

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



KARARLI SIKIŞTIRILAMAYAN NAVIER-
STOKES DENKLEMLERİNİN YÜKSEK
DERECELİ SIKI FORMÜLASYON İLE
ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR YÖNTEM GELİŞTİRME

Cihan GÖKÇÖL
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ENERJİ SİSTEMLERİ ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd.Doç.Dr. Ercan ERTÜRK

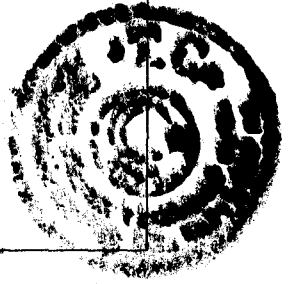
GEBZE

2006



GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU



Cihan GÖKÇÖL'ün tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03.01.2006 Tarih ve 2006/01 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından Enerji Sistemleri Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Ercan ERTÜRK

ÜYE

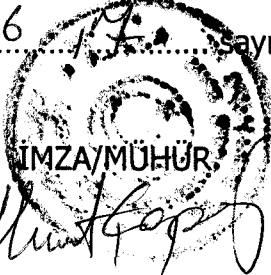
:Doç. Dr. Selim SİVRİOĞLU

ÜYE

:Yrd. Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
16.02.2006 Tarih ve 2006/01 sayılı kararı.



ÖZET

Bilgisayar teknolojisindeki hızlı ilerleme, süper olarak adlandırılan ve saniyede milyonlarca işlem yapma özelliğine sahip bilgisayarların geliştirilmesi ile birlikte Hesaplamalı akışkanlar dinamiği (CFD) alanında da gözle görülür ilerlemeler kaydedilmiştir. Hesaplamalı akışkanlar dinamiği, akışkanlar dinamiği alanında ki mevcut akışkan akışı problemlerini çözmede klasik, deneysel yöntemlere alternatif olma niteliğine erişmeye çok yakındır çünkü bilgisayar destekli çözüm yöntemi, deneysel yöntemle kıyasla işin içinde hata yapmaya müsait insan faktörü olmadığından, tüm işi bilgisayar yaptığı için daha doğru sonuçlar elde etmeye imkân tanır, daha az maliyetlidir ve daha hızlı olması zaman bakımından tasarrufta bulunmayı sağlar.

Bilgisayar alanındaki gelişmelere paralel olarak CFD ile birlikte sayısal yöntem alanında da ciddi ilerlemeler olmuştur. İşte, HOC da tüm bu saymış olduğumuz gelişmelere bağlı olarak ortaya çıkmış ve CFD alanında popülerlik kazanmıştır.

Bu çalışmada, kararlı 2-boyutlu Navier-Stokes denklemlerini çözmek için yüksek dereceden, yeni, sıkı bir yaklaşım sunuyoruz. Bu yöntemle 9 noktalı şablon içerisinde daha doğru sonuçlar elde etmek mümkündür ve bunun yanında, aynı doğruluk derecesine sahip sıkı olmayan geleneksel yöntemlerde (4. dereceden 5 noktaya ayırma işlemi) söz konusu olan, sınıra yakın noktalarda ortaya çıkan tekillik problemi aşılmış olur. Literatürde mevcut diğer sıkı yaklaşımlar [2], [3], [4], [5] ve [6]' dan farklı olarak, bu yaklaşım sahip olduğu denklemsel form sayesinde kullanım esnekliğine sahiptir. Bu yönü, onun diğer benzer yaklaşımların eksikliklerini kapatmasını sağlamaktadır ve diğerlerinin aksine, bu yönü sayesinde literatürde yer alan bütün ikinci dereceden iterasyon yöntemlerinin kendisine uygulanmasına imkan vermektedir. Neticesinde, 4. dereceden doğrulukta sonuçlara ulaşmamızı sağlamaktadır.

Bu çalışmada geliştirmiş olduğumuz yeni, sıkı sonlu fark yaklaşımını literatürde çok sıkça başvurulmuş kavite akışı problemi üzerinde test ettik ve sonuçları literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırdık.

SUMMARY

The obvious advances in computational fluid dynamics (CFD) has been made, together with the great advance in computer technology and development of well-qualified super-computers. CFD is getting closer to be alternative to the conventional, experimental methods applied to the available fluid flow problems because computer based methods which is excluding human factor, is able to present better results and is operated at low cost compared with the conventional ones, and is so fast that it lets us save remarkable time.

High Order Compact (HOC) formulations are becoming more popular in Computational Fluid Dynamics (CFD) field of study.

In this study, we will present a new higher order compact scheme for the steady 2-D incompressible Navier-Stokes equations. With this scheme, it is possible to obtain more accurate solutions in a 3X3 compact stencil and this type of compact formulations do not have the complexity near the boundaries that a standard wide (five point) fourth order formulation would have.[1] The difference of this formulation with [2], [3], [4], [5] and [6] is not in the way that the fourth order compact scheme is obtained. The main difference, however, is in the way that the final form of the equations are written. The main advantage of this formulation is that, any iterative numerical method used for Navier-Stokes equations, can be easily applied to this new HOC formulation, since the final form of the presented HOC formulation is in the same form with the Navier-Stokes equations. Moreover if someone already have a second order accurate ($O \Delta x^2$) code for the solution of steady 2-D incompressible Navier-Stokes equations, using the presented formulation, they can easily convert their existing code to fourth order accuracy ($O \Delta x^4$) by just adding some coefficients into their existing code.

With this new compact formulation, we have solved the steady 2-D incompressible driven cavity flow at different Reynolds numbers. Furthermore, we have compared the solutions of HOC scheme with the those of other methods in literature.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda beni destekleyen ve her türlü konuda bana yardımcı olan danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ercan ERTÜRK'e fikirlerini paylaştığımız çalışma arkadaşım Arş. Gör. Bahtiyar DURSUN, Işlay ULUSOY, Arş. Gör. Kadir DURGUT ve Uzman Ferit FIÇICI'ya, teşekkür ediyorum.

Aynı zamanda her daim desteklerini esirgemeyen Enerji Sistemleri Mühendisliği, Kimya Mühendisliği bölümündeki çalışma arkadaşlarıma da çok teşekkür ediyorum.

Ayrıca sabırla beni bu günlere yetiştiren ve her zaman yanımda olan annem Naile GÖKÇÖL, babam Yaşar GÖKÇÖL' e ve her daim yanımda olan bana destek olan ailemin diğer fertlerine en içten dileklerimle teşekkür ediyorum.

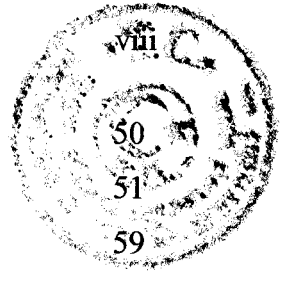
OCAK, 2006

Cihan GÖKÇÖL

İÇİNDEKİLER DİZİNİ



	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. NAVIER-STOKES DENKLEMLERİ	5
2.1. Navier-Stokes Denklemleri Elde Edilişi	6
2.2. Akım fonksiyonu-Vorticity formunda Navier -Sokes Denklem Takımı	10
3. SONLU FARK YÖNTEMLERİ	11
3.1. Sonlu Fark Yöntemi	11
3.1.1. İleri-Fark Yaklaşımı	12
3.1.2. Geri-Fark Yaklaşımı	12
3.1.3. Merkez-Fark Yaklaşımı	13
3.2. Çapraz Türev ifadelerinin sonlu fark yöntemleri ile gösterilmesi	15
4. KAVİTE AKIŞI PROBLEMİ	16
4.1. Kare Kavite Akışı	16
4.2. Kare Kavite Sınır Şartları	17
4.2.1. Thom Yöntemi	19
4.2.2. Störthkuhl Yöntemi	23
5. YÜKSEK DERECEDEDEN SIKI (YDS) YAKLAŞIM	24
5.1. YDS Yaklaşımı Uygulaması	24
6. GAUSS-SEIDEL RELAXATION YÖNTEMİ	38
6.1. Gauss-Seidel Yöntemi	38
6.2. Gauss-Seidel Relaxation Yönteminin 4. Dereceden Sıkı Yaklaşımına Uygulanması	40
7. UYGULAMA	47



7.1. Akış Diyagramı

7.2. Grafikler ve Tablolar

8. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ

EK-I

61

63



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ



u	:x- yönündeki hız bileşeni
v	:y- yönündeki hız bileşeni
ψ	:Akım fonksiyonu
ω	:Vortisiti
p	:Basınç
ρ	:Yoğunluk
R_e	:Reynolds Sayısı
Δx	:(i+1) ve (i) noktaları arası mesafe
τ_E	:Kesme Hatası
w	:Relaxation terimi
$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$	: f 'nin x ' e göre n. dereceden türevi
$\mathcal{O}(\Delta x^2)$	: Doğruluk derecesi (2. Dereceden)
$\mathcal{O}(\Delta x^4)$	: Doğruluk derecesi (4. Dereceden)
H	: Hayali Nokta (Thom Yöntemi)
0	: Sınırdaki nokta (Thom Yöntemi)

ŞEKİLLER DİZİNİ



Sekil

1.1	3x3 Sıkı şablon	2,24
2.1	Hız Bileşenleri	6
3.1	İleri-Fark Yöntemi	12
3.2	Geri-Fark Yöntemi	12
3.3	Merkez-Fark Yöntemi	13
4.1	Kavite Akışı Olayı	16
4.2	Sınır şartları ve Kavite akışında ortaya çıkan vortekslerin şematik gösterimi	17
4.3	Kavite sınırlarında Akım fonksiyonunun durumu	18
4.4	Sınır 1’de ki durum	19
4.5	Sınır 3’de 0 noktasındaki durum	20
4.6	Sınır 2’de 0 noktasındaki durum	21
4.7	Sınır 4’de 0 noktasındaki durum	22
4.8	Kavite sınırlarında Akım fonksiyonunun ve Thom yöntemine göre vortisitinin durumu	22
6.1	Bölgeyi iki eksenle hücrelere bölme	38
6.2	Gauss-Seidel yönteminde etkin olan noktalar	39
7.1	Visual Basic 6.0 bilgisayar programında Navier-Stokes denklemleri için yazılan programın ara yüzü	48
7.2	Program Akış Diyagramı	50
7.3	Reynolds sayısı 100 için Akım fonksiyonu kontur grafiği	51
7.4	Reynolds sayısı 100 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği	51
7.5	Reynolds sayısı 1000 için Akım fonksiyonu kontur grafiği	52
7.6	Reynolds sayısı 1000 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği	52
7.7	Reynolds sayısı 2500 için Akım fonksiyonu kontur grafiği	53
7.8	Reynolds sayısı 2500 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği	53
7.9	Reynolds sayısı 5000 için Akım fonksiyonu kontur grafiği	54
7.10	Reynolds sayısı 5000 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği	54
7.11	Reynolds sayısı 10000 için Akım fonksiyonu kontur grafiği	55
7.12	Reynolds sayısı 10000 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği	55

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo

Sayfa

5.1	Standart ikinci dereceden merkez-fark ayrıştırırmaları (Discretizations), $\mathcal{G}(\Delta x^2, \Delta y^2)$	28
7.1	Farklı Reynolds sayıları için Gauss-Seidel yönteminde kullanılan Beta değerleri	49
7.2	Farklı Reynolds sayıları için ilk girdaptaki (Primary Vortex) minumum Akım fonksiyonu değerleri	57
7.3	Farklı Reynolds sayıları için ilk girdaptaki (Primary Vortex) minumum Vortisiti değerleri	57
7.4	Farklı Reynolds sayıları için ilk girdaptaki (Primary Vortex) minumum Akım fonksiyonu ve Vortisiti değerlerinin $[0,1] \times [0,1]$ kavitede bulunma noktaları	58

1. GİRİŞ

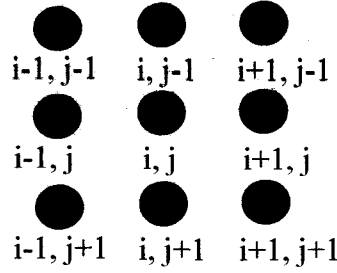
Bilgisayar teknolojisinde son 50 yılda yaşanan gelişmeler ve bunun paralelinde geliştirilen süper bilgisayarlar (super-computers) sayesinde birçok alanda yapılmakta olan işler ve çalışmalar ziyadesiyle kolaylaşmıştır ve de hızlanmıştır. İşte bu aşamada, bilgisayar teknolojilerindeki gelişmelerin olumlu yönde tesir ettiği alanlardan biri de hesaplamalı akışkanlar dinamiği, diğer bir ifade ile ve daha çok bilinen ismi ile CFD (Computational Fluid Dynamics) olmuştur.

Bilgisayar ortamında, mevcut problemi gerçeğine uygun olacak şekilde canlandırmak suretiyle var olan problemlerin çözümü hem kolay bir hale gelmiştir, hem zaman bakımından önemli sayılabilecek bir tasarruf sağlanmıştır yani istenilen sonuçlara daha hızlı erişmeye imkan tanınmıştır hem de klasik yollarla bu türde bir çalışma yaparken ortaya çıkan azımsanmayacak boyuttaki maliyetlerde asgariye indirilmiştir.

Bilgisayar teknolojisinde yaşanan bu gelişmelerin CFD alanına oldukça ciddi yansımaları, zaman içerisinde CFD'nin bir bilim dalı olarak adlandırılmasına neden olmuştur. Bu da, bilgisayar teknolojisinde görülen gelişmelerin bizi ilgilendiren önemli etkilerinden biridir. Şu ana kadar, bilgisayar teknolojisindeki mevcut gelişmelere paralel olarak CFD'nin gelişme gösterdiğinden bahsettik.

Bilgisayar teknolojisinde kaydedilen ilerlemeler tabii ki sadece CFD alanına tesir etmemiştir CFD alanı ile yakından bağlantılı olan sayısal analiz alanında da ciddi ilerlemeler gerçekleşmiştir. Gelişmiş, süper olarak adlandırılan bilgisayarların ortaya çıkması, diferansiyel denklemler içeren her türlü karmaşık problemi, bu gelişmelerin paralelinde geliştirilen yeni, gelişkin yöntemler sayesinde sayısal olarak çözümlemeye ve gerçeğe oldukça yakın sonuçlar elde etmeye imkan vermiştir.

Yüksek dereceli sıkı formülasyonlar CFD alanında popülerliğini sürekli artırmaktadırlar. Sıkı formülasyonlar Şekil 1.1'deki gibi sıkı şablonda olduklarından (9 noktalı yapıda) daha doğru çözümler sağlamaktadır.



Sekil 1.1. 3x3 Sıkı şablon

Sonlu fark yönteminde, klasik 3 nokta ayrıştırma (discretization) işlemi ikinci dereceden doğrulukta sonuçlar sunmaktadır ve bu tip yaklaşım başvuru sırasında daha genişçe kullanılmaktadır. Yüksek dereceden yaklaşım gerektiğinde, mesela dördüncü dereceden, klasik anlayışta bu durumda 5 nokta ayrıştırma işlemi kullanılmak zorundadır. Fakat, 5 nokta ayrıştırma işleminde Kavite sınırına yakın noktaların ele alınışında tekillik (singularity) olarak adlandırılan zorlu durum söz konusu olmaktadır[1].

Yüksek dereceli sıkı yaklaşım, Şekil 1’de gösterilen 3x3 sıkı şablonda 4. dereceden doğruluk sağlamaktadır ve diğer 4. dereceden yaklaşımda sınıra yakın noktalarda ortaya çıkan zor durum bu tip sıkı yaklaşımda söz konusu olmamaktadır[1].

Dennis ve Hudson [2], MacKinnon ve Johnson [3], Gupta ve diğ. [4], Spotz ve Carey [5] ve Li ve diğ. [6] yüksek dereceden sıkı yaklaşımların ne ölçüde etkili olduğunu göstermişlerdir.

Yapmış olduğumuz bu çalışma ile gerçeğe oldukça yakın sonuçlar elde etme imkanı tanıyan yeni, sıkı (9 noktalı şablon yapı söz konusudur) 4.dereceden hassasiyette sayısal bir yaklaşım [1] literatüre sunuyoruz. Bölüm 1’de bahsi geçen ve detaylı olarak tanımlanan ve geliştirilmiş olan bu tür yaklaşımların doğruluğunu test etmek için sıkça başvuru kavite akışı problemi, sunulan bu yaklaşımla ve beraberinde Gauss-Seidel Relaxation yöntemi ile ele alınıp, sayısal olarak çözülmüştür. Buna ilave olarak, literatürde HOC esaslı çalışmalar kaydeden kişilerin geliştirmiş olduğu yaklaşımlarla olan farkı, onlara karşı üstün olan yanları, literatüre kattığı değer üzerinde de durulmuştur ve özellikle literatüre sunulan bu değerli katkının birçok gelişmeye önayak olacak nitelik taşıması özelliğinin altı çizilmiştir.

Bu tez çalışmasında, ikinci bölümde, ele aldığımız kavite akışı problemini matematiksel olarak modellememizi sağlayan 2-boyutlu, sıkıştırılmaz (akışkan yoğunluğu sabit) Navier-Stokes denklemleri üzerinde durulmuştur ve sonrasında bu denklem takımının birtakım dönüşümler yapmak suretiyle istediğimiz gösterim biçimi olan $\psi - \omega$ (Akım fonksiyonu- Vortisiti) formunda nasıl gösterildiği ortaya konulmuştur.

Üçüncü bölümde, kısaca belirtmek gerekirse, geliştirilen yaklaşımın uygulama aşamasında çok sıkça başvurulmuş sonlu fark yöntemlerinin temelini teşkil eden İleri fark, Geri Fark ve Merkez Fark yöntemlerinin Taylor açılımından yola çıkarak türetilişi buna bağlı olarak birinci ve ikinci dereceden türev ifadelerinin ve çapraz türev ifadelerinin ($\omega_{xy}, \omega_{xy}, \omega_{xy}, \omega_{xy}$) sonlu farklar ile gösterilişi üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde, literatürde bu alanda çalışan bilim adamlarının yaptıkları çalışmaları, geliştirdikleri yöntemleri ve yaklaşımları test etmek ve doğruluğunu görmek için ele aldıkları problem tipi olan Kavite akışı problemi çok fazla detayına inmeden tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde, bu çalışmanın esasını oluşturan ve bizim tarafımızdan geliştirilmiş olan yeni, sıkı ve gerçeğe daha yakın çözümler elde etmeyi sağlayan yüksek dereceli sıkı formülasyonun türetilme ve geliştirilme aşamaları adım adım gösterilmiştir. Ardından, bunun model denklemimiz olan N-S denklemlerine uygulanışı üzerinde durulmuştur.

Altıncı bölümde, kavite akışı probleminin çözümü sırasında beşinci bölümde detaylı olarak anlatılan yüksek dereceli sıkı yaklaşım ile beraber kullanacağımız sayısal yöntem, Gauss-Seidel Relaxation yönteminin temel denklemsel ifadesi, genel nitelikleri, ısı denklemine uygulanışı üzerinde durulmuştur. Ayrıca, Gauss-Seidel Relaxation yönteminin geliştirilen 4. dereceden hassasiyetteki sıkı yaklaşıma uygulaması son iterasyon denklemleri ($\psi_{i,j} - \omega_{i,j}$) elde edilene kadar adım adım gösterilmiştir.

Uygulamalar olarak adlandırılan yedinci bölümde, daha önceki bölümlerde detaylı olarak anlatılan, tarafımızca geliştirilen ve literatüre sunulan yüksek dereceli sıkı yaklaşım ile değişik senaryolar için kavite akışı probleminin çözümlerine yer verilmiştir. Kavite'nin bazı spesifik noktalarındaki durum incelenmiştir. Kavite akışını ifade eden grafikler çizilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde bulunan diğer sonuçlarla kıyaslanmıştır.

Sekizinci ve son bölüm olan sonuçlar ve değerlendirme bölümünde, geliştirilen yaklaşımın önemi vurgulanmakta olup literatüre olan katkısı üzerinde önemle durulmuştur. Elde edilen bulguların literatürde yer alan diğer çalışmaların bulgularıyla ne denli uyum içinde olduğu ifade edilmiştir. Buna ilave olarak geliştirilen yaklaşımın nihai halinin form olarak esneklik arz etmesi, bu yaklaşımın literatürde yer alan Gauss-Seidel dışındaki diğer tüm yöntemlerle (2. dereceden) beraber kullanılmasına imkan vermektedir. Geliştirilen yaklaşımın bu özel yanı, bu yaklaşıma popülerlik kazandıracağı önemle vurgulanmıştır.

2. NAVIER-STOKES DENKLEMLERİ

Sıvı ve gaz gibi akışkan maddelerin akışını tanımlayan Navier-Stokes denklemlerinin ismi Claude Louis Navier ve Gabriel Stokes'dan ileri gelmektedir. Navier-Stokes denklemleri basitçe akışkanın herhangi bir bölgesine etkiyen kuvvetler dengesinin dinamiksel ifadesidir[7]. Akışkanlar dinamiği alanında Navier-Stokes denklemleri en kullanışlı denklem takımlarından biridir çünkü hava modellemesi, boru içinde su akışı, galakside yer alan yıldızların hareketi ve kanat çevresindeki hava akışının modellemelerine imkan vermektedir. Navier-Stokes denklemleri, akışkanlar dinamiği alanında çok sıkça kullanılmakta ve değişik geometrili fiziksel ortamlardaki akışkan akışını matematiksel olarak modellemeye imkân vermektedir. Akışkanın ilgili fiziksel ortamın her noktasında sergilemiş olduğu akışkan davranışının mümkün olduğunca hassas gözlemlenmesi için ortamın gerçeğine çok yakın olacak şekilde taklit edilmesi gerekmektedir. Mevcut fiziksel ortamı canlandırmada ortamın taşıdığı fiziksel gerçeklere uygun olarak modelleme esnasında, akış denklemi olarak da bilinen 2-Boyutlu sıkıştırılmaz Navier-Stokes denklemleri kullanılmaktadır.

Bu bölümde, ele aldığımız kavite akışı problemini matematiksel olarak modellememizi sağlayan 2-boyutlu, sıkıştırılmaz (akışkan yoğunluğu sabit) Navier-Stokes denklemleri üzerinde durulmuştur ve sonrasında bu denklem takımının birtakım dönüşümler yapmak suretiyle istediğimiz gösterim biçimi olan $\psi - \omega$ (Akım fonksiyonu- Vortisiti) formunda nasıl gösterildiği ortaya konulmuştur.

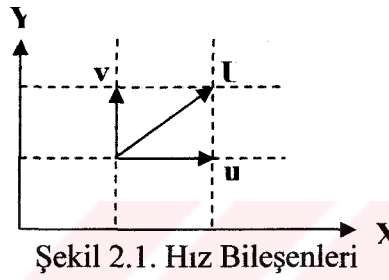
2.1 Navier-Stokes Denklemleri Elde Edilişi

İki boyutlu sıkıştırılamaz, kararlı akış denklemlerinin elde edilmesi sırasında kullanılmakta olan ve akışkanlar dinamiği biliminin temelini teşkil eden denklemler [8];

- Süreklilik Denklemleri
- Momentum denklemleri

Süreklilik Denklemleri

Şekil 2.1 hız bileşenleri olan u ve v ' yi göstermektedir.



u , x- yönündeki hız bileşeni

v , y- yönündeki hız bileşeni

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

(2.1) denklemi süreklilik denklemi olarak adlandırılmaktadır.

Momentum Denklemleri

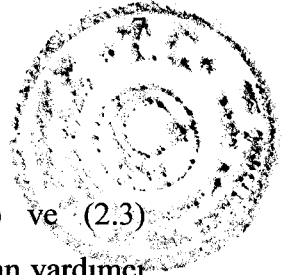
x- yönünde

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.2)$$

y- yönünde

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.3)$$

Boyutsuzlaştırma



Bir sonraki aşama olan boyutsuzlaştırma aşamasında, (2.2) ve (2.3) denklemlerini boyutsuz hale getirmek için aşağıda boyutsuz halde yer alan yardımcı denklemleri kullanırız.[8]

$$x = \frac{x^*}{L} \quad (2.4a)$$

$$y = \frac{y^*}{L} \quad (2.4b)$$

$$u = \frac{u^*}{U} \quad (2.4c)$$

$$v = \frac{v^*}{U} \quad (2.4d)$$

$$p = \frac{p^*}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (2.4e)$$

(2.4a)-(2.4e) boyutsuz denklemlerini, (2.2) ve (2.3) denklemlerinde uygun yerlere koymak suretiyle kullanırsak,

$$uU \frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial x} + vU \frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{U^2}{L} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.5)$$

elde edilir.

(2.5) denkleminde uygun sadeleştirmeleri yaparsak ve sonrasında eşitliğin her iki

tarafını $\frac{L}{U^2}$ ile çarptığımızda $\frac{U^2}{L}$ ifadelerinden kurtuluruz ve nihayetinde (2.6a)

denklemini elde edildikten sonra denklem (2.7) denklemine ulaşılır.

$$\left[\frac{U^2}{L} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U^2}{L} v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \left[-\frac{U^2}{L} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{U}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \frac{L}{U^2} \quad (2.6a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{UL} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.6b)$$

$$R_e = \frac{UL}{\nu}$$



(2.6c) denklemi Reynolds sayısı eşitliği olarak adlandırılır. Reynolds sayısı akışkanlar dinamiği alanında yer alan en önemli boyutsuz sayıdır ve akışkan akış tipini (Laminer ve Türbülanslı akış) belirlemede en önemli belirleyici unsurların başında gelir.

(2.6c) denklemini (2.6b) denkleminde yerine koyarsak,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.7)$$

elde edilir.

(2.2) denklemi için gerçekleştirmiş olduğumuz boyutsuzlaştırma işlemi neticesinde (2.7) denklemini elde etmiş olduk. Aynı işlemlerden (2.3) denklemini de geçirirsek, yani onu da boyutsuz hale getirirsek (2.8) denklemi elde edilir.

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

Boyutsuzlaştırmanın ardından yaptıklarımızı toparlarsak denklem takımı aşağıdaki gibi olur.

Boyutsuz formda Navier-Stokes denklemleri:

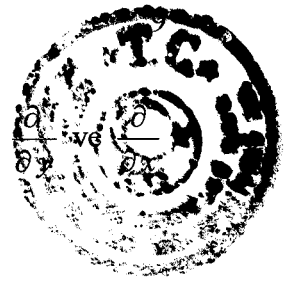
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

Simdi ise, (2.9) denkleminde ifade edilen ve 3 denklemden oluşan Navier-Sokes denklemlerini birtakım matematiksel işlemlerden geçirerek, basınç terimlerinden kurtarıyoruz ve böylelikle denklem sayısı ikiye iner. Bu sayede, bir denklemden kurtulmuş olunur ve böylece çözüm elde etmek daha kolay bir hale

gelir. Öncelikle, (2.9) denkleminde yer alan son iki denklemi sırasıyla
ile türetelim.



$$\frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.11)$$

Elde ettiğimiz ikinci denklemi, yani (2.11) denklemini (2.10) denkleminden çıkarttığımızda, başta var olan denklemlerin birinden kurtulmuş oluruz. Ve 2 denklemden meydana gelen Navier-Stokes denklem takımı elde edilecektir. Bu denklem takımı (2.12) denkleminde gösterilmiştir.

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.11b)$$

(2.10b) denklemini (2.11b) denkleminden çıkarırsak ve $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ olduğundan

dolaylı (2.12) denklemine ulaşılır.

$$u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

Navier-Stokes denklemlerinin son hali aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.13)$$

2.2. Akım fonksiyonu-Vortisiti $(\psi - \omega)$ formunda Navier-Stokes denklem takımı

$(\psi - \omega)$ formunda Navier-Stokes denklemlerini göstermemizin gerekçesi, görüldüğü üzere 3 adet denklem bulunmakta, denklem sayısının 3 olması haliyle bundan sonraki aşamalarındaki işimizi oldukça zorlaştıran bir unsur olmaktadır. Bu bağlamda, $(\psi - \omega)$ biçiminde bir dönüşüm yaparak hem var olan denklem sayısını bir azaltmış yani denklem sayısını ikiye indirmiş oluyoruz hem parametre sayısını indirmiş oluyoruz hem de denklem takımını daha kolay işlem yapılabilir hale sokmuş oluyoruz.

Aşağıda yer alan yardımcı dönüşüm denklemlerinin yardımıyla

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.14a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.14b)$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.14c)$$

Navier-Stokes denklemleri, $(\psi - \omega)$ formunda, aşağıdaki Akım Fonksiyonu (ψ) ve Vortisiti denklemi (ω) içeren denklem takımı ile ifade edilir.[8]

Akım Fonksiyonu denklemi:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \quad (2.15)$$

Vortisiti denklemi:

$$R_e \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

3. SONLU FARK YÖNTEMLERİ

Bu sayısal temelli yöntemler analitik çözüm bulmanın zor olduğu veya imkânsız olduğu diferansiyel denklem ihtiva eden denklem takımlarını çözmeye esnasında sıkça kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Literatürde yer alan sayısal yöntemler Sonlu fark yöntemleri, sonlu eleman yöntemleri vs. olarak adlandırılabilir. Bu tez çalışmasında, literatürde yer alan sayısal yöntem biçimlerinden sonlu fark yöntemleri üzerinde ayrıntılı biçimde durulacaktır. Kısaca, bu yöntem belli bir alanı, bölgeyi değişik yaklaşımlar çerçevesinde küçük parçalara bölüp ve sonrasında her bir nokta için ortaya çıkan denklemleri istenilen yöneme göre çözmeye imkân tanımaktadır.

Bu bölüm kapsamında, sonlu fark yöntemlerinin temelini oluşturan birtakım yaklaşımlardan, ileri fark, geri fark ve merkez fark yaklaşımlarının Taylor açılımı denklemsel ifadesi üzerinden türetilişleri ortaya konulacaktır. Buna ilave olarak, bu yaklaşımlarının avantaj ve dezavantajları açısından kıyaslaması yapılacaktır.

3.1. Sonlu Fark Yöntemi

Sonlu fark yöntemleri basitçe ifade etmek gerekirse Taylor türev açılımlarını temel almaktadır. Taylor serisi herhangi bir noktadaki değeri ve türevlerinin değeri bilinen bir fonksiyonun başka bir noktadaki değerini ifade eder[9].

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \quad (3.1)$$

Taylor serisi açılımı üstte yer alan (3.1) denklemi ile ifade edilmiştir.

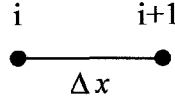
Sonlu farklar temel olarak üç yöntem üzerine kurulmuştur.

1. İleri-Fark Yaklaşımı
2. Geri-Fark Yaklaşımı
3. Merkez-Fark Yaklaşımı

Bu üç yaklaşım yardımı ile türev terimleri (df/dx , d^2f/dx^2 , ...vb.) sonlu farklar ile ifade edilmektedir. Bu türetme işlemi sırasında üç yöntemde de çıkış noktası (3.1) denklemi ile ifade edilmekte olan Taylor seri açılımıdır.

3.1.1. İleri-Fark Yaklaşımı

Şekil 3.1' de ileri-fark yönteminde kullanılan noktalar gösterilmiştir.



Şekil 3.1. İleri-Fark Yöntemi

Fonksiyonun $(i+1)$ 'daki değeri , Taylor açılımı kullanarak 4. terimden itibaren kesilmiş haliyle (3.2) denklemindeki gibi olur.

$$f(i+1) = f(i) + \frac{\Delta x}{1} \frac{df}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \frac{d^3 f}{dx^3} + (\Delta x^4) \quad (3.2)$$

Bu denklemi kullanmak suretiyle f 'nin x ' e göre 1.dereceden türevi $(\frac{df}{dx})$,

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(i+1) - f(i)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{1.2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \frac{d^3 f}{dx^3} \quad (3.3)$$

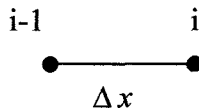
Kesme Hatası: $\frac{\Delta x}{1.2} \frac{d^2 f}{dx^2}$

Yukarıdaki denklemden anlaşılacağı üzere $\frac{df}{dx}$ fonksiyonun $(i+1)$ ve (i) deki değerlerine bağlılık göstermektedir, yani fonksiyonun o noktalardaki değerleri biliniyorsa, $\frac{df}{dx}$ 'i belli bir hata payı $(\frac{\Delta x}{1.2} \frac{d^2 f}{dx^2})$ ile hesaplamak mümkün olmaktadır.

Δx 'in derecesi burada 1, doğruluk derecesi olarak adlandırılmaktadır ve bu derece değeri ne kadar büyük olursa, türev için yazılmış olan sonlu fark ifadesi o derecede doğruya yakın hesaplamalar yapmaya imkan tanır[8].

3.1.2 Geri-Fark Yaklaşımı

Şekil 3.2' de geri-fark yönteminde kullanılan noktalar gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Geri-Fark Yöntemi

Fonksiyonun $(i+1)$ 'da ki değeri , Taylor açılımı kullanarak 4. terimde kesilmiş haliyle (3.4) denkelemi gibi olur.

$$f(i-1) = f(i) - \frac{\Delta x}{1} \frac{df}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \frac{d^3 f}{dx^3} + (\Delta x^4) \quad (3.4)$$

Bu denklemi kullanmak suretiyle f 'nin x ' e göre 1.dereceden türevi $\left(\frac{df}{dx}\right)$

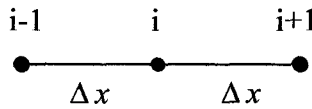
$$\frac{df}{dx} = \frac{f(i) - f(i-1)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{1.2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \frac{d^3 f}{dx^3} \quad (3.5)$$

Yukarıdaki denklemden anlaşılacağı üzere $\frac{df}{dx}$ fonksiyonun $(i+1)$ ve (i) deki değerlerine bağlılık göstermektedir, yani fonksiyonun o noktalardaki değerleri biliniyorsa, $\frac{df}{dx}$ 'i belli bir hata payı $\left(\frac{\Delta x}{1.2} \frac{d^2 f}{dx^2}\right)$ ile hesaplamak mümkün olmaktadır.

Δx 'in derecesi burada 1, doğruluk derecesi olarak adlandırılmaktadır ve bu derece değeri ne kadar büyük olursa, türev için yazılmış olan sonlu fark ifadesi o derecede doğruya yakın hesaplamalar yapmaya imkan tanır.

3.1.3. Merkez-Fark Yöntemi

Şekil 3.3' de merkez-fark yönteminde kullanılan noktalar gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Merkez-Fark Yöntemi

(i) noktasında türev ifadesini $\left(\frac{df}{dx}\right)_{(i)}$ yazarken $i, i+1$ ve $i-1$ olmak üzere 3 noktadan

faydalanmakta olduğumuz bu yöntemde $\frac{df}{dx}$ 'i ilk iki yöntemde kullanılan (3.1) ve

(3.2) denklemleri yardımıyla yazabiliriz. Burada, (3.1) denkleminde (3.2) denklemini çıkartılır ve neticesinde, (3.6) denklemini elde edilir.

$$f(i+1) = f(i) + \frac{\Delta x}{1} \frac{df}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \frac{d^3 f}{dx^3} + (\Delta x^4)$$

$$f(i-1) = f(i) - \frac{\Delta x}{1} \frac{df}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \frac{d^3 f}{dx^3} + (\Delta x^4)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{3} \frac{d^3 f}{dx^3} \quad (3.6)$$

(3.6) denkleminin sağ tarafında yer alan ve bahsedilmesi gereken bir terim olan Kesme Hatası terimi (truncation error), yazılan türev ifadesinin ne derecede hassas olduğunu göstermektedir.

$$\tau_E \cong \frac{\Delta x^2}{3} \frac{d^3 f}{dx^3} \quad (3.7)$$

Δx^2 derecesi, burada, 2 doğruluk derecesi olarak adlandırılmaktadır ve bu derece değeri ne kadar büyük olursa, türev için yazılmış olan sonlu fark ifadesi o derecede doğruya yakın hesaplamalar yapmaya imkan tanır. Görüldüğü üzere, merkez fark yaklaşımı ile yazılan türev terimleri ileri-fark ve geri fark yaklaşımları ile yazılan ifadelerle nazaran doğruluk derecesi daha yüksektir. Yani, daha doğru türev hesaplamaları yapmaya imkan vermektedir.

(3.6) denklemini (3.7) denklemi ile düzenlersek, nihayetinde (3.8) denklemine erişiriz.

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2\Delta x} + \tau_E \quad (3.8)$$

İleri-fark ve geri-fark yöntemlerinde kullanılan (3.1) ve (3.2) denklemleri aracılığıyla

$\frac{d^2 f}{dx^2}$ 'i de aşağıdaki gibi sonlu fark yöntemleri ile elde etmek mümkündür.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(i+1) - 2f(i) + f(i-1))}{\Delta x^2} + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} \quad (3.9)$$

Kesme Hatası,

$$\tau_E \cong \frac{\Delta x^2}{12} \frac{d^4 f}{dx^4}$$

(3.9) denklemini tekrar düzenlersek, (3.10) denklemi elde edilecektir.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)}{\Delta x^2} + \tau_E \quad (3.10)$$

3.2 Çapraz Türev ifadelerinin sonlu fark yöntemleri (2.dereceden) ile gösterilmesi

Bu tür türev ifadeleri adından anlaşılacağı üzere her iki değişkeni de türev ifadesi içinde barındırmaktadır. Bu tür türev ifadeleri, standart 2. dereceden merkez-fark yöntemi yardımıyla tanımlanmaktadır. Burada, sadece $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 'nin sonlu fark yöntemi ile nasıl yazıldığı adım adım gösterilecektir. Diğer çapraz türevlerin 2. dereceden sonlu fark eşitlikleri de doğrudan belirtilmiştir[8].

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) = \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{\partial(f_{i,j+1})}{\partial x} - \frac{\partial(f_{i,j-1})}{\partial x} \right)$$

$$f_{xy} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (3.11)$$

$$f_{xxy} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + 2f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x^2 \Delta y} \quad (3.12)$$

$$f_{xyy} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + 2f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x \Delta y^2} \quad (3.13)$$

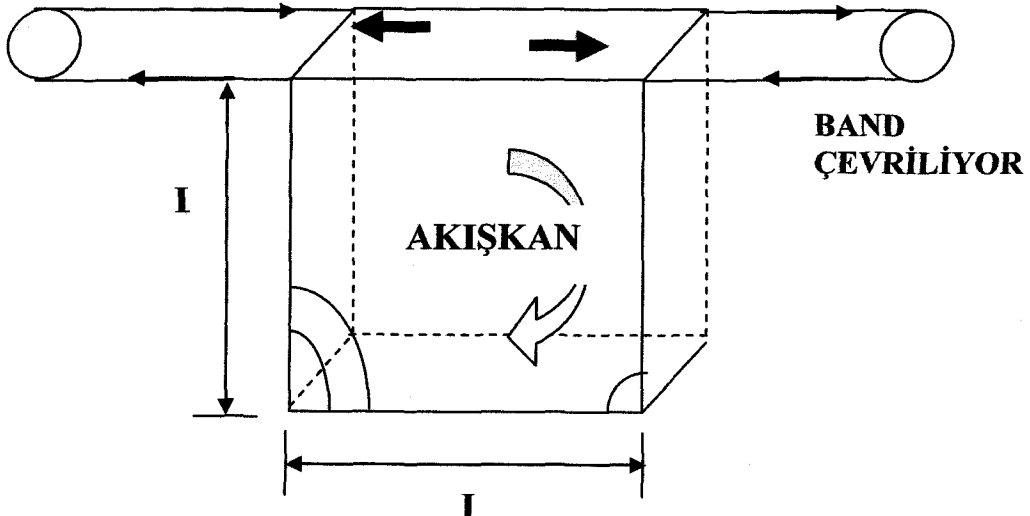
$$f_{xyxy} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i+1,j} + 4f_{i,j} - 2f_{i-1,j} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2} \quad (3.14)$$

4. KAVİTE AKIŞI PROBLEMİ

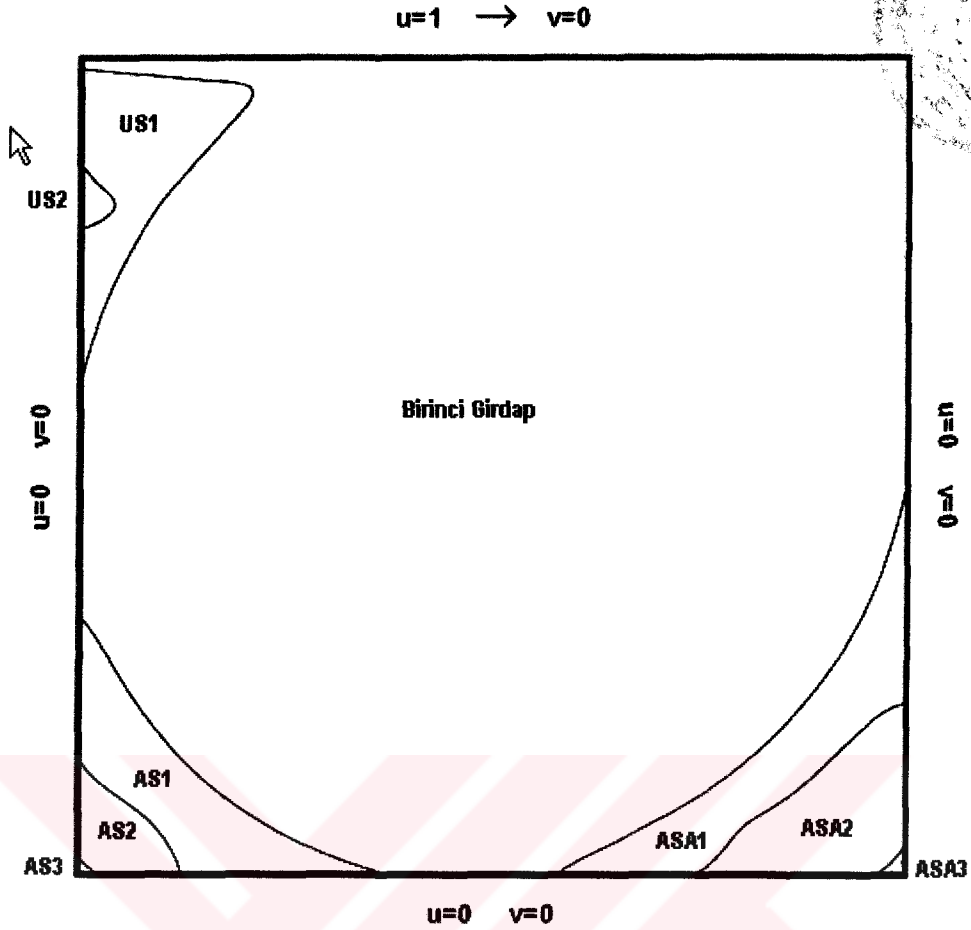
Hesaplama akışkanlar dinamiği alanında çalışan bilim adamlarının elde etmiş oldukları yöntemlerin ve yaklaşımların doğruluğunu test etmek için en çok başvurdukları problemlerden biri kavite akışı problemidir. Bu problemin bu amaçla çokça kullanılmasının nedenlerine gelince, problemin üzerine kurulu olduğu fiziksel ortam geometrisinin basit olması, bu probleme ilişkin olarak kod yazmanın kolay olması ve son olarak bu problem üzerine çok fazla çalışma yapılmış olması ve literatürde kıyaslama yapmak için bu probleme ilişkin güvenilir sonuçların fazlaca olması gibi sebepler sayılabilir. Bütün bu olumlu yanlarının yanında kare kavitenin bir olumsuz tarafıda kare kavitenin geometrisinden kaynaklanan ve sınıra yakın noktalarda, yani köşe noktalarında ortaya çıkan tekillik (Singularity) durumudur. Literatürde bu tekillik olumsuzluğunu ortadan kaldırmaya yönelik olarak geliştirilmiş olan yöntemlerden en önemlisi ve güvenilir neticeler elde etmeyi sağlayan en etkin yöntem Störthkuhl[10] yöntemidir. Bu yönteme ilişkin detaylı bilgi bu bölüm içerisinde yer bulacaktır.

4.1 Kare Kavite Akışı

Şekil 4.2 [11, 12] ve Şekil 4.1 basitçe kavite akışını ve kavite içinde değişik noktalarda akışkan (su) akışı davranışlarını, oluşan girdapları (vortex) göstermektedir. Basitçe belirtmek gerekirse, kavite akışında Reynolds sayısının büyüklüğüne göre kavitenin köşelerinde (ASA, AS ve ÜS) girdaplar oluşmaktadır. Şekil 4.2’de ASA, AS ve ÜS kısaltmaları sırasıyla kavitenin alt sağ, alt sol ve üst sol köşelerini işaret etmektedir.



Şekil 4.1. Kavite akışı olayı



Şekil 4.2. Sınır şartları ve Kavite akışında ortaya çıkan vortekslerin şematik gösterimi[11, 12]

Kavite akışı probleminin dayandırıldığı sistem şu şekilde açıklanabilir: öncelikle kavite akışının gerçekleştiği geometri boyutsuzlaştırmadan dolayı $[0, 1]$ aralığındadır. Kare kavitenin üst kenarı bağlı bulunan bandın çevrilmesi ile yatay yönde ivmelendirilir. Bu sayede, o kenardaki yatay hız 1, yani $u=1$ olarak tanımlanmaktadır. Buna karşın, düşey hız, $v=0$ 'dır. Üst kenar hareketli duvar (Sliding wall) olarak tanımlanmaktadır. Diğer taraftan, diğer duvarlar hareketsizdir ve bu duvarlar sabit duvarlar (Stationary walls) olarak adlandırılmaktadır. Şekil 4.2'de kavite sınırlarındaki hız bileşenleri (yatay ve düşey) boyutsuz olarak ifade edilmiştir.

4.2 Kare Kavite Sınır Şartları

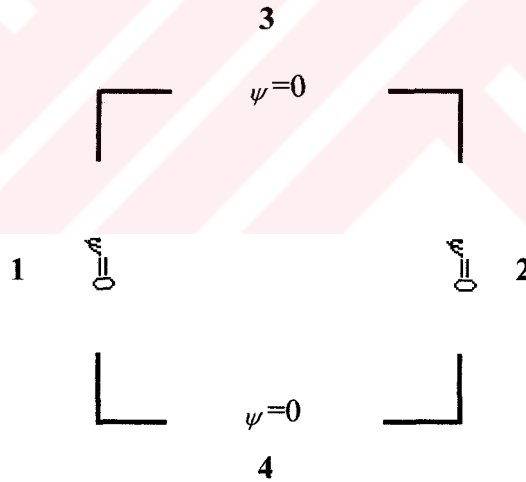
Daha öncede belirtildiği gibi kare kavite akışı problemi sahip olduğu geometrinin basit olması sebebiyle çözüm aşmasında kolaylıklar sağlamaktadır.

Fakat, kare kavitenin geometrisinin kare olmasından dolayı köşelerin keskinlik azaltılması bu noktaların ele alınışını zor bir hale sokmaktadır. Sınırlarda tekillikten (singularity) kaynaklanan istenmeyen bir durum görülmektedir. Şu da bir gerçektir ki, bahsi geçen köşe noktalarının mümkün olduğunca hassas ölçülerde hesaplanması şarttır. Şayet hesaplanamassa, bu durumda ortaya çıkan yanlışlık sadece bulunduğu noktalarda baş göstermez, iç noktalara da olumsuz etkilerini, hatalı sonuçlar elde etme şeklinde hissettirir.

Sınırdaki akım fonksiyonu değerlerini tayin ederken, u ve v biçiminde verilmiş olan hız değerlerini elimizde bulunan yardımcı dönüşüm denklemleri yardımıyla $\psi - \omega$ biçimine dönüştürürsek, sınırdaki Akım fonksiyonu (ψ) değerleri tüm kenarlarda (duvar) sıfır olarak gerçekleşmektedir.

$$\psi = 0 \quad (4.1)$$

Bu durum, Şekil 4.3’de şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.3. Kavite sınırlarında Akım fonksiyonunun durumu

Sınırlarda akım fonksiyonu davranışı yukarıdaki gibi olurken, vortisite davranışında işler biraz daha karmaşıktır.

Sınırdaki vortisite davranışını incelersek; bu bağlamda sınırdaki vortisite değerlerini tayin ederken başvurabileceğimiz değişik yollar mevcuttur. Şekil 4.3’de yer alan 1, 2, 3 ve 4 olarak adlandırılan kenarlarda vortisite değerlerini hesaplayalım.

Dediğimiz gibi, sınırda vortisiti değerlerinin tayininde kullanmak üzere değişik yöntemler mevcuttur. Bunlardan biri, **Thom** (standart ikinci dereceden hayali nokta) yöntemidir. Diğer bir yöntemde, **Störckuhl** adıyla anılan yöntemdir.



4.2.1. Thom Yöntemi

Bu yöntemin uygulaması sırasında, sınırda bilinen akım fonksiyonunun diferansiyel değerlerinden faydalanılır.[13]

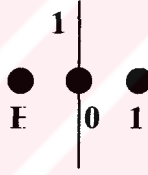
Mesela, 1 noktasında ki vortisiti değerini bulurken,

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega$ ifadesinden ve $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ bilgisinden faydalanabiliriz. Bu

durumda,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \omega \quad (4.2)$$

olacaktır.



Şekil 4.4. Sınır 1'de ki durum

İkinci dereceden sonlu fark uygularsak, sınırda vortisiti değeri için

$$\omega_0 = \frac{\psi_1 - 2\psi_0 + \psi_H}{\Delta x^2} \quad (4.3)$$

bulunacaktır.

Burada,

H, hayali nokta

0, sınırdaki nokta

1, sınıra komşu nokta' yı

simgelemektedir.

(4.2) denkleminde yer alan hayali nokta ise $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ diferansiyel ifadesini

2.dereceden sonlu farklar ile yazarak bulunur.

$$\frac{\psi_1 - \psi_H}{2\Delta x} = 0$$

(4.4)

$$\psi_1 - \psi_H = 0$$

(4.5)

$$\psi_1 = \psi_H$$

(4.6)

(4.6) denklemi hayali noktayı ifade etmektedir.

Hayali noktayı bulduktan sonra, hayali noktanın bulunduğu (4.5) denklemini (4.3) denkleminde uygun yere koyalım.

$$\omega_0 = \frac{\psi_1 - 2\psi_0 + \psi_1}{\Delta x^2} \quad (4.7)$$

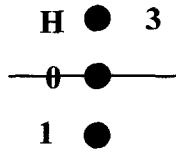
$$\omega_0 = \frac{2\psi_1 - 2\psi_0}{\Delta x^2} \quad (4.8)$$

(4.1) denklemini (4.8) denklemin de yerine koyarsak, sınır 1'de vortisiti değerini hesaplamak için kullanılacak olan (4.9) denklem elde edilir.[13]

$$\omega_0 = \frac{2\psi_1}{\Delta x^2} \quad (4.9)$$

Diğer sınırlar (2,3 ve 4) içinde aynı işlemleri uygularsak, 2,3 ve 4 nolu sınırlarda vortisiti değerleri aşağıdaki gibi olacaktır.

3 nolu sınırdaki,



Şekil 4.5. Sınır 3'de 0 noktasındaki durum

Bu sınırdaki,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ ve } u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \text{ olduğundan dolayı}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \quad (4.10)$$

olur ve aşağıda yer alan (4.11) denklemi elde edilir.

$$\omega_0 = \frac{\psi_H - 2\psi_0 + \psi_1}{\Delta y^2} \quad (4.11)$$

(4.11) denkleminde yer alan hayali nokta, H' de ki vortisiti değerini bulmak için

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1$ akım fonksiyonu bilgisinden faydalanılır.

$$\frac{\psi_H - \psi_1}{2\Delta y} = 1 \quad (4.12)$$

$$\psi_H = \psi_1 + 2\Delta y \quad (4.13)$$

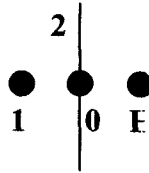
Sonraki aşamada, hayali nokta için (4.13) denkleminde yazmış olduğumuz eşitliği (4.11) denkleminde yerine koyarsak, sınırdaki vortisiti değeri aşağıdaki gibi olur[13].

$$\omega_0 = \frac{2\psi_1 + \psi_0}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta y} \quad (4.14)$$

$\psi_0 = 0$ olduğu için,

$$\omega_0 = \frac{2\psi_1}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta y} \quad (4.15)$$

2 nolu sınırda,

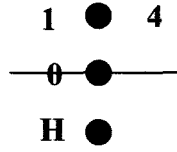


Şekil 4.6. Sınır 2'de 0 noktasındaki durum

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ bilgilerinden faydalanılarak sınır 2'de vortisiti değeri bulunur.

$$\omega_0 = \frac{2\psi_1}{\Delta x^2}$$

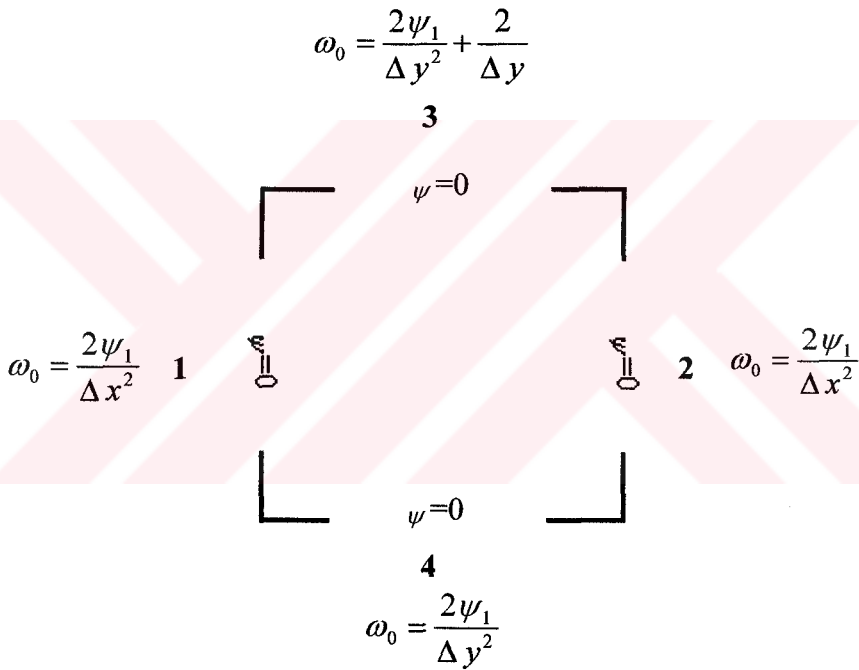
4 nolu sınırda,



Şekil 4.7. Sınır 4'de 0 noktasında ki durum

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ bilgilerinden faydalanılarak sınır 2'de vortisiti değeri bulunur.

$$\omega_0 = \frac{2\psi_1}{\Delta y^2}$$



Şekil 4.8. Kavite sınırlarında Akım fonksiyonunun ve Thom yöntemine göre vortisitinin durumu

Sınırdaki vortisiti değerlerini hesaplarken yukarıda başvurduğumuz Thom yönteminin dışında daha başka yöntemlerde literatürde yer almaktadır. Bunlardan biri de, sınırdaki vortisiti değerlerini hesaplarken 5 noktaya başvurduğumuz ve sınırdaki değerleri 4. dereceden hassasiyette bulmamıza imkan vermektedir.

4.2.2. Störthkuhl Yöntemi

Köşe noktaları vortisiti değerleri için belirsizlik noktalarıdır. Gupta ve diğ., bu durum için kapalı asimptotik bir çözüm tanımlamışlardır. Benzer şekilde, Störthkuhl, kavitenin köşelere yakın yerleri için analitik asimptotik çözümler ortaya koydu ve sonlu eleman bilineer şekil fonksiyonlarını kullanarak, köşe noktalarında vortisiti değerleri için var olan belirsizliği ortadan kaldırdı. Buna ilave olarak, duvardaki noktalarda da var olan bu olumsuzluk böylelikle ortadan kaldırılmış oldu. Bu yapmış olduğumuz çalışmada Störthkuhl ve diğ. ele alındı ve duvar noktalarında vortisiti değerlerini hesaplarken aşağıda yer alan ifadenin yardımına başvuruldu[10].

$$\frac{1}{3\Delta h^2} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \frac{1}{2} & -4 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \psi + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \omega = -\frac{V}{h} \quad (4.16)$$

Burada, V duvar hızı; bu değer sabit (stationary walls) duvarlar için 0, hareketli duvarlar için 1 alınır.

Köşe noktalarında vortisiti değerlerini hesaplarken ise aşağıdaki ifade kullanılır.

$$\frac{1}{3\Delta h^2} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & -2 & \frac{1}{2} \\ \bullet & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \psi + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 1 & \frac{1}{2} \\ \bullet & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \omega = -\frac{V}{2h} \quad (4.17)$$

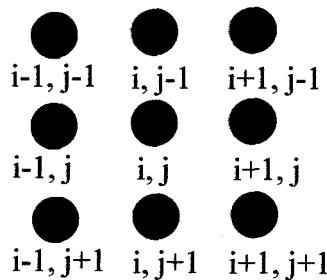
Burada, V ; üst iki köşe noktası için 1, alt iki köşe noktası için ise 0 alınır.

5. YÜKSEK DERECEDEDEN SIKI (YDS) YAKLAŞIM

Önceki bölümlerde yapılanları özetlemek gerekirse, şu ana kadar, ortaya koyduğumuz yöntemin daha iyi ve daha kolay anlaşılabilmesi için önem taşıyan birtakım temel kavramlar ve sonlu farklar yöntemi hakkında bilgi verdik. Bu noktada ise, hakkında bilgi verdiğimiz kavramlar ve denklemleri kullanmak suretiyle geliştirdiğimiz yaklaşımın 2- Boyutlu, sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklemlerine uygulanması ve son denklemlerin türetilmesi adım adım anlatılacaktır. Buna ilave olarak, sadece geliştirdiğimiz sıkı yaklaşımın elde ettiği sonuçları test etmek için yine 4. dereceden hassasiyetli sonuçlar verme özelliğine sahip geleneksel tip bir yaklaşım olan 5 nokta yaklaşımı da ortaya konulacaktır. Bu iki yönetime ilişkin olarak, yaklaşımlara dayanarak geliştirilecek olan denklemsel ifadeler, daha önceki bölümlerde detaylı bir şekilde anlatılmaya çalışılan Navier-Stokes denklemlerinden yola çıkılarak türetilmiştir ve ayrıca bu türetme işleminde test problemi olan kavite akışı problemine has birtakım karakteristik özellikler, bilhassa sınırlardaki mevcut durum ve problem geometrisi de (Kare kavite) için içine katılmıştır. Sınırlardaki durum ele alınırken iki yöntem özellikle dikkate alınacaktır. Bunlar Thom yöntemi ve Sturthkuhl yöntemidir.

5.1. YDS Yaklaşımı Uygulaması

Sonlu fark yönteminde, klasik 3 nokta ayrıştırma işlemi ikinci dereceden doğrulukta sonuçlar sunmaktadır ve bu tip yaklaşım literatürde daha genişçe kullanılmaktadır. Yüksek dereceden yaklaşım gerektiğinde, mesela dördüncü dereceden, bu durumda başvurulabilecek yaklaşımlardan bir tanesi yüksek dereceden sıkı yaklaşımdır.



Şekil 1.1. 3x3 Sıkı Şablon

Bu yaklaşımda, esas, Şekil 1.1' de mevcut 3x3 sıkı şablon yapısına bağlı olarak, (i, j) noktasına ilişkin dördüncü dereceden hassasiyette bir ifade yazmaktır. Bu bağlamda, aşağıda yaklaşımın model denklemine uygulaması adım adım anlatılmıştır.

Mevcut kavite akışı problemindeki fiziksel durumu matematiksel olarak modelleyen çıkış noktamız olan 2- Boyutlu, sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklem takımını göz önüne alalım. Bu denklemin elde edililişini bundan önceki bölümlerde basitçe göstermiştik. Simdi ise, geliştirilen yüksek dereceli sıkı yaklaşımı Navier-Stokes denklemleri üzerinde uygulayalım.

2-boyutlu sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklemleri boyutsuz formda yazılırsa Akım fonksiyonu (ψ) ve vortisiti (ω) formunda denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \quad (5.1)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (5.2)$$

Burada, x ve y kartezyen kordinatları, R_e ise reynolds sayısını simgelemektedir.

Bu denklemleri çözmek amacıyla, aşağıda tanımlanmış olan standart 3 nokta ikinci dereceden $\mathcal{G}(\Delta x^2)$ merkez fark yaklaşım denklemlerini kullanalım[14].

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi_x + \mathcal{G}(\Delta x^2) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi_{xx} + \mathcal{G}(\Delta x^2) \quad (5.4)$$

Burada, ψ_x ve ψ_{xx} aşağıda tanımlanmaktadır.

$$\psi_x = \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (5.5)$$

$$\psi_{xx} = \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

(5.6)

Eğer (5.1 ve 5.2) denklemlerinde ikinci dereceden ayrıştırma (discretization) ifadelerini kullanırsak, sonrasında aşağıdaki ikinci dereceden $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ doğrulukta sonlu fark denklemlerini elde ederiz.

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{R_e} \omega_{xx} + \frac{1}{R_e} \omega_{yy} = \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y \quad (5.8)$$

Akım fonksiyonu ve vortisiti denklemlerinin çözümü için literatürde değişik birçok sayısal yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemlerden herhangi birini kullanarak, bu iki denklemi çözersek, akım fonksiyonu (ψ) ve vortisiti (ω) için elde edilen sayısal çözüm, ikinci dereceden doğrulukla $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2)$, (5.1 ve 5.2) denklemlerinin tanımladığı akım fonksiyonu ve vortisiti denklemlerini karşılamaktadır. Yani, elde edilen çözüm ikinci dereceden doğrulukta olacaktır[1].

Şimdi ise, akım fonksiyonu ve vortisiti denklemleri için 4. dereceden sıkı formülasyonu yazalım. Aşağıdaki ayrıştırmalar 4. dereceden $\mathcal{O}(\Delta x^4)$ doğruluktadır.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi_x - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi_{xx} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (5.10)$$

Bu ayrıştırmalarda, bir şekilde $\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$ ve $\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}$ terimleri hesaplanır ve uygun yerlere yerleştirilirse, bu ayrıştırmalar 4. dereceden doğrulukta ($\mathcal{O}(\Delta x^4)$) olur. Şayet, bu ayrıştırmalar akım fonksiyonu denklemi olan (5.1) denkleminde kullanılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + \mathcal{G}(\Delta x^4, \Delta y^4) = \omega \quad (5.11)$$

Şimdi, $\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}$ ve $\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}$ terimleri için bir ifade elde etmek gerekmektedir. Bunun

için, (5.1) denklemi, yani akım fonksiyonu denklemi kullanılır. Akım fonksiyonu denkleminin x'e göre 1. ve 2. derece türevleri alınır, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (5.13)$$

Benzer şekilde, akım fonksiyonu denkleminin y'e göre 1. ve 2. derece türevleri alınır, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (5.15)$$

(5.12, 5.13, 5.14 ve 5.15) denklemlerinde, Tablo 5.1'de tanımlanan standart ikinci dereceden merkez-fark ayrıştırımlarını kullanırsak, aşağıda yer alan ifadeler ikinci dereceden doğrulukta olacaktır.

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \omega_x - \psi_{xyy} + \mathcal{G}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \omega_y - \psi_{xxy} + \mathcal{G}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.17)$$

Tablo 5.1. Standart ikinci dereceden merkez-fark ayrıştırımları
(Discretizations), $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2)$

f_x	$\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$
f_y	$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$
f_{xx}	$\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$
f_{yy}	$\frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2}$
f_{xy}	$\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta y}$
f_{xxy}	$\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + 2f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x^2\Delta y}$
f_{xyy}	$\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + 2f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x\Delta y^2}$
f_{xxyy}	$\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i+1,j} + 4f_{i,j} - 2f_{i-1,j} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}}{\Delta x^2\Delta y^2}$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \omega_{xx} - \psi_{xxyy} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \omega_{yy} - \psi_{xxyy} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.19)$$

Tanımlanan 2. dereceden doğrulukta ifadeler yardımıyla, aşağıda yer alan ifadeler 4. dereceden doğrulukta ifadeler haline gelir.

$$\frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{\Delta x^2}{12} \omega_{xx} - \frac{\Delta x^2}{12} \psi_{xxyy} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^2 \Delta x^2) \quad (5.20)$$

Benzer olarak aşağıdaki ifade de 4 dereceden doğrulukta bir yapıya bürünür.

$$\frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \frac{\Delta y^2}{12} \omega_{yy} - \frac{\Delta y^2}{12} \psi_{xxyy} + \mathcal{O}(\Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \quad (5.21)$$

(5.20 ve 5.21) denklemleri (5.11) denkleminde yerine koyulursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega - \frac{\Delta x^2}{12} \omega_{xx} - \frac{\Delta y^2}{12} \omega_{yy} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_{xxyy} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \quad (5.22)$$

(5.22) denkleminin çözümü aynı zamanda (5.1) denkleminin, yani akım fonksiyonu denkleminin 4. dereceden doğrulukta bir çözümü durumundadır. Bundan dolayı, (5.22) denklemi sayısal olarak çözülürse, 4. dereceye $\mathcal{O}(\Delta h^4)$ kadar akım fonksiyonu denklemi için makul çözüm elde edilir..

Bu sefer, vortisiti denklemi için 4. dereceden bir yaklaşım elde edilirse, aşağıdaki ifadeler 4. dereceden doğruluğa sahip olacaktır.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \omega_{xx} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \omega_{yy} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + \mathcal{O}(\Delta y^4) \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \left(\psi_y - \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \mathcal{O}(\Delta y^4) \right) \left(\omega_x - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right) \\ &= \psi_y \omega_x - \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \omega_x - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \psi_y + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \left(\psi_x - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right) \left(\omega_y - \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \mathcal{O}(\Delta y^4) \right) \\ &= \psi_x \omega_y - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \omega_y - \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \psi_x + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \end{aligned} \quad (5.26)$$

(5.23, 5.24, 5.25 ve 5.26) denklemleri (5.2) denkleminde tanımlanmış olan vortisiti denkleminde yerine koyulursa, (5.27) denklemi elde edilir.

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} =$$

$$\psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y + \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \psi_x - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \psi_y$$

$$\frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \omega_x - \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \omega_x + \mathcal{G}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \quad (5.27)$$

(5.27) denkleminde ortaya çıkan akım fonksiyonunun 3. dereceden türevleri için (5.16 ve 5.17) denklemleri kullanılırsa, aşağıdaki ifadelere ulaşılır.

$$\frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \omega_x = -\frac{\Delta y^2}{6} \omega_x \omega_y - \frac{\Delta y^2}{6} \omega_x \psi_{xy} + \mathcal{G}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \quad (5.28)$$

$$\frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \omega_y = -\frac{\Delta x^2}{6} \omega_x \omega_y - \frac{\Delta x^2}{6} \omega_y \psi_{xy} + \mathcal{G}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \quad (5.29)$$

Vortisitinin 3. ve 4. dereceden türev ifadelerini bulmak için vortisiti denkleminin x ve y'ye göre türevleri alınır. Vortisitinin x' e göre 3. türevi (5.30) denkleminde ifade edilmiştir.

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + R_e \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} - R_e \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \quad (5.30)$$

(5.30) denklemini standart ikinci dereceden merkez-fark ayrıştırması ile aşağıdaki denklemsel biçim halini alır.

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = R_e \psi_{xy} \omega_x + R_e \psi_y \omega_{xx} - R_e \psi_{xx} \omega_y - R_e \psi_x \omega_{xy} - \omega_{xyy} + \mathcal{G}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.31)$$

Dolayısıyla, (5.27) denkleminde bulunan terim aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \psi_y &= \frac{\Delta x^2}{6} R_e \psi_y \psi_{xy} \omega_x + \frac{\Delta x^2}{6} R_e \psi_y \psi_y \omega_{xx} \\ &- \frac{\Delta x^2}{6} R_e \psi_y \psi_{xx} \omega_y - \frac{\Delta x^2}{6} R_e \psi_y \psi_x \omega_{xy} - \frac{\Delta x^2}{6} \psi_y \omega_{xyy} + \mathcal{G}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Vortisitinin y' ye göre 3. dereceden türevi de (5.30) denklemine benzer şekilde (33) denklemi ile ifade edilir.

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} = R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial \omega}{\partial x} + R_e \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} - R_e \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \quad (5.33)$$

(5.33) denklemi standart ikinci dereceden merkez-fark ayrıştırması ile aşağıdaki denklemsel görünüme kavuşur.

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = R_e \psi_{yy} \omega_x + R_e \psi_y \omega_{xy} - R_e \psi_{xy} \omega_y - R_e \psi_x \omega_{yy} - \omega_{xxy} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.34)$$

Dolayısıyla, (5.27) denkleminde yer alan terim aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \psi_x &= \frac{\Delta y^2}{6} R_e \psi_x \psi_{yy} \omega_x + \frac{\Delta y^2}{6} R_e \psi_x \psi_y \omega_{xy} \\ &- \frac{\Delta y^2}{6} R_e \psi_x \psi_{xy} \omega_y - \frac{\Delta y^2}{6} R_e \psi_x \psi_x \omega_{yy} - \frac{\Delta y^2}{6} \psi_x \omega_{xxy} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Vortisitinin x' e göre 4. dereceden türevi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} &= R_e \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + R_e \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \\ &- R_e \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \frac{\partial \omega}{\partial y} + R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + R_e \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Tekrardan standart ikinci dereceden merkez-fark türevleri kullanılır ve aynı zamanda akım fonksiyonu ve vortisitinin 3. dereceden türev ifadeleri (5.36) denkleminde yerine konulursa, (5.37) denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = R_e \psi_{xy} \omega_x + 2R_e \psi_{xy} \omega_{xx}$$

$$R_e^2 \psi_y \psi_{xy} \omega_x + R_e^2 \psi_y \psi_y \omega_{xx} - R_e^2 \psi_y \psi_{xx} \omega_y - R_e^2 \psi_y \psi_x \omega_{xy} - R_e \psi_y \omega_{xyy}$$

$$R_e \omega_x \omega_y + R_e \psi_{xyy} \omega_y - 2R_e \psi_{xx} \omega_{xy} - R_e \psi_x \omega_{xyy} - \omega_{xyy} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.37)$$

Bu sebeple (5.27) denklemindeki terim aşağıdaki görünüme kavuşur.

$$\frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = \frac{\Delta x^2}{12} R_e \psi_{xy} \omega_x + \frac{\Delta x^2}{6} R_e \psi_{xy} \omega_{xx}$$

$$\frac{\Delta x^2}{12} R_e^2 \psi_y \psi_{xy} \omega_x + \frac{\Delta x^2}{12} R_e^2 \psi_y \psi_y \omega_{xx} - \frac{\Delta x^2}{12} R_e^2 \psi_y \psi_{xx} \omega_y$$

$$- \frac{\Delta x^2}{12} R_e^2 \psi_y \psi_x \omega_{xy} - \frac{\Delta x^2}{12} R_e \psi_y \omega_{xyy} + \frac{\Delta x^2}{12} R_e \omega_x \omega_y$$

$$- \frac{\Delta x^2}{12} R_e \psi_{xyy} \omega_y - \frac{\Delta x^2}{6} R_e \psi_{xx} \omega_{xy} - \frac{\Delta x^2}{12} R_e \psi_x \omega_{xyy}$$

$$- \frac{\Delta x^2}{12} \omega_{xyy} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \quad (5.38)$$

Vortisitinin y'ye göre 4. dereceden türevi ise aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = R_e \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \frac{\partial \omega}{\partial x} + R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + R_e \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}$$

$$- R_e \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} - R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - R_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - R_e \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} - \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (5.39)$$

Tekrardan standart ikinci dereceden merkez-fark türevleri kullanılır ve aynı zamanda akım fonksiyonu ve vortisitinin 3. dereceden türev ifadeleri (5.39) denkleminde yerine konulursa, denklemin yeni hali (5.40) denkleminin gibi olur[14].

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = -R_e \omega_y \omega_x - R_e \psi_{xy} \omega_x$$

$$\begin{aligned} & 2R_e \psi_{yy} \omega_{xy} + R_e \psi_y \omega_{xyy} - R_e \psi_{xyy} \omega_y - 2R_e \psi_{xy} \omega_{yy} - R_e^2 \psi_x \psi_{yy} \omega_x \\ & - R_e^2 \psi_x \psi_y \omega_{xy} + R_e^2 \psi_x \psi_{xy} \omega_y + R_e^2 \psi_x \psi_x \omega_{yy} + R_e \psi_x \omega_{xxy} - \omega_{xyy} + \mathcal{G}(\Delta x^2, \Delta y^2) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Dolayısıyla (5.27) denklemindeki terim aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} &= -\frac{\Delta y^2}{12} R_e \omega_y \omega_x - \frac{\Delta y^2}{12} R_e \psi_{xy} \omega_x \\ & \frac{\Delta y^2}{6} R_e \psi_{yy} \omega_{xy} + \frac{\Delta y^2}{12} R_e \psi_y \omega_{xyy} - \frac{\Delta y^2}{12} R_e \psi_{xyy} \omega_y \\ & - \frac{\Delta y^2}{6} R_e \psi_{xy} \omega_{yy} - \frac{\Delta y^2}{12} R_e^2 \psi_x \psi_{yy} \omega_x - \frac{\Delta y^2}{12} R_e^2 \psi_x \psi_y \omega_{xy} \\ & + \frac{\Delta y^2}{12} R_e^2 \psi_x \psi_{xy} \omega_y + \frac{\Delta y^2}{12} R_e^2 \psi_x \psi_x \omega_{yy} + \frac{\Delta y^2}{12} R_e \psi_x \omega_{xxy} \\ & - \frac{\Delta y^2}{12} \omega_{xyy} + \mathcal{G}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4) \end{aligned} \quad (5.41)$$

(5.28, 5.29, 5.32, 5.35, 5.38 ve 5.41) denklemleri (5.27) denkleminde yerine koyulur ve (5.27) denklemi tekrardan düzenlenirse, aşağıdaki uzun denklem elde edilecektir.

$$\begin{aligned} & \omega_{xx} + \omega_{yy} - R_e \frac{\Delta x^2}{6} \psi_{xy} \omega_{xx} + R_e \frac{\Delta x^2}{6} \psi_{xy} \omega_{yy} + R_e^2 \frac{\Delta x^2}{12} \psi_y \psi_y \omega_{xx} + R_e^2 \frac{\Delta y^2}{12} \psi_x \psi_x \omega_{yy} = \\ & R_e \psi_y \omega_x - R_e \psi_x \omega_y + R_e \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_{xy} \omega_x - R_e \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_{xy} \omega_y \\ & - R_e^2 \frac{\Delta x^2}{12} \psi_y \psi_{xy} \omega_x + R_e^2 \frac{\Delta y^2}{12} \psi_x \psi_{yy} \omega_x + R_e^2 \frac{\Delta x^2}{12} \psi_y \psi_{xx} \omega_y - R_e^2 \frac{\Delta y^2}{12} \psi_x \psi_{xy} \omega_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_e \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_y \omega_{xyy} - R_e \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_x \omega_{xxy} - R_e \frac{\Delta x^2}{6} \psi_{xx} \omega_{xy} \\
& + R_e \frac{\Delta y^2}{6} \psi_{yy} \omega_{xy} + R_e^2 \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_x \psi_y \omega_{xy} - R_e \left(\frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\Delta y^2}{12} \right) \omega_x \omega_y \\
& - \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \omega_{xxyy} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Bu uzun (5.42) denkleminin çözümü aynı zamanda 4. dereceden hassasiyette (5.2) denklemi, yani vortisiti denklemininde çözümüdür. Yani, eğer (5.42) denklemi sayısal olarak çözüme kavuşturulursa, 4. dereceye kadar hassasiyette (5.2) denklemi, yani vortisiti denklemi için tatmin edici neticeler elde edilir.

4. dereceden (5.22 ve 5.42) akım fonksiyonu ve vortisiti denklemlerinin son hali aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega + A \tag{5.43}$$

$$\frac{1}{R_e}(1+B)\omega_{xx} + \frac{1}{R_e}(1+C)\omega_{yy} = (\psi_y + D)\omega_x - (\psi_x + E)\omega_y + F \tag{5.44}$$

Burada,

$$A = -\frac{\Delta x^2}{12} \omega_{xx} - \frac{\Delta y^2}{12} \omega_{yy} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_{xxyy}$$

$$B = -R_e \frac{\Delta x^2}{6} \psi_{xy} + R_e^2 \frac{\Delta x^2}{12} \psi_y \psi_y$$

$$C = R_e \frac{\Delta y^2}{6} \psi_{xy} + R_e^2 \frac{\Delta y^2}{12} \psi_x \psi_x$$

$$D = \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_{xxy} - R_e \frac{\Delta x^2}{12} \psi_y \psi_{xy} + R_e \frac{\Delta y^2}{12} \psi_x \psi_{yy}$$

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_{xyy} - R_e \frac{\Delta x^2}{12} \psi_y \psi_{xx} + R_e \frac{\Delta y^2}{12} \psi_x \psi_{xy} \\
F &= \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_y \omega_{xyy} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_x \omega_{xxy} - \frac{\Delta x^2}{6} \psi_{xx} \omega_{xy} \\
&+ \frac{\Delta y^2}{6} \psi_{yy} \omega_{xy} + R_e \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \psi_x \psi_y \omega_{xy} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\Delta y^2}{12} \right) \omega_x \omega_y \\
&- \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \omega_{xyy}
\end{aligned} \tag{5.45}$$

(5.43 ve 5.44) sonlu fark denklemleri, (5.1 ve 5.2) akım fonksiyonu ve vortisiti denklemlerinin 4. dereceden $\mathcal{G}(\Delta x^4, \Delta x^2 \Delta y^2, \Delta y^4)$ hassasiyette tahminleridir. Buna karşın, (5.43 ve 5.44) denklemlerinde bulunan A, B, C, D, E ve F değerleri 0 olarak kabul edilirse,

$$A = B = C = D = E = F = 0 \tag{5.46}$$

Bu durumda, (5.43 ve 5.44) sonlu fark denklemleri aşağıdaki basit görünümlü forma girer.

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega \tag{5.47}$$

$$\frac{1}{R_e} \omega_{xx} + \frac{1}{R_e} \omega_{yy} = \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y \tag{5.48}$$

(5.47 ve 5.48) denklemleri, (5.1 ve 5.2) akım fonksiyonu ve vortisiti denklemlerinin ikinci dereceden $\mathcal{G}(\Delta x^2, \Delta y^2)$ hassasiyette tahminleridir. Dördüncü dereceden (5.43 ve 5.44) denklemlerinin son halinin yazılış şekli 2. derece ve 4.dördüncü derece hassasiyetli tahminler arasında geçişe kolaylıkla imkan vermektedir. Bu bağlamda, yapılması gerekli olan sadece A, B, C, D, E ve F homojen değerlerini kullanmak veya bu değerleri, (5.45) denkleminde tanımlandığı gibi hesapladıktan sonra kullanmaktır.

Şimdi ise, (5.43, 5.44 ve 5.45) denklemleri tekrar yazılır ve bu denklemlerde, sonlu fark ifadeleri kısmi türev ifadeleri ile yer değiştirilirse, denklemler sonlu fark görünümünden aşağıdaki gibi kısmi diferansiyel görünümüne kavuşacaktır.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega + A \quad (5.49)$$

$$\frac{1}{R_e}(1+B)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{R_e}(1+C)\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + D\right)\frac{\partial \omega}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + E\right)\frac{\partial \omega}{\partial y} + F \quad (5.50)$$

Burada,

$$A = -\frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$B = -R_e \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + R_e^2 \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$C = R_e \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + R_e^2 \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$D = \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} - R_e \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + R_e \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y}$$

$$E = \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - R_e \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x} + R_e \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

$$F = \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

$$+ \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + R_e \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\Delta y^2}{12}\right) \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$- \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (5.51)$$

(5.49 ve 5.50) denklemleri, (5.1 ve 5.2) akım fonksiyonu ve vortisiti denklemleri ile aynı formdadır. Dolayısıyla, (5.1 ve 5.2) akım fonksiyonu ve vortisiti denklemleri için mevcut herhangi bir sayısal yöntem, (5.49 ve 5.50) denklemlerini çözmek için kolaylıkla uygulanabilir.[1], (5.49 ve 5.50) denklemlerini Dördüncü Dereceden Navier-Stokes, DDNS (Fourth Order Navier-Stokes (FONS) equations) denklemleri olarak adlandırdılar. Tablo 1'deki ikinci derece merkez-fark ayrıştırmaları ve uniform Δx ve Δy kullanıldığı takdirde, (5.49 ve 5.50) denklemlerinin çözümleri akım fonksiyonu ve vortisiti denklemleri için dördüncü dereceden hassasiyette olmaktadır. DDNS ile N-S denklemleri arasındaki tek fark A, B, C, D, E ve F katsayılarıdır. DDNS denklemleri N-S denklemleri ile aynı formda olduğu için, ikinci derece hassasiyetle N-S denklemlerini çözen literatürde yer alan herhangi bir kod, var olan koda sadece A, B, C, D, E ve F katsayılarını katmak suretiyle, kolaylıkla dördüncü dereceden hassasiyette çözümler elde eden bir yapıya kavuşturulabilir.

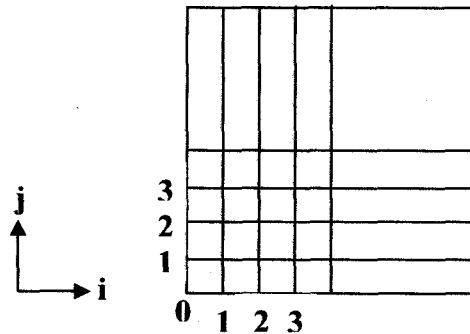
6.GAUSS-SEIDEL RELAXATION YÖNTEMİ

Diferansiyel denklem sistemlerin çözümü sırasında kullanılan en basit bant karşılik en pratik yöntemlerden biri Gauss-Seidel Relaxation yöntemidir. Yöntemin metodolojisinin basit olması kullanım ve probleme uygulama bakımından kolaylık ve kod yazma aşamasında rahatlık sağlamaktadır.. Yöntemin kolay olması yöntem için yazılacak olan kod kısmının kolay ele alınmasına izin vermektedir. Bu bağlamda, daha önceki bölümlerde ayrıntılı olarak ifade ettiğimiz sayısal yaklaşımların mevcut kavite akış problemine uygulama adımından sonra elde edilen iterasyon denklemlerinin sayısal olarak çözümü sırasında etkili, uygun bir yöntemin işin içine katılması gerekmektedir. Bu noktada, sayısal yöntem olarak Gauss-Seidel yumuşatma yöntemi kullanılmıştır.

6.1. Gauss-Seidel Yöntemi

Bu yöntemde başlangıçta bir çözüm kümesi kabul edilir. Daha sonra her noktada denklemler iterasyonla sağlanmaya çalışılarak kabul edilen çözüm kümesi gerçek çözüme yaklaştırılır.

Bu yöntemin kullanımını, uygulanmasını bir örnekle göstermek gerekirse, bu bağlamda iki boyutlu ısı denklemini göz önünde bulunduralım ve Gauss-Seidel yöntemini adım adım uygulayalım. Şekil 6.1 bölgenin iki ekseninde hücrelere nasıl bölündüğünü basitçe şematik olarak göstermektedir.



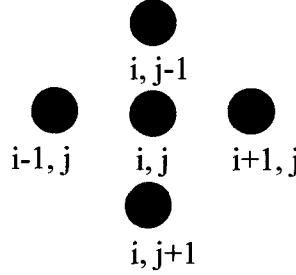
Şekil 6.1. Bölgeyi iki ekseninde hücrelere bölme

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = A \quad (6.1)$$



Burada, T , sıcaklık terimini simgelemektedir.

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = A$$



Şekil 6.2. Gauss-Seidel yönteminde etkin olan noktalar

(6.2) denklemi Gauss-Seidel iterasyonu ile sıcaklıkların bulunacağı denklemdir. Bu denklemde çözümün ıraksamasını engellemek için Gauss-Seidel yumuşatma ile hesap edilen yeni değerlerin içerisinde eski değer etkisinin de bulunması sağlanır.

$$T^{YENI} = wT^{HESAPLANAN} + (1-w)T^{ESKI} \quad (6.3)$$

(6.3) denkleminde w yumuşatma katsayısıdır.

Her iki eksen de eşit sayıda hücreye böldüğümüzü varsayarsak, yani (6.4) denklemi devreye sokarsak ve (6.2) ve (6.3) denklemleri birleştirilerek Gauss-Seidel yumuşatma denklemi elde edilir.

$$(\Delta x) = (\Delta y) = h \quad (6.4)$$

$$T_{i,j}^{YENI} = w \left(\frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4} \right) + (1-w)T_{i,j}^{ESKI} \quad (6.5)$$

(6.5) denklemi Gauss-Seidel yumuşatma denklemi olarak adlandırılmaktadır.

(6.5) denkleminde eğer yumuşatma katsayısı w , 0 ile 1 arasında yer alıyorsa bu durum 'Under Relaxation', 1'e eşitse 'Without Relaxation', 1 ile 2 arasında yer alıyor ise 'Over Relaxation' olarak adlandırılmaktadır. Çözüm aşamasında w için

1.4 değerinin kullanılması iyi sonuçlar elde etme bakımından oldukça etkili olmaktadır ve bu değerin kullanılması tavsiye edilmektedir.

6.2. Gauss-Seidel Relaxation Yönteminin 4. dereceden Sıkı Yaklaşımına Uygulanması

(5.49 ve 5.50) akım fonksiyonu ve vortisiti denklemlerini (DDNS) tekrardan göz önüne alalım. Hatırlamak için akım fonksiyonu ve vortisiti formundaki N-S denklemlerini aşağıda gösterelim.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega + A \quad (5.49)$$

$$\frac{1}{R_e}(1+B)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{R_e}(1+C)\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + D\right)\frac{\partial \omega}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + E\right)\frac{\partial \omega}{\partial y} + F \quad (5.50)$$

Burada,

$$A = -\frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\Delta y^2}{12}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right)\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$B = -R_e \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + R_e^2 \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$C = R_e \frac{\Delta y^2}{6}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + R_e^2 \frac{\Delta y^2}{12}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$D = \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right)\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} - R_e \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + R_e \frac{\Delta y^2}{12}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y}$$

$$E = \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right)\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - R_e \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x} + R_e \frac{\Delta y^2}{12}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

$$F = \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta y^2}{6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + R_e \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\Delta y^2}{12} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \\
& - \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{\Delta y^2}{12} \right) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2}
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Öncelikle (5.1) denklemini göz önüne alalım ve Gauss-Seidel yöntemini uygulamaya başlayalım. Bunun için, Tablo 5.1’de yer alan standart 2. dereceden merkez-fark ayrıştırımlarının kullanılması, 4. dereceden hassasiyette sonuçlar elde etmemize imkan tanıyacak şekilde yöntemin uygulanmasına yetecektir.

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -\omega_{i,j} + A_{i,j} \tag{6.6}$$

$\Delta x = \Delta y = \Delta h$ olduğunu varsayarsak, bu durumda, $\psi_{i,j}$ ’yi üstteki denklemden yazalım.

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{4} \left[\left(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} \right) + \Delta h^2 \omega_{i,j} - \Delta h^2 A_{i,j} \right] \tag{6.7}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
A_{i,j} = & -\frac{\Delta h^2}{12} \left(\frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j} + \omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{\Delta h^2} \right) \\
& - \frac{\Delta h^2}{6} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - 2\psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + 4\psi_{i,j}}{\Delta h^4} \right. \\
& \left. + \frac{-2\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j-1} - 2\psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j-1}}{\Delta h^4} \right)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}
A_{i,j} = & -\frac{1}{12}(\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j} + \omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}) \\
& -\frac{1}{6}\left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - 2\psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + 4\psi_{i,j}}{\Delta h^2}\right. \\
& \left. + \frac{-2\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j-1} - 2\psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j-1}}{\Delta h^2}\right)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Gauss-Seidel yöntemini Akım fonksiyonu denkleminde uyguladığımız gibi şimdi Vortisiti denkleminde uygulayalım. Yine, Tablo 5.1’de yer alan standart ikinci dereceden merkez-fark ayrıştırımlarına bağlı olarak bu uygulamayı gerçekleştirelim.

$$\frac{1}{R_e}(1+B)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{R_e}(1+C)\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + D\right)\frac{\partial \omega}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + E\right)\frac{\partial \omega}{\partial y} + F \tag{6.10}$$

$\Delta x = \Delta y = \Delta h$ olduğunu varsayarsak bu durumda, (5.50) denklemini düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R_e}(1+B_{i,j})\left(\frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{\Delta h^2}\right) + \frac{1}{R_e}(1+C_{i,j})\left(\frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{\Delta h^2}\right) = \\
& \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta h} + D_{i,j}\right)\frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta h} - \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta h} + E_{i,j}\right)\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta h} + F_{i,j}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

(6.11) denkleminin her iki tarafını Δh^2 ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R_e}(1+B_{i,j})(\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}) + \frac{1}{R_e}(1+C_{i,j})(\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}) = \\
& \left(\frac{\Delta h}{2}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) + \Delta h^2 D_{i,j}\right)\frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta h} \\
& - \left(\frac{\Delta h}{2}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) + \Delta h^2 E_{i,j}\right)\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta h} + \Delta h^2 F_{i,j}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

(6.12) denklemini aşağıda tanımlandığı gibi düzenleyelim ve denklemi tekrar yazalım.

$$DD_{i,j} = \left(\frac{\Delta h}{2} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) + \Delta h^2 D_{i,j} \right) \quad (6.13)$$

$$EE_{i,j} = \left(\frac{\Delta h}{2} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) + \Delta h^2 E_{i,j} \right) \quad (6.14)$$

$$\frac{1}{R_e} (1 + B_{i,j}) (\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}) + \frac{1}{R_e} (1 + C_{i,j}) (\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}) =$$

$$DD_{i,j} \left(\frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta h} \right) - EE_{i,j} \left(\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta h} \right) + \Delta h^2 F_{i,j} \quad (6.15)$$

Burada,

$$B_{i,j} = -R_e \frac{1}{24} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1}) \\ + R_e^2 \frac{1}{48} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \quad (6.16)$$

$$C_{i,j} = R_e \frac{1}{24} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1}) \\ + R_e^2 \frac{1}{48} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) \quad (6.17)$$

$$D_{i,j} = \left(\frac{1}{12} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - 2\psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + 2\psi_{i,j-1} - \psi_{i-1,j-1}}{\Delta h} \right)$$

$$- R_e \frac{1}{96} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{\Delta h} \right) (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1})$$

$$+ R_e \frac{1}{24} \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{\Delta h} \right) (\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{1}{12} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + 2\psi_{i-1,j} - \psi_{i-1,j-1}}{\Delta h} \right) \\
&- R_e \frac{1}{24} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{\Delta h} \right) (\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}) \\
&+ R_e \frac{1}{96} \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{\Delta h} \right) (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1})
\end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
F_{i,j} &= \frac{\Delta h^2}{6} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j+1} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j-1} - \omega_{i-1,j+1} + 2\omega_{i-1,j} - \omega_{i-1,j-1}}{2\Delta h^3} \right) \\
&- \left(\frac{\Delta h^2}{6} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j+1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + 2\omega_{i,j-1} - \omega_{i-1,j-1}}{2\Delta h^3} \right) \\
&- \frac{\Delta h^2}{6} \left(\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta h^2} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j+1} - \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j-1}}{4\Delta h^2} \right) \\
&+ \frac{\Delta h^2}{6} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta h^2} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j+1} - \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j-1}}{4\Delta h^2} \right) \\
&+ R_e \left(\frac{\Delta h^2}{6} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta h} \right) \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j+1} - \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j-1}}{4\Delta h^2} \right) \\
&- \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta h^2}{6} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j+1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i-1,j+1} - 2\omega_{i+1,j} + 4\omega_{i,j}}{\Delta h^4} \right. \\
&\left. + \frac{-2\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i,j-1} + \omega_{i-1,j-1}}{\Delta h^4} \right)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
\Delta h^2 F_{i,j} &= \frac{1}{24} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) (\omega_{i+1,j+1} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j-1} - \omega_{i-1,j+1} + 2\omega_{i-1,j} - \omega_{i-1,j-1}) \\
&- \left(\frac{1}{24} \right) (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) (\omega_{i+1,j+1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + 2\omega_{i,j-1} - \omega_{i-1,j-1}) \\
&- \frac{1}{24} (\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}) (\omega_{i+1,j+1} - \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j-1}) \\
&+ \frac{1}{24} (\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) (\omega_{i+1,j+1} - \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j-1}) \\
&+ R_e \left(\frac{1}{96} \right) (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) (\omega_{i+1,j+1} - \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j-1}) \\
&- \frac{1}{R_e} \left(\frac{1}{6} \right) (\omega_{i+1,j+1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i-1,j+1} - 2\omega_{i+1,j} + 4\omega_{i,j} \\
&- 2\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i,j-1} + \omega_{i-1,j-1})
\end{aligned} \tag{6.21}$$

$\omega_{i,j}$ terimi için (6.15) denklemini düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{R_e} (1 + B_{i,j}) + \frac{2}{R_e} (1 + C_{i,j}) \right) \omega_{i,j} &= \left(\frac{1}{R_e} (1 + B_{i,j}) - \frac{DD_{i,j}}{2\Delta h} \right) \omega_{i+1,j} \\
&+ \left(\frac{1}{R_e} (1 + B_{i,j}) + \frac{DD_{i,j}}{2\Delta h} \right) \omega_{i-1,j} + \left(\frac{1}{R_e} (1 + C_{i,j}) + \frac{EE_{i,j}}{2\Delta h} \right) \omega_{i,j+1} \\
&+ \left(\frac{1}{R_e} (1 + C_{i,j}) - \frac{EE_{i,j}}{2\Delta h} \right) \omega_{i,j-1} - \Delta h^2 F_{i,j}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

(6.22) denkleminde aşağıda tanımlanan ifadeler ışığında gereken düzenlemeleri yapalım.

$$G1_{i,j} = \left(\frac{2}{R_e} (1 + B_{i,j}) + \frac{2}{R_e} (1 + C_{i,j}) \right)$$

$$G2_{i,j} = \left(\frac{1}{R_e} (1 + B_{i,j}) - \frac{DD_{i,j}}{2\Delta h} \right)$$

$$G3_{i,j} = \left(\frac{1}{R_e} (1 + B_{i,j}) + \frac{DD_{i,j}}{2\Delta h} \right)$$

$$G4_{i,j} = \left(\frac{1}{R_e} (1 + C_{i,j}) + \frac{EE_{i,j}}{2\Delta h} \right)$$

$$G5_{i,j} = \left(\frac{1}{R_e} (1 + C_{i,j}) - \frac{EE_{i,j}}{2\Delta h} \right)$$

Tüm bu işlemlerden sonra, (i,j) noktasında Gauss-Seidel yöntemi uygulanarak vortisiti değerlerini hesaplamak için elde edilen iterasyon denklemi aşağıdaki gibi olur..

$$\omega_{i,j} = \frac{G2_{i,j} \omega_{i+1,j} + G3_{i,j} \omega_{i-1,j} + G4_{i,j} \omega_{i,j+1} + G5_{i,j} \omega_{i,j-1} - \Delta h^2 F_{i,j}}{G1_{i,j}} \quad (6.23)$$

(6.23) denklemini bölümün başında bahsi geçen relaxation terimi, w kullanarak düzenlersek,

$$\omega_{i,j} = w \frac{G2_{i,j} \omega_{i+1,j} + G3_{i,j} \omega_{i-1,j} + G4_{i,j} \omega_{i,j+1} + G5_{i,j} \omega_{i,j-1} - \Delta h^2 F_{i,j}}{G1_{i,j}} + (1-w) \omega_{i,j} \quad (6.24)$$

(6,24) denklemi elde edilir.

Özetlersek, DDNS denklemlerine Gauss-Seidel yöntemini uyguladığımızda, herhangi bir (i,j) noktasında akım fonksiyonu ve vortisiti değerlerini saptarken esas alınacak iterasyon denklemleri, Akım fonksiyonu saptamalarında (6.7) denklemi bunun yanında vortisiti hesaplamalarında ise (6.24) denklemdir.

7. UYGULAMA

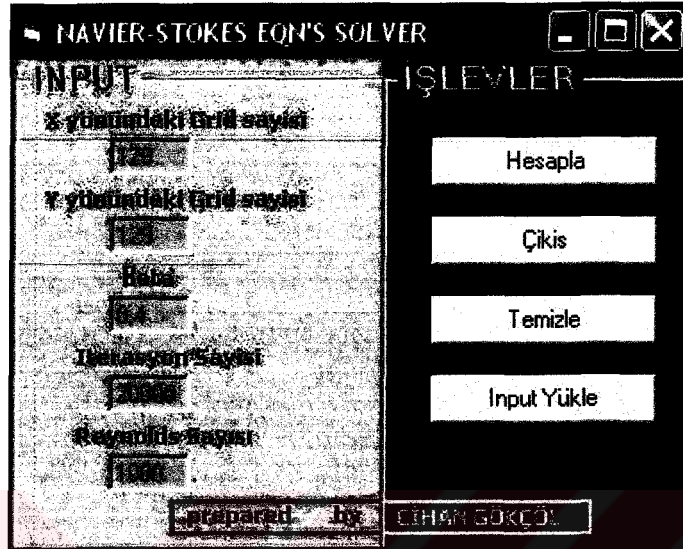
Geliştirmiş olduğumuz sıkı, 4. dereceden yaklaşımı, model problemi olarak seçilen kare kavite akışı problemine, bu problemi matematiksel olarak ifade eden Kararlı, sıkıştırılmaz Navier-Stokes denklemlerini ele almak suretiyle uyguladık. Sonrasında elde edilen DDNS denklemlerine (A, B, C, D, E ve F katsayılarını içermektedir.) bölüm 6'da anlatılan Gauss-Seidel yöntemini standart 2. dereceden Merkez-Fark ayrıştırmalarına bağlı kalarak uyguladık ve Akım fonksiyonu ve Vortisiti için nihai denklemleri elde ettik. Daha sonra, bu iterasyon denklemleri için uygun kodları Visual Basic 6.0 bilgisayar programında yazdık ve yazılan programı Reynolds sayısının (100, 1000, 2500, 5000, 10000) farklı değerlerini içeren senaryolar için çalıştırdık ve elde edilen sonuçları bir .txt dosyasına yazdırdık. En sonunda farklı Reynolds sayıları için elde edilen dataları Tech Plot çizim programını kullanmak suretiyle çizdirdik. Ve kavitenin bazı özel noktalarında elde edilen sonuçları literatürdeki diğer sonuçlarla karşılaştırdık ve bu karşılaştırmayı tablo olarak gösterdik.

Şekil 7.1'de Navier-Stokes denklemlerinin çözümü için yazılan programın arayüzeyi görülmektedir. Şekil 7.1'de görülen sarı renkli alanda yer alan parametreler (Beta, iterasyon sayısı, Reynolds sayısı, vs.) kullanıcı tarafından girilmek suretiyle programa dahil edilirler. Sonrasında, lacivert renkli alanda yer alan **Hesapla** düğmesine basılarak, program seçilen Reynolds sayısına ilişkin senaryo için çalıştırılmış olur. Programda tanımlanmış olan durdurma kriteri ile belirtilen hassasiyet (10^{-5}) elde edilene kadar program çalışmayı sürdürecektir. Bu durdurma kriteri sağlandığı zaman program çalışmayı sonlandıracak ve Akım fonksiyonu ve vortisiti değerlerini .txt dosyasına yazacaktır. Programda kullandığımız durdurma kriterleri aşağıda mevcuttur.

$$\left| (\psi_{i,j} - \psi E_{i,j}) \right| \leq 10^{-5} \quad (7.1)$$

$$\left| (\omega_{i,j} - \omega E_{i,j}) \right| \leq 10^{-5} \quad (7.2)$$

(7.1) ve (7.2) denklemlerinde belirtilen durdurma kriterleri programın işleyisi sırasında kullanılmış olup iterasyonun hangi aşamada sonlanacağını tayin eder bir niteliğe sahiptir.



Şekil 7.1. Visual Basic 6.0 bilgisayar programında Navier-Stokes denklemleri için yazılan programın ara yüzü

Bu çalışmada, kare geometriye sahip kavite, hem X hem de Y yönünde 128 gride ayrılmıştır. Yani, gridlere ayırma aşamasında homojen bir dağılım sağlanmıştır.

Bunun yanında, şunu belirtmekte fayda var; Reynolds sayısının büyük değerlerinde program çalışırken, Beta olarak adlandırılan Relaxation (yumuşatma, hafifletme) terimini iyi ayarlamak gerekmektedir. Aksi halde, yani, beta terimi programın sorunsuz çalışmasına imkan tanıyan bir değerle tanımlanmassa, programın içerisinde yer alan birtakım terimler değer olarak çok yüksek rakamlara ulaşabilmektedirler. Böyle bir durum söz konusu olduğunda, program “Over Flow” uyarısı verip, çalışmasını kesmektedir. Bu türde istenmeyen durumun ortadan kaldırılması için relaxation terimi, Beta'yı uygun seviyeye kadar düşürmek gerekmektedir. Tablo 7.1'de farklı Reynolds sayıları için Gauss-Seidel yönteminde kullanılan Beta değerleri belirtilmiştir.



Mesela, Reynolds sayısının 1000 olduğu senaryoda, böyle bir durumda, programın çalışmasını sekteye uğratmaması için Beta değeri 0.8'e kadar belirlenmiştir ve sonrasında program sorunsuz olarak çalışmasını tamamlamıştır. (Beta değeri küçüldükçe, değerlerin birbirlerine yakınsaması daha yavaş biçimde gerçekleşmektedir yani, küçük adımlarla ilerleyerek yakınsama söz konusu olmaktadır.

Tablo 7.1. Farklı Reynolds sayıları için Gauss-Seidel yönteminde kullanılan Beta değerleri

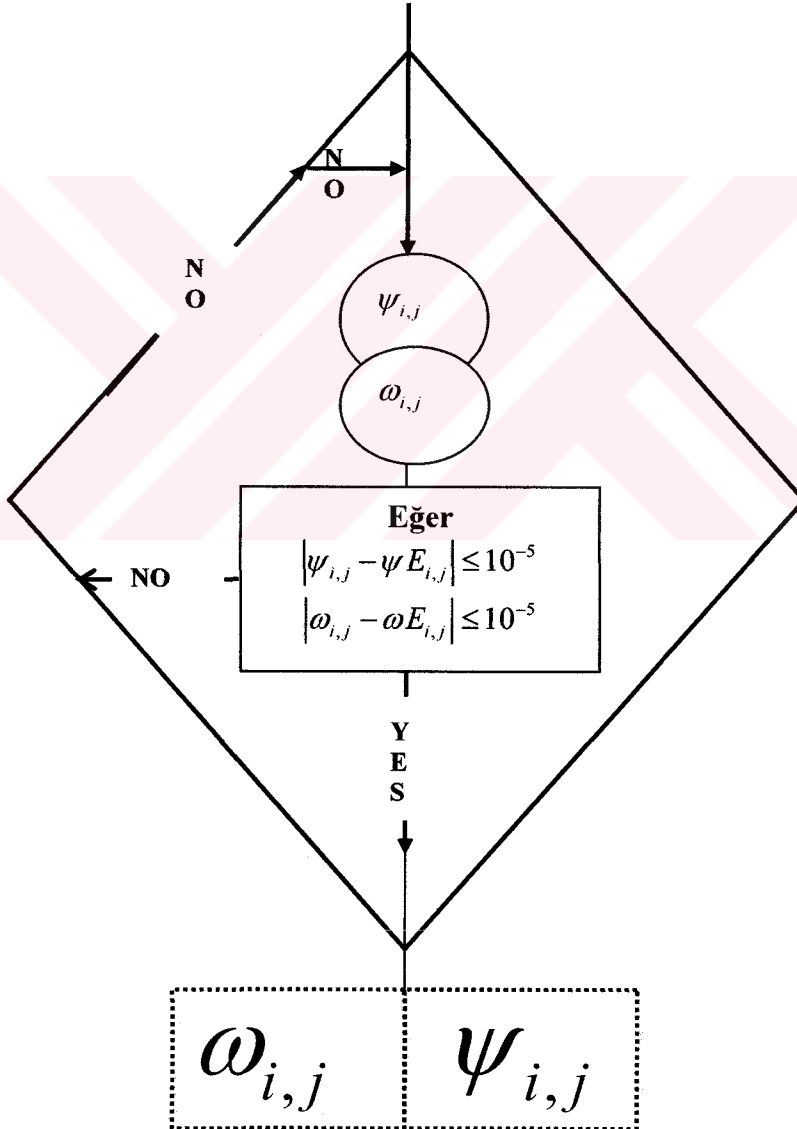
Re	Beta, w
100	1.2
1000	0.8
2500	0.65
5000	0.5
10000	0.25

7.1 Akış Diyagramı

GİRİŞ DATALARI

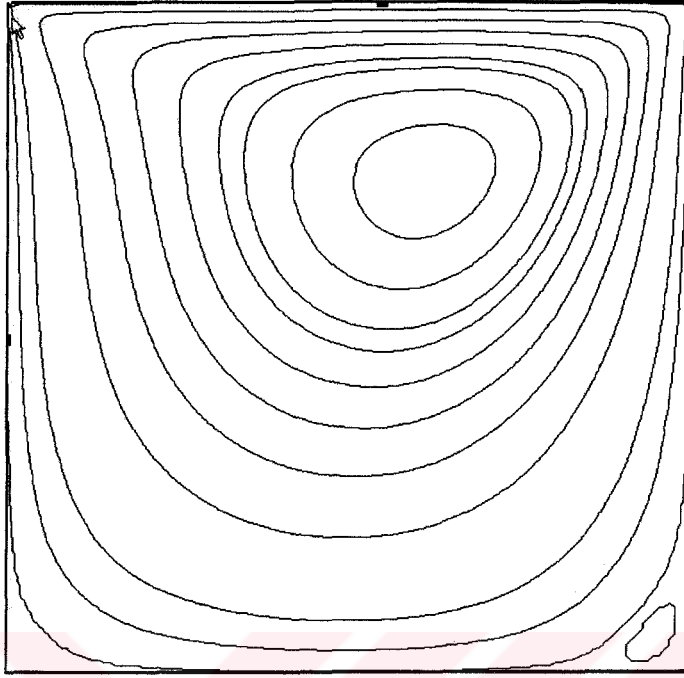
- Beta Değeri
- Grid Sayısı
- Reynolds Sayısı
- İterasyon Sayısı

Tüm Gridler için ψ , ω
başlangıç değerleri atanır.

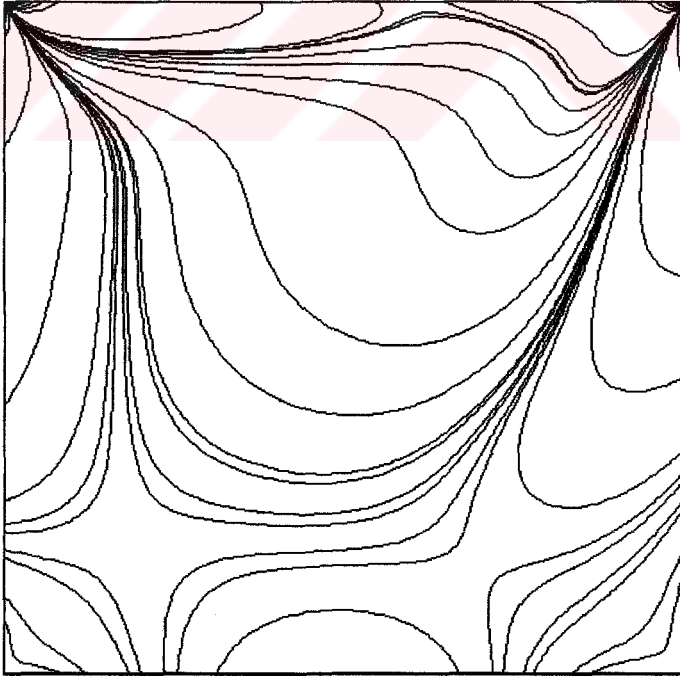


Şekil 7.2. Program Akış Diyagramı

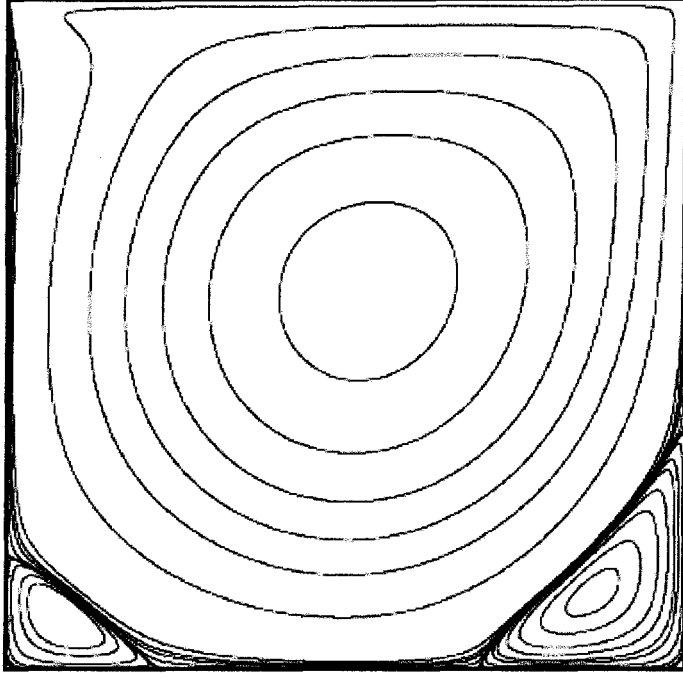
7.2 Grafikler ve Tablolar



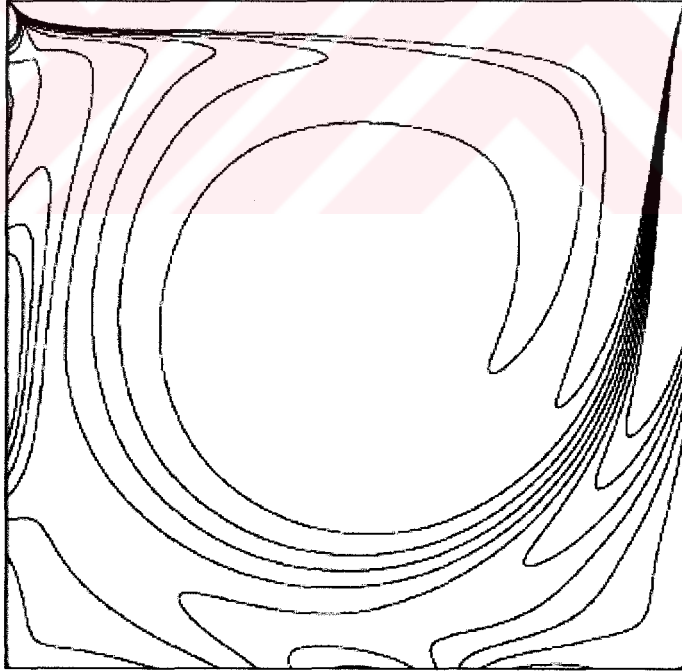
Şekil 7.3. Reynolds sayısı 100 için Akım fonksiyonu kontur grafiği



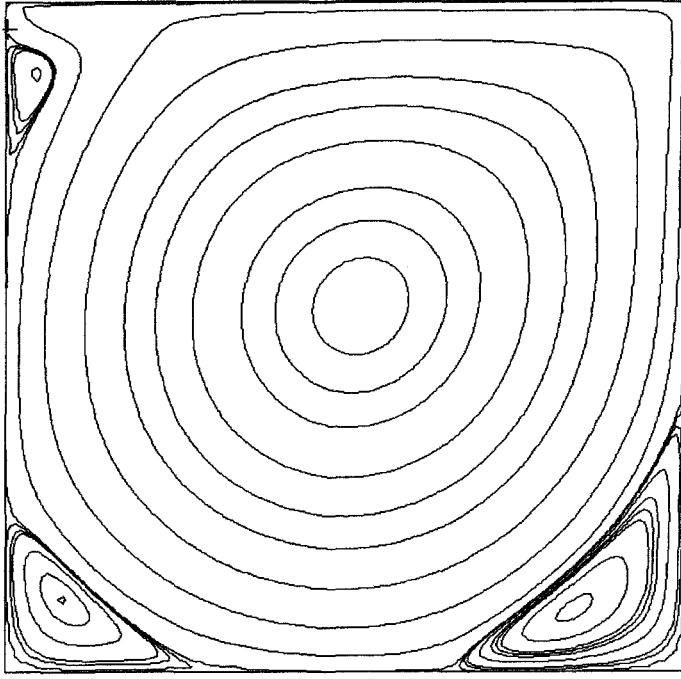
Şekil 7.4. Reynolds sayısı 100 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği



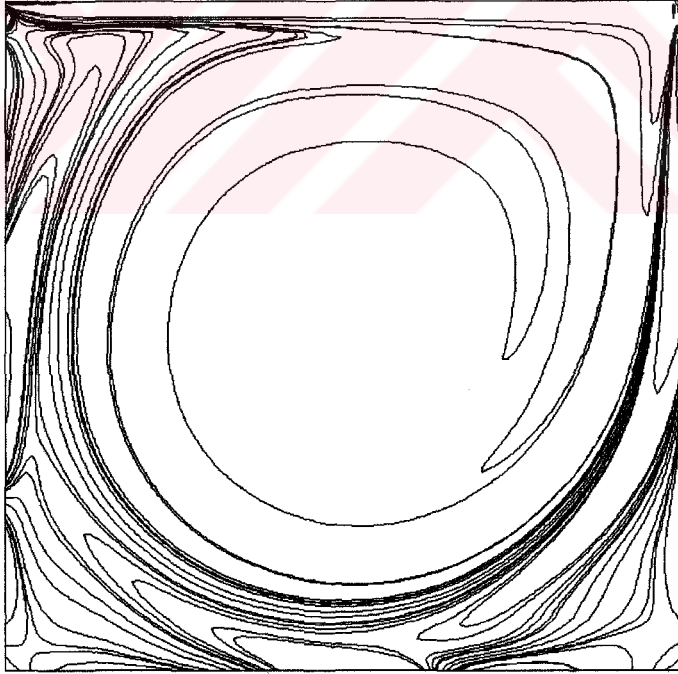
Şekil 7.5. Reynolds sayısı 1000 için Akım fonksiyonu kontur grafiği



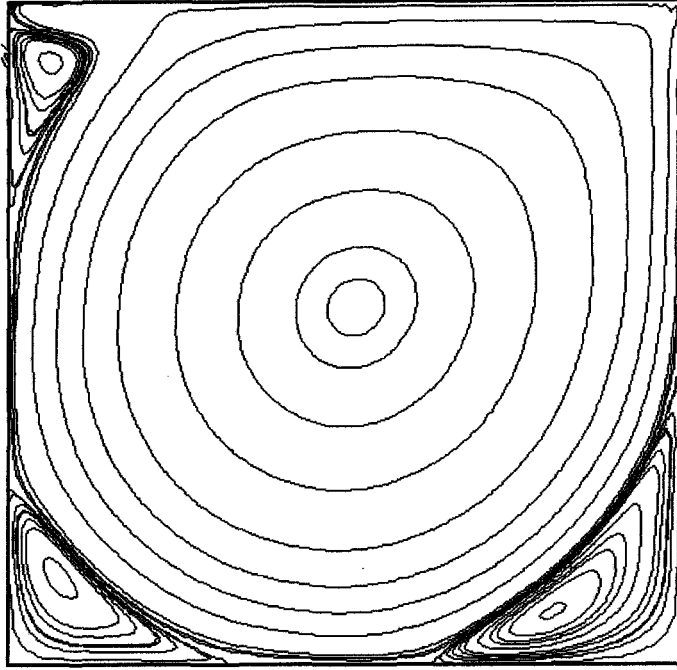
Şekil 7.6. Reynolds sayısı 1000 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği



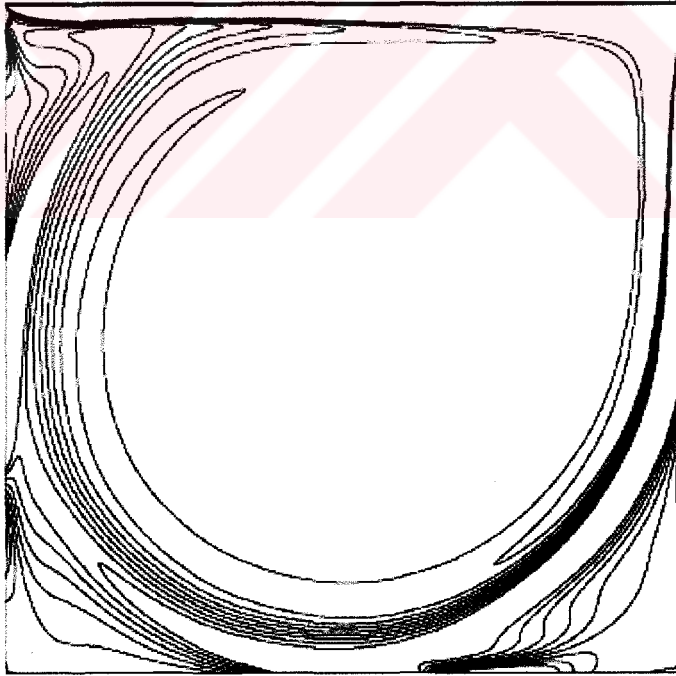
Şekil 7.7. Reynolds sayısı 2500 için Akım fonksiyonu kontur grafiği



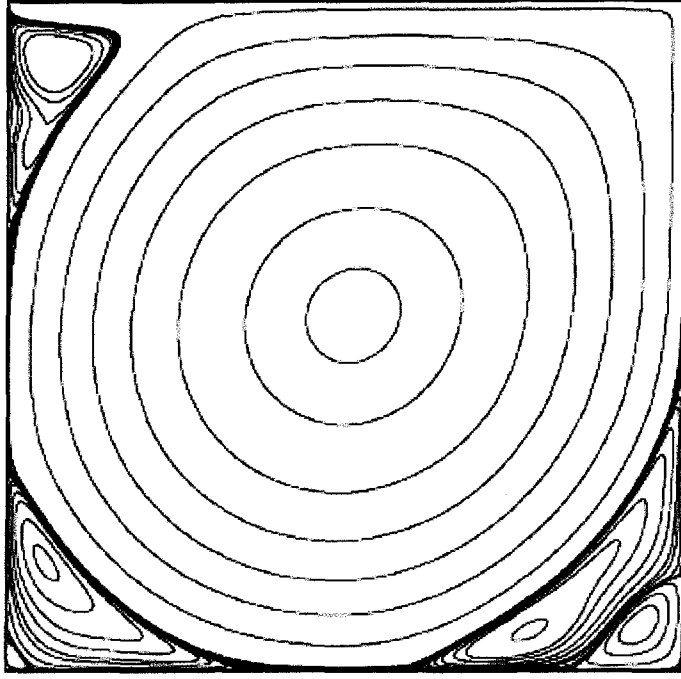
Şekil 7.8. Reynolds sayısı 2500 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği



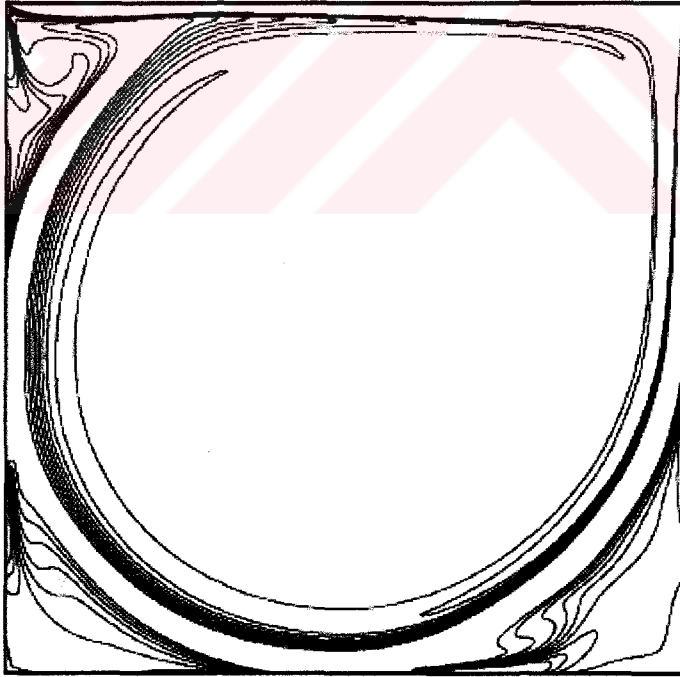
Şekil 7.9. Reynolds sayısı 5000 için Akım fonksiyonu kontur grafiği



Şekil 7.10. Reynolds sayısı 5000 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği



Şekil 7.11. Reynolds sayısı 10000 için Akım fonksiyonu kontur grafiği



Şekil 7.12. Reynolds sayısı 10000 için Vortisiti davranışını gösteren kontur grafiği

Şekil 7.2'den şekil 7.9'a kadar olan grafikler, geliştirilen 4. dereceden Navier-sokes denklemleri için yazılmış olan bilgisayar programının çalıştırılması neticesinde elde edilmiş olup, farklı Reynolds sayılarının ele alındığı senaryolar dahilinde kare kavite alanında $([0,1] \times [0,1])$ akım fonksiyonu ve vortisiti davranışlarını göstermektedirler.

Bu grafiklere ilişkin olarak şunları söylemek mümkündür. Reynolds sayısının küçük değerlerinde (1, 10) akım fonksiyonu grafiğinde henüz girdap (vortex) oluşmazken, Reynolds sayısının 100'e eşit olduğu durumda, kare kavitenin sağ alt köşesinde ilk girdap varlığını göstermektedir. Grafiklerden kolaylıkla görüleceği üzere, Reynolds sayısı büyüdükçe, kavitenin diğer köşelerinde de benzer girdaplar ortaya çıkmaktadır ve var olan girdaplar da etki alanını iç kesimlere doğru genişletme eğilimi göstermektedirler.

Reynolds sayısının küçük değerlerinde kavitenin üst köşesine yakın bir bölgede bulunan ve ilk girdap (primary vortex) olarak adlandırılan girdap, Reynolds sayısı büyüdükçe merkeze doğru yaklaşma eğilimi sergilemektedir. Bu apaçık durum, grafiklerden kolaylıkla gözlemlenmekte ve tespit edilebilmektedir.

Bu çalışmada, Reynolds sayısı 10,000'e kadar olan durumlar için kavite akışı problemi çözülmüştür ve ilgili grafikler (Akım fonksiyonu ve Vortisiti) çizilmiştir. Fakat, Ertürk, Gökçöl [1] tarafından literatüre sunulan çalışmada, Reynolds sayısı 20,000'e kadar olan durumlar için kavite akışı problemi çözülmüş olup, Reynolds sayısının yüksek olduğu senaryolar için akım fonksiyonu ve vortisiti davranışları gösterilmiştir.

Şimdi, Reynolds sayısının değişik değerlerinin ele alındığı senaryolar için kavitenin bazı özel noktalarındaki durumu, literatürde yer alan diğer çalışmalarla özellikle, [1] ile kıyaslayalım.

Aşağıda yer alan tablolar, kavitenin bazı özel noktalarında (İlk Girdap, Primary vortex) elde ettiğimiz sonuçların [1] ve diğer çalışmalarla ([12], [15]) ne denli tutarlılık içerisinde olduğunu göstermektedir. Tablo'daki bilgiler ışığında şu

kolaylıkla ifade edilebilir; bu yaklaşım (4. dereceden, sıkı yaklaşım) doğrultusunda elde edilen neticeler, [1] ve diğer çalışmalarla tutarlılık göstermektedir.



Tablo 7.2. Farklı Reynolds sayıları için ilk girdaptaki (Primary Vortex) minimum Akım fonksiyonu değerleri

Re	[1] $\psi_{\min}(\varphi \Delta x^4)$	[12] $\psi_{\min}(\varphi \Delta x^4)$	TEZ $\psi_{\min}(\varphi \Delta x^4)$	[15] $\psi_{\min}(\varphi \Delta x^4)$
100	-	-	-0.10333	-0,103511
1000	-0,118938	-0,118939	-0,11882	-0,118806
2500	-0,121472	-0,121469	-0,12115	-
5000	-0,122216	-0,122213	-0,12226	-
10000	-0,122306	-0,122313	-0,12211	-

Tablo 7.3. Farklı Reynolds sayıları için ilk girdaptaki (Primary Vortex) minimum Vortisiti değerleri

Re	[1] $\omega_{\min}(\varphi \Delta x^4)$	[12] $\omega_{\min}(\varphi \Delta x^4)$	TEZ $\omega_{\min}(\varphi \Delta x^4)$	[15] $\omega_{\min}(\varphi \Delta x^4)$
100	-	-	3.16435	3,168475
1000	-2.067760	-2.067579	-2.06657	2,06677
2500	-1,976132	-1,976096	-1,96639	-
5000	-1,940547	-1,940451	-1,93827	-
10000	-1,918187	-1,917919	-1,908919	-

Tablo 7.4. Farklı Reynolds sayıları için ilk girdaptaki (Primary Vortex) minimum Akım fonksiyonu ve Vortisiti değerlerinin $[0,1] \times [0,1]$ kavitede bulunma noktaları

Re	[1]		[12]		TEZ		[15]	
	x	y	x	y	x	y	x	y
100	-	-	-	-	0,6172	0,7244	0,61719	0,73438
1000	0,5300	0,5650	0,5300	0,5650	0,5300	0,5650	0,53125	0,5625
2500	0,5200	0,5433	0,5200	0,5433	0,5200	0,5433	-	-
5000	0,5150	0,5350	0,5150	0,5350	0,5150	0,5350	-	-
10000	0,5117	0,5300	0,5117	0,5300	0,5117	0,5300	-	-

8. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME



Bu çalışma ile literatüre yüksek dereceden (4. dereceden) sıkı bir formülasyon sunmuş oluyoruz.

Bu yaklaşım 3X3 sıkı şablon içerisinde 4. dereceden hassasiyette sonuçlar elde etmeye imkan vermektedir.

Literatürde yer alan diğer sıkı formülasyonlardan farkı elde ediliş biçiminden kaynaklanmaktadır.

Bu yaklaşım doğrultusunda geliştirilen 4. dereceden Navier-Stokes denklemleri (DDNS), ihtiva ettiği katsayılar sayesinde kolaylıkla 2. dereceden 4. dereceye kadar hassas sonuçlar elde etmeye imkan tanıyan esnek denklemsel bir görünüme sahiptir. A, B, C, D, E ve F katsayı değerleri 0 kabul edilirse, DDNS denklemleri standart 2. dereceden Navier-Stokes denklemlerine dönüşür. Sonrasında, 2. dereceden Merkez-Fark ayrıştırmaları kullanılırsa 2. dereceden sonuçlar elde edilecektir. Bunun yanında, DDNS denklemlerinin ihtiva ettiği katsayı değerleri ve diğer tüm diferansiyel terimler 2. dereceden Merkez-Fark ayrıştırmaları ile yazılırsa, en sonunda elde edilen çözümler 4. dereceden hassasiyette olacaktır.

DDNS denklemleri literatürde bulunan diğer sıkı formülasyonların aksine sahip olduğu denklemsel form sayesinde bütün ikinci dereceden iteratif sayısal yöntemlerin kendisine uygulanmasına imkan vermektedir.

Bu sıkı formülasyon, aynı hassasiyette sonuçlar veren standart 5 nokta formülasyonunun aksine tekillik (singularity) probleminin neden olduğu bozucu etkiden sıkıntı çekmez. Aynı zamanda, sınıra bitişik noktalarda Akım fonksiyonu ve vortisiti için ayrıca bir denklemsel bir ifadeye gerek duymamaktadır.

Bu tür yaklaşımlarda, son iterasyon denklemlerinde A, B, C, D, E ve F katsayıları bulunduğu için kod yazma aşamasında daha fazla kod yazılmakta ve bununla beraber işlem sayısı ve CPU zamanı da artmaktadır. Fakat, gelişen bilgisayar teknolojisi (İşlemciler ve RAM) çok fazla hesaplamanın söz konusu olduğu bu türde karmaşık işlemleri yapmaya izin vermektedir.

Standart ikinci dereceden yaklaşımlara nazaran programın arzu edilen hassasiyette sonua yakınsaması için geçen CPU zamanı daha uzundur.

Elde edilen sonuçlar, literatürde aynı hassasiyette sonuçlar elde etmeye imkan tanıyan yaklaşımların sonuçları ile uyum içerisindedir.



KAYNAKLAR

- [1] E. Erturk and C. Gokcol, "Fourth Order Compact Formulation of Navier-Stokes Equations and Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers ", International Journal for Numerical Methods in Fluids 2006, Vol 50, pp 421-436
- [2] S. C. Dennis, J. D. Hudson, Compact h4 Finite Difference Approximations to Operators of Navier-Stokes Type, Journal of Computational Physics 1989, Vol 85, pp 390-416.
- [3] R. J. MacKinnon, R. W. Johnson, Differential-Equation-Based Representation of Truncation Errors for Accurate Numerical Simulation, International Journal for Numerical Methods in Fluids 1991, Vol 13, pp 739-757.
- [4] M. M. Gupta, R. P. Manohar, J. W. Stephenson, A Single Cell High Order Scheme for the Convection-Diffusion Equation with Variable Coefficients, International Journal for Numerical Methods in Fluids 1984, Vol 4, pp 641-651.
- [5] W. F. Spitz, G. F. Carey, High-Order Compact Scheme for the Steady Stream function Vorticity Equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering 1995, Vol 38, pp 3497-3512.
- [6] M. Li, T. Tang, B. Fornberg, A Compact Forth-Order Finite Difference Scheme for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids 1995, Vol 20, pp 1137-1151.
- [7] http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_fluid_dynamics, Erişim Tarihi [08/11/2005]
- [8] E. Ertürk, Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği Ders Notları, 2003
- [9] Y. R. Gürkan, Isı transferi denklemlerinin çeşitli sayısal yöntemlerle çözölmesi, Yüksek Lisans Tezi, Gebze 2002

[10] T. Stortkuhl, C. Zenger, S. Zimmer, An Asymptotic Solution for the Singularity at the Angular Point of the Lid Driven Cavity, International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow 1994, Vol 4, pp 47–59.

[11] E. Erturk, Discussions on driven cavity flow and steady solutions at high Reynolds numbers, Kabul edildi.

[12] E. Erturk, T.C. Corke and C. Gokcol, "Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers", International Journal for Numerical Methods in Fluids 2005, Vol 48, pp 747-774

[13] A. Thom. The Flow Past Circular Cylinders at Low Speed. Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1933; 141:651–669

[14] www.cavityflow.com, Erişim Tarihi [10/10/2005]

[15] J. Zhang, "Numerical Simulation of 2-D Square Driven Cavity Using Fourth Order Compact Finite Difference Schemes", International Journal for Numerical Methods in Fluids 1995, Vol 20, pp 1137-1151

ÖZGEÇMİŞ

20 Ekim 1979 tarihinde Üsküdar-İstanbul'da doğdu. İlk ve Orta okulu Üsküdar Ali Nihad Tarlan İlköğretim okulunda tamamladı. Liseyi Üsküdar Şeyh Şamil Lisesinde başarı ile bitirdikten sonra 1996 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Petrol ve Doğal Gaz Mühendisliği Bölümünü kazandı. 2001 yılında bölüm birincisi olarak mezun oldu. 2003 yılında GYTE Enerji Sistemleri Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimini almaya başladı ve 2003 yılında aynı üniversitede Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevi sürdürmektedir.



EK-I**Program Kodu**

Private Sub Form_Load()

N = 129

Beta = 0.4

Iter = 200000

Rey = 1000

End Sub

Private Sub run_Click()

' Değişkenleri tanımlayalım.

Dim Phi(256, 256) As Double

Dim PhiE(256, 256) As Double

Dim W(256, 256) As Double

Dim WE(256, 256) As Double

Dim A(256, 256) As Double

Dim B(256, 256) As Double

Dim C(256, 256) As Double

Dim D(256, 256) As Double

Dim E(256, 256) As Double

Dim F(256, 256) As Double

Dim DD(256, 256) As Double

Dim EE(256, 256) As Double

Dim G1(256, 256) As Double

Dim G2(256, 256) As Double

Dim G3(256, 256) As Double

Dim G4(256, 256) As Double

Dim G5(256, 256) As Double

Dim t As Double

'Dim F7(256,256) As Double

```
'Dim F8(256,256) As Double
```

```
'Dim F9(256,256) As Double
```

```
N = CInt(N.Text)
```

```
Beta = CDbI(Beta.Text)
```

```
Iter = CDbI(Iter.Text)
```

```
Rey = CInt(Rey.Text)
```

```
dx = 1 / N
```

```
dosya = CStr(Rey.Text)
```

```
dosya = dosya + "out.txt"
```

```
Open dosya For Output As 1
```

```
'Describing Initial values
```

```
For i = 0 To N
```

```
For j = 0 To N
```

```
Phi(i, j) = 0
```

```
W(i, j) = 0
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
For s = 1 To 100 ' Dıştaki İterasyon başlıyor.....
```

```
For t = 1 To Iter ' İçteki İterasyon başlıyor.....
```

```
Text1.Text = t
```

```
DoEvents
```

```
For i = 1 To N - 1
```

```
For j = 1 To N - 1
```

```
PhiE(i, j) = Phi(i, j)
```

```
WE(i, j) = W(i, j)
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
'For i = 1 To N - 1
```

```
'For j = 1 To N - 1
```

```
'A(i, j) = ( _
```

```
-(W(i + 1, j) - 2 * W(i, j) + W(i - 1, j) + W(i, j + 1) - 2 * W(i, j) - W(i, j + 1)) / 12 _
```

```
- (Phi(i + 1, j + 1) - 2 * Phi(i, j + 1) + Phi(i - 1, j + 1) - 2 * Phi(i + 1, j) + 4 * Phi(i, j)
```

```
- 2 * Phi(i - 1, j) + Phi(i + 1, j - 1) - 2 * Phi(i, j - 1) + Phi(i - 1, j - 1)) / (6 * dx * dx) _
```

```
)
```

```
'Next j
```

```
'Next i
```

```
For i = 1 To N - 1
```

```
For j = 1 To N - 1
```

```
A(i, j) = ( _
```

```
-(W(i + 1, j) - 2 * W(i, j) + W(i - 1, j) + W(i, j + 1) - 2 * W(i, j) - W(i, j + 1)) / 12 _
```

```
- (Phi(i + 1, j + 1) - 2 * Phi(i, j + 1) + Phi(i - 1, j + 1) - 2 * Phi(i + 1, j) + 4 * Phi(i, j)
```

```
- 2 * Phi(i - 1, j) + Phi(i + 1, j - 1) - 2 * Phi(i, j - 1) + Phi(i - 1, j - 1)) / (6 * dx * dx) _
```

```
)
```

```
Phi(i, j) = Beta * ( _
```

```
(Phi(i + 1, j) + Phi(i - 1, j) + Phi(i, j + 1) + Phi(i, j - 1) + dx * dx * W(i, j) - dx * dx *
```

```
A(i, j) _
```

```
) / 4) + (1 - Beta) * Phi(i, j)
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
'.....
```

```
For i = 1 To N - 1
```

```
For j = 1 To N - 1
```

```
B(i, j) = -Rey * ( _
```

```
Phi(i + 1, j + 1) - Phi(i - 1, j + 1) - Phi(i + 1, j - 1) + Phi(i - 1, j - 1) _
```

```
) / 24 _
```

$$+ \text{Rey} * \text{Rey} * (\text{Phi}(i, j + 1) - \text{Phi}(i, j - 1)) * (\text{Phi}(i, j + 1) - \text{Phi}(i, j - 1)) / 48$$

$$C(i, j) = -\text{Rey} * ($$

$$\text{Phi}(i + 1, j + 1) - \text{Phi}(i - 1, j + 1) - \text{Phi}(i + 1, j - 1) + \text{Phi}(i - 1, j - 1) _$$

$$) / 24 _$$

$$+ \text{Rey} * \text{Rey} * (\text{Phi}(i + 1, j) - \text{Phi}(i - 1, j)) * (\text{Phi}(i + 1, j) - \text{Phi}(i - 1, j)) / 48$$

$$D(i, j) = ($$

$$\text{Phi}(i + 1, j + 1) - 2 * \text{Phi}(i, j + 1) + \text{Phi}(i - 1, j + 1) - \text{Phi}(i + 1, j - 1) + 2 * \text{Phi}(i, j - 1)$$

$$- \text{Phi}(i - 1, j - 1) _$$

$$) / (12 * dx) _$$

$$- \text{Rey} * ($$

$$\text{Phi}(i, j + 1) - \text{Phi}(i, j - 1)) * (\text{Phi}(i + 1, j + 1) - \text{Phi}(i - 1, j + 1) - \text{Phi}(i + 1, j - 1) +$$

$$\text{Phi}(i - 1, j - 1) _$$

$$) / (96 * dx) _$$

$$+ \text{Rey} * ($$

$$\text{Phi}(i + 1, j) - \text{Phi}(i - 1, j)) * (\text{Phi}(i, j + 1) - 2 * \text{Phi}(i, j) + \text{Phi}(i, j - 1) _$$

$$) / (24 * dx)$$

$$E(i, j) = ($$

$$\text{Phi}(i + 1, j + 1) - 2 * \text{Phi}(i + 1, j) + \text{Phi}(i + 1, j - 1) - \text{Phi}(i - 1, j + 1) + 2 * \text{Phi}(i - 1, j)$$

$$- \text{Phi}(i - 1, j - 1) _$$

$$) / (12 / dx) _$$

$$+ \text{Rey} * ($$

$$\text{Phi}(i + 1, j) - \text{Phi}(i - 1, j)) * (\text{Phi}(i + 1, j + 1) - \text{Phi}(i - 1, j + 1) - \text{Phi}(i + 1, j - 1) +$$

$$\text{Phi}(i - 1, j - 1) _$$

$$) / (96 * dx) _$$

$$- \text{Rey} * ($$

$$\text{Phi}(i, j + 1) - \text{Phi}(i, j - 1)) * (\text{Phi}(i + 1, j) - 2 * \text{Phi}(i, j) + \text{Phi}(i - 1, j) _$$

$$) / (24 * dx)$$

$$DD(i, j) = dx * (\text{Phi}(i, j + 1) - \text{Phi}(i, j - 1)) / 2 + dx * dx * D(i, j)$$

$$EE(i, j) = dx * (\text{Phi}(i + 1, j) - \text{Phi}(i - 1, j)) / 2 + dx * dx * D(i, j)$$



G1(i, j) = (_
2 * (1 + B(i, j)) / Rey + 2 * (1 + C(i, j)) / Rey _
)

G2(i, j) = (_
(1 + B(i, j)) / Rey - DD(i, j) / (2 * dx) _
)

G3(i, j) = (_
(1 + B(i, j)) / Rey + DD(i, j) / (2 * dx) _
)

G4(i, j) = (_
(1 + C(i, j)) / Rey + EE(i, j) / (2 * dx) _
)

G5(i, j) = (_
(1 + C(i, j)) / Rey - EE(i, j) / (2 * dx) _
)

Next j

Next i

' Vortisiti iterasyon denkleminde yer alan ve akım fonksiyonuna bağlı birtakım terimleri hesapladıktan sonra

' Kavitenin iç noktalarında vortisiti değerlerini hesaplamamanın tam zamanıdır.

For i = 1 To N - 1

For j = 1 To N - 1



$$\begin{aligned}
 F(i, j) = & (_ \\
 & (\text{Phi}(i, j + 1) - \text{Phi}(i, j - 1)) * (W(i + 1, j + 1) - 2 * W(i + 1, j) + W(i + 1, j - 1) - W(i - 1, j + 1) - \\
 & 1, j + 1) _ \\
 & + 2 * W(i - 1, j) - W(i - 1, j - 1)) _ \\
 & / 24 _ \\
 & - (\text{Phi}(i + 1, j) - \text{Phi}(i - 1, j)) * (W(i + 1, j + 1) - 2 * W(i, j + 1) + W(i - 1, j + 1) - W(i \\
 & + 1, j - 1) _ \\
 & + 2 * W(i, j - 1) - W(i - 1, j - 1)) _ \\
 & / 24 _ \\
 & - (\text{Phi}(i + 1, j) - 2 * \text{Phi}(i, j) + \text{Phi}(i - 1, j)) * (W(i + 1, j + 1) - W(i - 1, j + 1) - W(i + \\
 & 1, j - 1) _ \\
 & + W(i - 1, j + 1)) _ \\
 & / 24 _ \\
 & - (\text{Phi}(i + 1, j) + \text{Phi}(i - 1, j)) * (W(i + 1, j + 1) - W(i - 1, j + 1) - W(i + 1, j - 1) _ \\
 & + W(i - 1, j + 1)) _ \\
 & / 24 _ \\
 & - (\text{Phi}(i, j + 1) - 2 * \text{Phi}(i, j) + \text{Phi}(i, j - 1)) * (W(i + 1, j + 1) - W(i - 1, j + 1) - W(i + \\
 & 1, j - 1) _ \\
 & + W(i - 1, j + 1)) _ \\
 & / 24 _ \\
 & + \text{Rey} * (\text{Phi}(i + 1, j) - \text{Phi}(i - 1, j)) * (\text{Phi}(i, j + 1) - \text{Phi}(i, j - 1)) * _ \\
 & (W(i + 1, j + 1) - W(i - 1, j + 1) - W(i + 1, j - 1) + W(i - 1, j - 1)) _ \\
 & / 96 _ \\
 & - (W(i + 1, j + 1) - 2 * W(i, j + 1) - W(i - 1, j + 1) _ \\
 & - 2 * W(i + 1, j) + 4 * W(i, j) - 2 * W(i - 1, j) + W(i + 1, j - 1) - 2 * W(i, j - 1) + W(i - \\
 & 1, j - 1) _ \\
 &) / (6 * \text{Rey}) _ \\
 &)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(i, j) = & \text{Beta} * (_ \\
 & G2(i, j) * W(i + 1, j) + G3(i, j) * W(i - 1, j) + G4(i, j) * W(i, j + 1) + G5(i, j) * W(i, j \\
 & - 1) _ \\
 & - dx * dx * F(i, j)) / G1(i, j) + (1 - \text{Beta}) * W(i, j)
 \end{aligned}$$

Next j

Next i

For i = 1 To N - 1

$$W(i, 0) = -2 * \text{Beta} * \text{Phi}(i, 1) / (dx * dx) + (1 - \text{Beta}) * W(i, 0)$$

$$W(i, N - 1) = \text{Beta} * (-2 * \text{Phi}(i, N - 1) - 2 * dx) / (dx * dx) + (1 - \text{Beta}) * W(i, N - 1)$$

Next i

For j = 1 To N - 1

$$W(0, j) = -2 * \text{Beta} * \text{Phi}(1, j) / (dx * dx) + (1 - \text{Beta}) * W(0, j)$$

$$W(N - 1, j) = -2 * \text{Beta} * \text{Phi}(N - 1, j) / (dx * dx) + (1 - \text{Beta}) * W(N - 1, j)$$

Next j

$$\begin{aligned} W(0, 0) = & (_ \\ & -(\text{Phi}(1, 1)) / (3 * dx * dx) _ \\ & - (0.5 * W(1, 0) _ \\ & + 0.5 * W(0, 1) + 0.25 * W(1, 1)) / 9 _ \\ &) * 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(N, 0) = & (_ \\ & -(\text{Phi}(im, 1)) / (3 * dx * dx) _ \\ & - (0.5 * W(N - 1, 0) _ \\ & + 0.5 * W(N, 1) + 0.25 * W(N - 1, 1)) / 9 _ \\ &) * 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(N, N) = & (-0.5 / dx _ \\ & - (\text{Phi}(N - 1, N - 1)) / (3 * dx * dx) _ \\ & - (0.5 * W(N - 1, N) _ \\ & + 0.5 * W(N, N - 1) + 0.25 * W(N - 1, N - 1)) / 9 _ \\ &) * 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(0, N) = & (-0.5 / dx _ \\ & - (\text{Phi}(1, N - 1)) / (3 * dx * dx) _ \\ & - (0.5 * W(1, N) _ \end{aligned}$$

$+ 0.5 * W(0, N - 1) + 0.25 * W(1, N - 1)) / 9$
 $) * 9$

For i = 0 To N

For j = 0 To N

Print #1, i * dx, j * dx, A(i, j), Phi(i, j), W(i, j)

Next j

Next i

'err1f1 = 0

'err1g1 = 0

'err2f1 = 0

'err2g1 = 0

'For i = 1 To N - 1

'For j = 1 To N - 1

'err1f2 = Abs(Phi(i, j) - PhiE(i, j))

'err1g2 = Abs(W(i, j) - WE(i, j))

'If err1f2 > err1f1 Then

'err1f1 = err1f2

'End If

'If err1g2 > err1g1 Then

'err1g1 = err1g2

'End If

Next j

Next i

'If err1f2 <= 0.000001 And err1g2 <= 0.000001 Then

'GoTo 20

'End If

Next t

Next s

'20

Fiii = -1000000000

For i = 1 To N - 1

For j = 1 To N - 1

If Phi(i, j) > Fiii Then

Fiii = Phi(i, j)

Maxi = i * dx

Maxj = j * dx

End If

Next j

Next i

Fiiij = 1000000000

For i = 1 To N - 1

For j = 1 To N - 1

If Phi(i, j) < Fiiij Then

Fiiij = Phi(i, j)

Mini = i * dx

Minj = j * dx

End If

Next j

Next i

Print , "Fiii", "Maxi", "Maxj"

Print , Fiii, Maxi, Maxj

Print , "Fijj", "Mini", "Minj"

Print , Fijj, Mini, Minj

Next l

Print #1, "X", "Y", "Phi(X, Y)", "W(X, Y)"

For i = 0 To N

For j = 0 To N

Print #1, i * dx, j * dx, Phi(i, j), W(i, j)

Next j

Next i

Close #1

End Sub

