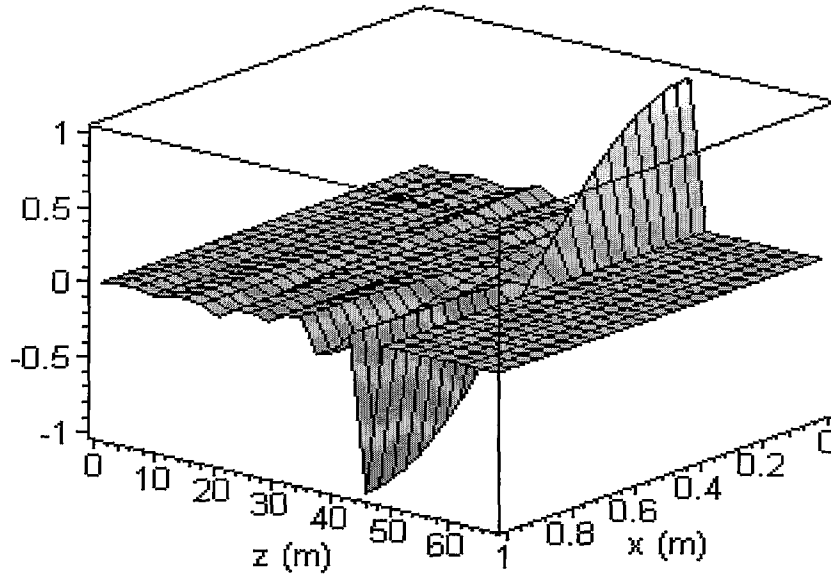


Şekil 6.19.  $v_{10} = 5\pi$  iken  $U(1 \text{ metre}, t \text{ saniye})$ 'nin zaman göre değişimi

Yukarıdaki sonuçlardan anlaşılacağı gibi kesim frekansı arttıkça birim darbe'nin alçak frekanslı harmonikleri dalga kılavuzunda sönmekte ve daha yüksek frekanslı harmonikler etkin olmaktadır. Birim darbe için kesim frekansının etkisi herhangi bir Walsh fonksiyonu içinde benzer biçimde fakat daha karmaşık olacaktır. Şekil 6.20,  $15 \times 10^{-9}$  saniyelik birim darbe için  $H_z$  komponentinin  $TE_{10}$  modu için dalga kılavuzunda  $0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$  aralığında  $x - t$  düzlemi boyunca dağılımını, şekil 6.21 ise  $E_x$  komponentinin  $x - z$  düzlemi boyunca bozulmasını göstermektedir.

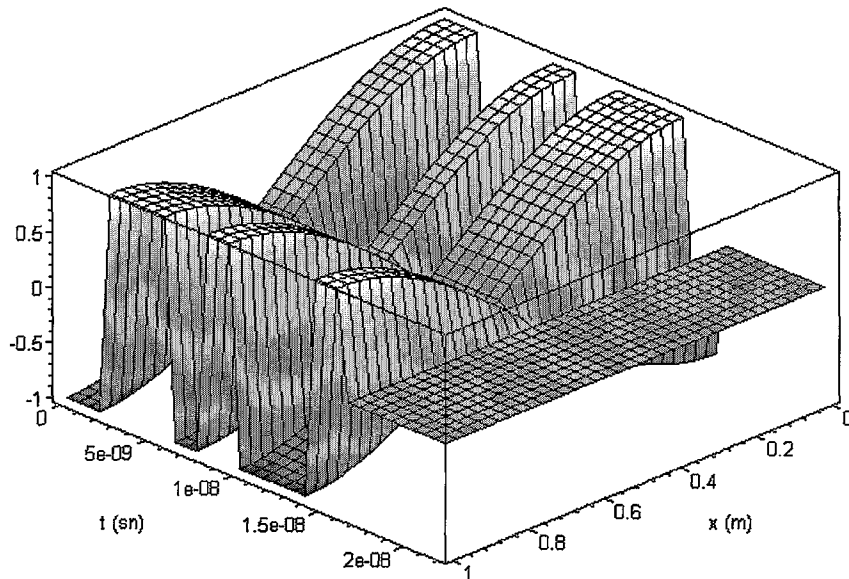


Şekil 6.20.  $15 \times 10^{-9}$  saniyelik birim darbe için  $H_z$  komponentinin  $TE_{10}$  modu için dalga kılavuzunda  $0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$  aralığında  $x - t$  düzlemi boyunca dağılımı ( $z=0$ )

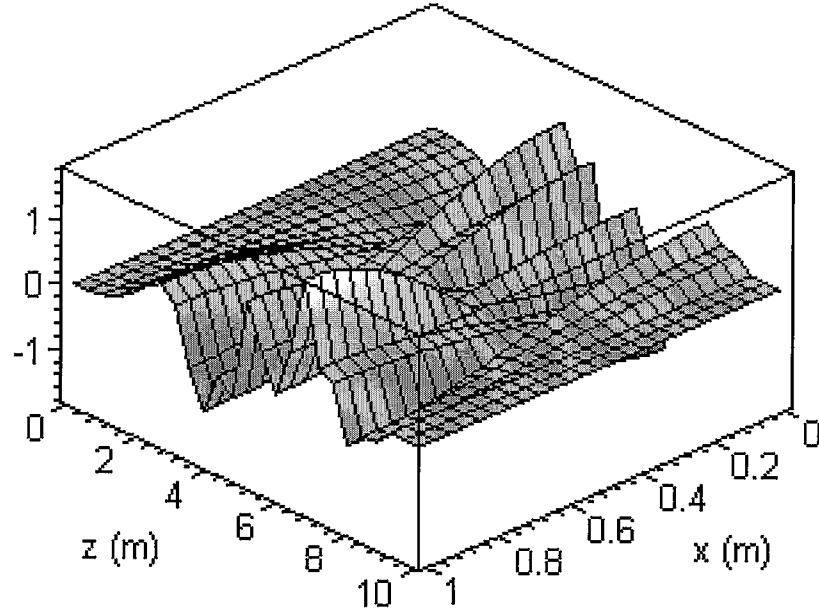
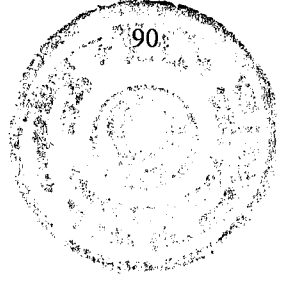


Şekil 6.21.  $15 \times 10^{-9}$  saniyelik bir darbe'nin  $TE_{10}$  modu için  $H_z$  komponentinin dalga kılavuzunda  $0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$  aralığında  $x - z$  düzlemi boyunca bozulması ( $t=15 \times 10^{-8}$  sn)

Şekil 6.22,  $16 \times 10^{-9}$  saniyelik  $Wal_5(t)$ 'nin  $TE_{10}$  modu için  $H_z$  komponentinin dalga kılavuzunda  $0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$  aralığında  $x - t$  düzlemi boyunca dağılımını, şekil 6.23 ise  $E_x$  komponentinin  $x - z$  düzlemi boyunca bozulmasını göstermektedir.



Şekil 6.22.  $16 \times 10^{-9}$  saniyelik  $Wal_5(t)$ 'nin  $TE_{10}$  modu için  $H_z$  komponentinin dalga kılavuzunda  $0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$  aralığında  $x - t$  düzlemi boyunca dağılımı ( $z=0$ )



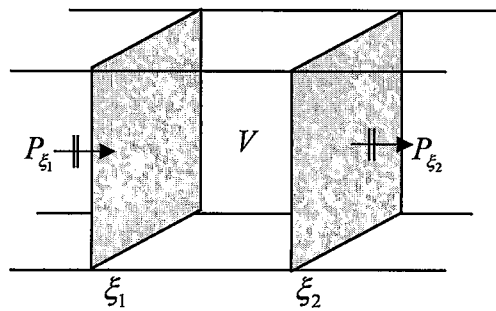
Şekil 6.23.  $16 \times 10^{-9}$  saniyelik  $Wal_5(t)$ 'nin  $TE_{10}$  modu için  $H_z$  komponentinin dalga kılavuzunda  $0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$  aralığında  $x - z$  düzlemi boyunca bozulması ( $t=3 \times 10^{-8}$  sn)

### 6.6.5. Zaman Domeninde Enerjinin Korunumu Prensibi

Zaman domeninde bulunan sonuçların doğruluklarının kontrol ve ispatı için enerjinin korunumu prensibi dalga kılavuzları için tekrar ele alınacak olursa,

$$\vec{P} = \vec{E}(\eta, \tau) \times \vec{H}(\eta, \tau)$$
$$\frac{1}{S} \int_S \vec{P}(\eta, \tau) d\vec{s} = -\frac{1}{2V} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \left\{ \epsilon_0 |\vec{E}(\eta, \tau)|^2 + \mu_0 |\vec{H}(\eta, \tau)|^2 \right\} dV \quad (6.56)$$

bulunur. (6.56)'nın dalga kılavuzu uygulanması için şekil 6.24 göz önüne alınsın.



Şekil 6.24. Dikdörtgen kesitli dalga kılavuzu için kesit görünüm



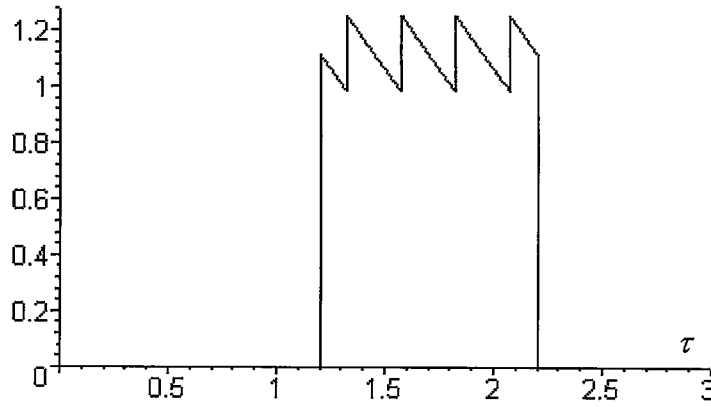
Şekil 6.24'de gösterildiği gibi dalga kılavuzu içerisinde  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  hayali düzlemleri ele alınır. Böylece dalga kılavuzunda sınırlı  $V$  hacmini kuşatan kapalı bir  $S$  yüzeyi ele alınmış olacaktır. Burada  $P_{\xi_1}$  ve  $P_{\xi_2}$  sırası ile  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  yüzeylerinden giren ve çıkan Poynting vektörlerini göstermektedir. (6.56) ifadesinde  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  yüzeylerinin normal vektörlerinin yönü dikkate alınarak (6.31) denklemi ile bulunan çözümler kullanılarak düzenlenirse,

$$\left\{ \partial_\tau F \partial_\eta F \Big|_{\eta=\xi_2-\xi_1} \right\} \frac{\kappa_n^2}{S} \int_S |\psi_m|^2 ds = \partial_\tau \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[ (\partial_\eta F)^2 + (\partial_\tau F)^2 + (F)^2 \right] d\eta \frac{\kappa_n^2}{2S} \int_S |\psi_m|^2 ds \quad (6.57)$$

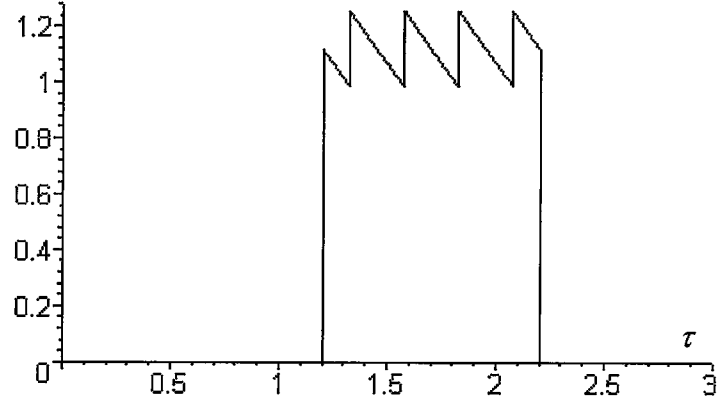
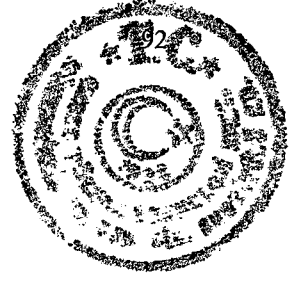
bağıntısı bulunur. (6.57) ifadesinde daha önce bulunan normalizasyon  $(\kappa_n^2 / S) \int_S |\psi_m|^2 ds = 1$  bağıntısı kullanılarak ifade yeniden düzenlenirse,

$$\left\{ \partial_\tau F \partial_\eta F \Big|_{\eta=\xi_2-\xi_1} \right\} = \partial_\tau \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[ (\partial_\eta F)^2 + (\partial_\tau F)^2 + (F)^2 \right] d\eta \quad (6.58)$$

denklemi elde edilir. (6.58) denklemi gereği yapılan hesaplamalar sonucu ilgili tüm parametrelerin rastgele alınması durumunda enerjinin korunduğu görülmüş olup, bu durumda hesapların doğruluğunu göstermektedir. Buna göre şekil 6.25 ve 6.26'de sırası ile (6.58) denkleminin sağ ve sol yanlarının eşitliği  $\xi_1 = 0$  ve  $\xi_2 = 1$  için gösterilmiştir.



Şekil 6.25. (6.58) denkleminin sağ yanının boyutsuz  $\tau$  boyunca değişimi



Şekil 6.26. (6.58) denkleminin sol yanının boyutsuz  $\tau$  boyunca değişimi



## 7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

1) Sayısal işaretlerin sonsuz uzun dalga kılavuzları boyunca yayılımlarının analizi enlemsel koordinatlara bağlı uzaysal elektromagnetik dalga komponentlerinin ve elektromagnetik dalgaların tüm komponentlerinin boylamsal koordinatlarla birlikte zamana bağımlılığının çözümleri şeklinde ayrı ayrı iki kademeli olarak zaman domeninde ele alınmıştır. İlk kademe için çözümler dalga kılavuzunun enlemsel geometrik kesitine bağlı olarak elde edilebilmekte olup dalga kılavuzunun uzay domeni modlarını tanımlar. İkinci kademede problem “*Klein-Gordon*” denkleminin çözümüne indirgenerek dalga kılavuzunun zaman domeni modlarını tanımlar.

2-) Bessel fonksiyonları tipindeki “*Neumann serileri*” biçiminde elde edilen “*Klein-Gordon*” denkleminin çözümleri nedensellik prensibi ve özel relativite teorisinin maksimum bilgi iletim hızı gereksinimlerini sağlamaktadır.

3-) Dalga kılavuzundaki elektromagnetik dalga yayılımına kaynak olan sayısal işaretler Walsh fonksiyonları biçiminde matematiksel olarak modellenerek  $z$  boylamsal ve  $t$  zamana bağlı çözümler yakınsak seriler biçiminde dikdörtgen kesitli mükemmel iletken içi boş metalik duvarlardan yapılmış dalga kılavuzları için özel olarak bulunmuştur.

4-) Söz konusu özelliklere sahip dalga kılavuzunda geometrik dispersiyonun bozucu etkisi Walsh fonksiyonları biçiminde matematiksel olarak modellenen sayısal işaretler üzerinde sabit  $z$  konumları ve değişen  $t$  zamanları boyunca zamanda öncül alçak frekanslar, sabit  $t$  zaman ve değişen  $z$  konumları boyunca uzayda öncül yüksek frekanslar biçiminde gözlenmiştir.

5-) Literatürde oldukça zayıf olarak biçimde bahsedilen Sommerfeld öncül ve ardıl göstergeleri çözümlerde gözlenerek kesim frekansının yayılan işaretler üzerindeki etkisi zaman domeninde gösterilmiştir.

6-) Geometrik dispersiyonun işaret üzerindeki istenmeyen etkisi yayılım mesafesi ve gözlem zamanı arttıkça artan bir karakter göstermekte olup, belirli zaman ve

konumlardan sonra artık yayılan işaretin giriş işaretine benzer şekilde algılanamayacağı sonuçlardan görülebilmektedir. Bu durum özellikle uzak mesafe haberleşmesinde alınan bilgi işaretinin çözümlenememesine ve iletim kanalına bağlı olarak izin verilen bilgi aktarım hızının düşmesine neden olmaktadır. Yine dispersiyonun istenmeyen etkisinin zamanda daha geniş darbe katarları üzerinde daha fazla, daha dar darbe katarları üzerinde ise daha az olduğu gösterilmiştir.

7-) Elde edilen sonuçların doğruluğu zaman domeninde enerjinin korunumu prensibinin elde edilen çözümler bakımından yeniden düzenlenerek kontrol edilmesi sonucu ispat edilmiştir.

8-) Yukarıdaki çözümlerin elde edilmesinde kullanılan metot zaman bağımlılığı ve enlemsel kesiti rastgele olan dalga kılavuzlarında zaman domeninde analizler yapılmasına olanak sağlamaktadır. Çalışmalar kayıpsız dalga kılavuzları yanısıra kayıplı dalga kılavuzları içinde genişletilebilir. Dalga kılavuzunun enlemsel kesitlerinin ayrıştırılabilen koordinatlarda verilmemesi durumunda sonlu elemanlar metodu gibi sayısal bir metot yardımı ile söz konusu dalga kılavuzunun öz değerleri bulunarak zaman domeni çözümleri önerilen metot ile sağlanabilir.

10-) Yine dalga kılavuzlarının lineer olmayan, zamana bağlı veya bellekli ortamlar v.b. malzemelerle doldurulması durumunda zaman domeninde analitik çözümleri önerilen metot ile mümkün gözükmemektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*Study of a Time Variant Cavity System*”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol: 16, No: 11, pp:1535-1553, 2002.
- [2] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*The Evolution Equations in Study of the Cavity Oscillations Excited by a Digital Signal*”, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. XX, No. YY , pp. ZZ, Şubat 2004.
- [3] Aksoy S. “*Zamana Bağlı bir İşaret Tarafından Kavite İçerisinde Üretilen Osilasyonlar*”, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 1999.
- [4] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*Evolution Equations for Analytical Study of Digital Signals in Waveguides*”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol. XX, No. YY , pp. ZZ, 2003.
- [5] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*Excitation of Rectangular Cavity by Walsh Function*”, Second International Conference on Electrical and Electronics Engineering”, pp. 175-177, Bursa, Turkey, 2001.
- [6] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*Walsh Waves Propagation Along Hollow Rectangular Waveguides*”, IEEE International Conference on Electromagnetic Compatibility, Istanbul, Turkey, 2004.
- [7] Beck A. C., “*Measurement Techniques for Multimode Waveguides*”, IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. 3, pp. 35-42, 1955.
- [8] Bequchamp K.G. “*Walsh Function and Their Application*”, Academic Press Inc., 1975, NewYork, USA.
- [9] Bladel J.V., “*Electromagnetic Fields*”, Hemisphere, Washington, 1964.
- [10] Borisov V.V., “*Transient Electromagnetic Waves*”, Leningrad University Press, Leningrad, 1987. (Rusçada)
- [11] Brillouin L., “*Wave Propagation and Group Velocity*”, New York and London, Academic Press, 1960.
- [12] Case C. T., Haskell R. E., “*On Pulsed Electromagnetic Wave Propagation in Dispersive Media*”, IEEE Trans. on Antenna and Propagation, vol. AP-14, pp. 401-496, 1966.
- [13] Cerillo M., “*Transient phenomena in waveguides*”, MIT Research Lab., Electron. Tech. Report, vol: 33, 1948.

- [14] Cotte M., "*Propagation of a Pulse in a Waveguide*", *Onde Elec.*, vol.34, pp. 143-146, 1954.
- [15] Dou W. B., Yung E. K. N., "*An interesting Phenomenon in the Finite Difference Time Domain Simulation of a Gaussian Pulse Propagation in a Waveguide*", vol. 36, No.6, pp. 1307-1314, 2001.
- [16] Dvorak S. L., "*Exact, Closed-Form Expressions for Transient Fields in Homogeneously Filled Waveguides*", *IEEE Trans. Microwave Theory Techiques*, vol. 42, No. 11, pp. 2164-2170, 1994.
- [17] Dvorak S. L., Dudley D. D., "*Propagation of Ultra-Wide-Band Electromagnetic Pulses Through Dispersive Media*", *IEEE Trans. on Eletromagnetic Compatibility*, vol. 37, No. 2, pp. 192-200, 1995.
- [18] Elliot R. S., "*Pulse Waveform Degradation Due to Dispersion in Waveguide*", *IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, vol. 5, pp. 254-257, 1957.
- [19] Felsen L. B. "*Transient Electromagnetic Fields*", Springer-Verlag, NewYork, 1976.
- [20] Felsen L.B., Marcuvitz N., "*Radiation and Scattering of Waves*", Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1973.
- [21] Forrer M. P., "*Analysis of Millimicrosecond RF Pulse Transmission*", *Proceedings of the IRE*, pp. 1830-1835, 1958.
- [22] Gabriel G.J., "*Theory of Electromagnetic Transmission Structures, Part I: Relativistic Foundation and Network Formalism*", *Proc.IEEE*, vol:68, No:3, pp:354-366, 1980.
- [23] Gajewski R., "*Influence of Wall Losses on Pulse Propagation in Wave Guides*", *Journal of Applied Physics*, vol. 29, No. 1, pp. 22-24, 1958.
- [24] Goubau G., "*Electromagnetic Waveguides and Cavities*", Chapter 2, Pergamon Press, London, 1961.
- [25] Hansen T. B., Yaghjian A. D., "*Plane-Wave Theory of Time Domain Fields*", IEEE Press, New York, 1999.
- [26] Harmuth H. F., "*Nonsinusoidal Waves in Rectangular Waveguide*", *IEEE Trans.on Electromagnetic Compatibility*, vol. 26, No. 1, pp. 34-42, 1984.
- [27] Harmuth H. F., "*Nonsinusoidal Waves in Cavity Resonator*", *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, vol. 26, No.2, pp. 84-89, 1984.
- [28] Haskell R. E., Case C. T., "*Transient Signal Propagation in Lossless, Isotropic Plasmas*", *IEEE Trans. Antenna and Propagation*, vol. AP-15, pp. 458-464, 1967.

- [29] Ito M., “*Dispersion of Very Short Microwave Pulses in Waveguide*”, IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, pp. 357-264, 1965.
- [30] Khizhnyak N. A., “*Green’s Function of Maxwell’s Equations for Inhomogenous Media*”, Soviet Physics-Techn., Physics (İngilizce Çeviri), vol:58, No:7, pp:1592-1609, 1958.
- [31] Kisunko G.V., “*Electrodynamics of Hollow Systems*”, VKAS Press, Leningrad, 1949, (in Russian).
- [32] Knob C. M., Cohn G. I., “*Comment on Pulse Waveform Degradation Due to Dispersion in Waveguide*”, IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, pp. 445-447, 1963.
- [33] Knob C. M., “*Pulsed electromagnetic wave propagation in dispersive media*”, IEEE Trans. Antenna and Propagation, vol. AP-12, pp. 494-496, 1964.
- [34] Kralj D., Mei L., Hsu T-T., Carin L., “*Short-Pulse Propagation in a Hollow Waveguide: Analysis, Optoelectronic, Measurement, and Signal Processing*”, IEEE Trans. Microwave Theory Techniques, vol. 43, No. 9, pp. 2144-2150, 1995.
- [35] Kristensson G., “*Transient Electromagnetic Wave Propagation in Waveguides*”, Journal of Electromagnetic Waves and Application, vol:9, No:5/6, pp:645-671, 1995.
- [36] Kurukawa K., “*The Expansion of Electromagnetic Fields in Cavities*”, IRE Trans. Microwave Theory Technique, vol:6, pp:178-187, 1958.
- [37] Liu Y-X., Wang W-B., “*Characteristics of Propagated Double-Exponential Pulse Through Waveguide*”, vol. 33, No. 16, pp. 1390-1392, 1997.
- [38] Liu Y-X., Wang W-B., “*A Simple Model for the Propagation of Rectangular-Pulse Modulated Carrier Through a Single-Mode Homogenous Waveguide*”, vol. 19, No. 2, pp. 365-369, 1998.
- [39] Liu Y-X., Wang W-B., “*Propagation of Double-Exponential Pulse Through Debye Medium*”, vol. 43, No. 2, pp. 223-229, 2001.
- [40] Magnus W., Oberhettinger F., Soni R.P., “*Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*”, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [41] Middleton R. G., “*Troubleshooting with the Oscilloscope*”, 2nd Edition, Howard W. Sams Company, Indianapolis, 1971.
- [42] Miller Willard, Jr., “*Symmetry and Separation of Variables*”, Addison-Wesley Publication Company, Massachusetts, 1977.

- [43] Mohammadian A. H., "Time dependent Dyadic Green's functions for rectangular and circular waveguides", IEEE Trans. Antenna and Propagation, vol. AP-6, No.3, pp. 369-375, 1988.
- [44] Nerukh A.G., Scherbatko I. V. , Marciniak M., "Electromagnetics of Modulated Media with Application to Photonics", National Institute of Telecommunications Pres, Warsaw, Poland, 2001.
- [45] Russo F. A., Schoep V. R., "Measurement of Dispersion Effects on Narrow RF Pulses", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, pp. 250-251, 1964.
- [46] Saxton W.A., Schmitt H. J., "Transients in a Large Waveguide", Proceedings of the IEEE, pp. 40-41, 1963.
- [47] Schmitt H. J., "Dispersion of Pulsed Electromagnetic Waves in a Plasma", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, pp. 472-473, 1965.
- [48] Schulz-DuBois E. O., "Sommerfeld Pre and Postcursors in the Context of Waveguide Transients", IEEE Trans. Microwave Theory Techiques, vol. MTT 18, No. 8, pp. 455-460, 1970.
- [49] Shvartsburg A.B., "Single-Cycle Waveforms and Non-periodic Waves in Dispersive Media (Exact Solvable Models)", Physics, Uspekhi, vol:41(1), pp:77-94, 1998.
- [50] Slater J.C., "Microwave Electronics", Review of Modern Physics, vol.18, No. 4, pp: 441-452, 1946.
- [51] Smirnov V. I., "Course of Higher Mathematics", vol. 4, Moscow, GIFML, 1957.
- [52] Stenius P., York B., "On the Propagation of Transients in Waveguides", IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 37, No. 2, pp. 39-44, 1995.
- [53] Su W., Besieris M. I., Riad S. M., "Velocity of an RF Pulse Signal Propagation in a Waveguide", IEEE Microwave and Guided Wave Letters, vol. 2, No. 6, pp. 255-256, 1992.
- [54] Tretyakov O.A., "Evolutionary Waveguide Equations", Radiotekhnika-i Elektronika, vol:31, No:6, 1986, (in Russian) . English Translation in Soviet Journal on Communication Technology and Electronics,1986.
- [55] Tretyakov O.A. "Essentials of Nonstationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory", Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, M.Hashimoto, M.Idemen, O.A.Tretyakov, Science House Company, Tokyo, Japan, 1993.

- [56] Vaisleib Y. V., Gan S. P., "*Propagation of Radio Pulses in a Regular Single Mode Waveguide*", Telecom. Radio Eng. vol. 31/32, No.7, pp. 101-107, 1977.
- [57] Vogler L. E., "*An Exact Solution for Wave Distorsion of Arbitrary Signals in Ideal Waveguides*", Radio Science, vol. 5, No. 12, pp. 1469-1474, 1970.
- [58] Watson G.N., "*A Treatise Theory on Bessel Function*", 2<sup>nd</sup> Edition, Cambridge University Press, 1966.
- [59] Weyl H., "*The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory*", Duke Math. Journal, vol:7, pp:411-44, 1940.



## ÖZGEÇMİŞ

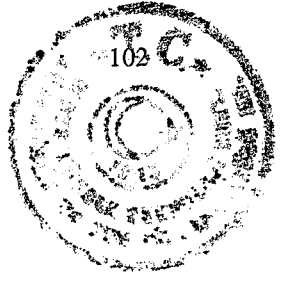
Serkan Aksoy, 1974 yılında Bolu'nun Gerede ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladıktan sonra, İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik – Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliğinden 1996 yılında mezun oldu. Daha sonra 1999 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Elektronik Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimini bitirerek aynı bölümde doktora eğitimine başladı. Serkan Aksoy, halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmakta olup, aynı zamanda yarı zamanlı olarak TÜBİTAK – MAM'da görev yapmaktadır.



## EKLER

- Ek I - Zaman Türevi

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\eta, \tau) &= J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \quad , \quad \varphi_{2n}(\eta, \tau) = \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right) \\
&= \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left\{ \frac{2n\eta}{\tau^2 - \eta^2} J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \left[ -J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + \frac{2n}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right] \right\} \\
&= \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left\{ -\tau \frac{J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2})}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} + \frac{2n}{\tau - \eta} J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right\} \\
&= \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left\{ -\tau \frac{J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2})}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau + \eta}{\tau - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{4n}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right\} \\
&= \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left\{ -\tau \frac{J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2})}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau + \eta}{\tau - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right] \right\} \\
&= \left( -\tau \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left( \frac{\tau + \eta}{\tau - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \right) J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left( \frac{\tau + \eta}{\tau - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\
&= \left( -\frac{1}{2} (\tau - \eta)^{1+n} \frac{(\tau + \eta)^{-n}}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \right) J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\
&= \left( -\frac{1}{2} (\tau - \eta)^{\frac{1}{2}} (\tau - \eta)^{n+\frac{1}{2}} (\tau + \eta)^{\frac{1}{2}} \frac{(\tau + \eta)^{-n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \right) J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\
&= \left( -\frac{1}{2} (\tau - \eta)^{\frac{1}{2}} (\tau + \eta)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \frac{(\tau - \eta)^{n+\frac{1}{2}}}{(\tau - \eta)^{n+\frac{1}{2}}} \right) J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n+\frac{1}{2}} J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) - \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n+\frac{1}{2}} J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right\} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_{2n}(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \{ \varphi_{2n-1}(\eta, \tau) - \varphi_{2n+1}(\eta, \tau) \}, \quad n \geq 1
\end{aligned}$$



$$\frac{\partial}{\partial \tau} J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) = -\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} J_1(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}), \quad n=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} J_\alpha(x) = -J_{\alpha+1}(x) + \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x), \quad J_\alpha(x) = \frac{x}{2\alpha} [J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x)]$$

- Ek II- Konum Türevi

$$\begin{aligned} \varphi_0(\eta, \tau) &= J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}), \quad \varphi_{2n}(\eta, \tau) = \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\ &\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right) \\ &= \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left\{ -\frac{2n\tau}{\tau^2 - \eta^2} J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) - \frac{\eta}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \left[ -J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + \frac{2n}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right] \right\} \\ &= \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left\{ \eta \frac{J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2})}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{2n}{\tau - \eta} J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right\} \\ &= \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left\{ z \frac{J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2})}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau + \eta}{\tau - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{4n}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right\} \\ &= \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left\{ \eta \frac{J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2})}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau + \eta}{\tau - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) - J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right] \right\} \\ &= \left\{ \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \frac{z}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left( \frac{\tau + \eta}{\tau - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \left\{ J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \left( \frac{\tau + \eta}{\tau - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \right\} \\ &= \left( -\frac{1}{2} (\tau - \eta)^{1+n} \frac{(\tau + \eta)^{-n}}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \right) J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\ &= \left( -\frac{1}{2} \frac{(\tau - \eta)}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \frac{(\tau - \eta)^n}{(\tau + \eta)^n} \right) J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\ &= \left( -\frac{1}{2} \frac{(\tau - \eta)(\tau + \eta)^{\frac{1}{2}} (\tau - \eta)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2} (\tau + \eta)^{n+\frac{1}{2}}} \right) J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\ &= - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) J_{2n+1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} J_{2n-1}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\ &\frac{\partial}{\partial \eta} \varphi_{2n}(\eta, \tau) = -\frac{1}{2} \{ \varphi_{2n-1}(\eta, \tau) + \varphi_{2n+1}(\eta, \tau) \}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial}{\partial \eta} J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) = \frac{\eta}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} J_1(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}), \quad n=0$$
$$\frac{\partial}{\partial x} J_\alpha(x) = -J_{\alpha+1}(x) + \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x), \quad J_\alpha(x) = \frac{x}{2\alpha} [J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x)]$$

- Ek III – Neumann Serilerinin Yakınsaklığı

$$\begin{aligned} \Psi(\eta, \tau) &= J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n J_{2n}(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) \\ &\approx J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi 2n}} \left( \frac{e}{4n} \right)^{2n} (\tau^2 - \eta^2)^n, \quad n \rightarrow \infty \\ &\approx J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau - \eta)^n}{(\tau - \eta)^n} (\tau - \eta)^n (\tau + \eta)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi 2n}} \left( \frac{e}{4n} \right)^{2n} \\ &\approx J_0(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left( \frac{e(\tau - \eta)}{4n} \right)^{2n} \\ \left( \frac{e(\tau - \eta)}{4N} \right)^{2N} < 1 &\Rightarrow N > \frac{e}{4}(\tau - \eta), \quad e \approx 2.8 \end{aligned}$$