T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KERR UZAY ZAMANININ YARI KLASİK KUANTUM GRAVİTASYON TEORİSİ İLE İNCELENMESİ

A.Murat AKSOY
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2006

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KERR UZAY ZAMANININ YARI KLASİK KUANTUM GRAVİTASYON TEORİSİ İLE İNCELENMESİ

A.Murat AKSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd.Doç.Dr. Yücel ENGİNER

GEBZE
2006

ÖZET

Biz bu çalışmada Kerr Uzay Zamanının kuantize bir skaler alan ile etkileşmesini ve bu etkileşmeden ortaya çıkacak Stress –Enerji-Momentum tensörünün beklenen değerini incelemeye çalıştık. Bu çalışmada diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözüm metotlarından faydalandık.

SUMMARY

In this study, we have tried to analyse the interaction between Kerr Space-Time and a quantized scalar field and the consequence of this interaction, namely the vacuum expectation value of the Stress-Energy-Momentum Tensor. In this work we used approximate solution techniques of differential equations.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarımızı yaptığımız ortamı bize sağlayan Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nün değerli öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Çalışmamız boyunca benden yardımlarını esirgemeyen tez danışman hocam Yrd.Doç.Dr.Yücel ENGİNER'e şükranlarımı sunarım.

Çalışmam süresince bana manevi destek veren eşime ve aileme de teşekkürü borç bilirim.

Bu çalışmamızın ileride yapılacak olan çalışmalara ışık tutması ümidiyle…

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
1.1. Kerr Metriği	1
1.2.Gravitasyonun Kuantum Teorisi	2
1.3.Bir Skaler Alan İçin Klein-Gordon Denklemi	3
2. KLEİN-GORDON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ	7
2.1. Basitleştirilmiş Radyal Denklemin Yaklaşık Çözümü	9
3. ENERJİ-MOMENTUM TANSÖRÜNÜN VAKUM BEKLENEN DEĞERİNİN HESAPLANMASI	15
3.1. Skaler Alanın Kuantizasyonu	16
3.2. T_{ab} Stress –Enerji-Momentum Tansörünün Vakum Beklenen Değerinin Hesaplanması	17
4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER	26
KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ	28

1. GİRİŞ

1.1.Kerr Metriği

Kerr metriği aşagıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$ds^2 = (1-\frac{2Mr}{\rho^2})dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 -$$

$$(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\theta)\sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{2(2M)ra}{\rho^2}\sin^2\theta d\varphi dt \qquad (1,1)$$

Yukarıdaki denklemde kullanılan Δ ve ρ^2 aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

t=0,r =1, $\theta = 2$, $\varphi = 3$ olsun. Birim sistemimizde G=1 ve c= 1(G gravitasyonel sabit ve c ışık hızı 1'e eşit) dir. M SI birim sisteminde yandaki gibidir $M = \frac{GM}{c^2}$.

Bu metriğin $\Delta = 0$ durumu singularity verir. Yani

$$r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \qquad (1,2)$$

$$r_{hor} = \frac{M \mp \sqrt{M^2 - a^2}}{1} \qquad (1,3)$$

olur.Bu durumda $a \leq M$ olmak zorundadır. Kerr Metriği dönen M kütleli bir cismin oluşturduğu Gravitasyon alanını temsil eder. a açısal momentumu temsil eden terimdir. $a \to 0$ iken bu metrik,

$$ds^2 = (1-\frac{2M}{r})dt^2 - (1-\frac{2M}{r})dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (1,4)$$

Schwarzschild Metriği'ne indirgenir.

Kerr Metriği R.KERR (1963) tarafından keşfedilmiş ve R.H.BOYER ve R.W.LİNDQUIST (1967) tarafından bugün kullandığımız küresel koordinatlardaki görünümüne dönüştürülmüştür.

Kerr Metriği'nin dönen bir küresel simetrik kütlenin oluşturabileceği tek Gravitasyon alanı olduğu B.CARTER (Phys. Rev. Lett. 26, 331,1971) tarafından gösterilmiştir. Bu metriğin detaylı incelemesi L. D. LANDAU, E.M. LIPSCHITZ, The Classical Theory of Fields, Butterworth-Heinman 2000 de görülebilir.

1.2.Gravitasyonun Kuantum Teorisi

Gravitasyonun Kuantum Teorisi henüz çözülememiş bir problem olup pek çok incelemeye konu olmaktadır. Henüz bu problemin açık olması nedeniyle yarı-klasik yaklaşımlar önemini korumaktadır. Yarı-klasik yaklaşımda Klein-Gordon Denklemi incelenen metrik bazında klasik olarak yazılmakta fakat bu klasik dalgaların kuantize bir parçacık ile etkileştiği düşünülmektedir. Bu durumda denklemin üzerinde yazıldığı alan adeta parçacığa etki eden bir hayali potansiyel gibi davranmaktadır. Bu etkileşmeden doğan madde-enerji dağılımı da bu denklemin çözümünden enerji-momentum tansörünün beklenen değerinin bulunması ile tespit edilmektedir.

Yarı-klasik yaklaşım bazı eserlerde çok detaylı olarak incelenmiştir. Bu eserler,N.D.Birrell, P.C.W.Davies, Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press,1994 ve S.A.Fulling, Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time, Cambridge University Press, 1991 dir.

Yarı-Klasik Denklemlerin incelediği yaklaşımın önemi Hawking'in Schwarzschild tipi kara delikleri incelediği 1975 tarihli çalışmasında açıkça görülür. (S.W.Hawking, Commun. Math. Phys. , 43, 199, 1975)

Hawking bu çalışmasında kütlesiz Klein-Gordon Denklemi'ni Schwarzschild metriği bazında yazmış ve çözümleri $\frac{R_{w\ell}(r)}{r}Y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi)e^{-iwt}$ formunda önererek r'ye bağlı $R_{w\ell}(r)$ fonksiyonunun durumlarını çok büyük yarıçaplar için ($r\to\infty$) incelemiştir. Burada bahsedilen $Y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi)$ Küresel Harmonik Fonksiyonları temsil etmektedir.Bu çalışmanın detayları daha önce referans olarak verdiğimiz Birrell-Davies'in eserinde bulunabilir.

1.3.Bir Skaler Alan İçin Klein-Gordon Denklemi

Herhangi bir metrik bazında denklem

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\gamma}\partial_{\gamma}\right]+m^{2}+\xi R\right\}\phi=0 \qquad (1,5)$$

şeklinde yazılır.Bu yazımda ∂_{μ} μ' üncü bileşen cinsinden kısmi türevi ifade eder. Yani $\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x\mu}$ olur. $g^{\mu\gamma}$ elimizdeki metrik tansörün kontravariyant bileşenler cinsinden yazılımıdır.m kütle terimi, R Ricci skaler eğriliğidir. ξ ise R ile olan etkileşimin, yani "Coupling" i temsil eder. ϕ ise aradığımız skaler alan fonksiyonudur.

Biz bu çalışmada kütlesiz bir parçacık ile uğraşacağız.Dolayısıyla m=0 olarak alacağız.R ile etkileşimimizde "minimal coupling" (ξ=0) alınarak yok edilebilir. g bize elimizdeki metrik tansörün determinantını verir.

Bu yaklaşımlar altında (1,5) denklemi nispeten daha basit olan

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\gamma}\partial_{\gamma}\phi\right]=0 \qquad (1,6)$$

denklemine dönüşür.

(1) denkleminde incelediğimiz Kerr Metriği

$$ds^2 = g_{\mu\gamma} dx^{\mu} dx^{\gamma} \tag{1,7}$$

genel metrik formunda düşünülürse metrik tansör $g_{\mu\gamma}$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} g_{00} & 0 & 0 & g_{03} \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ g30 & 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \tag{1,8}$$

şeklinde yazılabilir.(1,8) deki ifadeler açık olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$g_{00} = 1 - \frac{2Mr}{\rho^2}$$

$$g_{11} = 1 - \frac{-\rho^2}{\Delta}$$

$$g_{22} = -\rho^2$$

$$g_{33} = -(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\theta)\sin^2\theta$$

$$g_{03} = g_{30} = \frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\theta \tag{1,9}$$

Burada ρ^2 ile Δ daha önce (1,1) denkleminde verildiği gibidir.(1,8) 'de verilen metrik tansörün detrminantı g ile gösterilir ve hesaplanırsa

$$g = -\rho^4 \sin^2\theta \tag{1,10}$$

olarak bulunur.Böylece (1,6) denkleminde gerekli olan ifadelerden

$\sqrt{-g} = \rho^2 \sin\theta$

olarak tespit edilir.(1,6) denklemi için gerekli olan ve bir metrik üzerinde Klein-Gordon denklemini yazmamızı sağlayan çok önemli bir ifade $g^{\mu\gamma}$ dür.

$$g_{\mu\gamma} g^{\mu\gamma} = \delta_{\mu}^{\rho} \tag{1,11}$$

Denklemi metrik tansörün covariant ve contravariant bileşenleri arasındaki ilişkiyi verir.Bu ilişkiden $g^{\mu\gamma}$ nün, $g_{\mu\gamma}$ nün tersi olduğu anlaşılır.(1,8) matrisinin tersi alınırsa $g^{\mu\gamma}$

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{(r^2+a^2+\frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\theta)}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{2Mra}{\rho^2\Delta} \\ 0 & \frac{-\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{2Mra}{\rho^2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-(1-\frac{2Mr}{\rho^2})}{\Delta\sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{1,12}$$

olarak bulunur.Burada da (1,6) denkleminde gerekli olan $\sqrt{-g}g^{\mu\gamma}$ ifadesinin

$$\sqrt{-g}g^{\mu\gamma}=\begin{bmatrix} \frac{\rho^2\sin\theta(r^2+a^2)+2Mra^2\sin^3\theta}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{2Mra\sin\theta}{\Delta} \\ 0 & -\Delta\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & 0 \\ \frac{2Mra\sin\theta}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{-(\rho^2-2Mr)}{\Delta\sin\theta} \end{bmatrix} \tag{1,13}$$

olduğu görülür.Bu bilgiler ışığında (1,6) denklemi, gereken bileşenler yerine konularak,

$$(\frac{\rho^2(r^2+a^2)+2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2\Delta})\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{4Mra}{\Delta\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi\partial t}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}(\Delta\frac{\partial\phi}{\partial r}) \tag{1,14}$$

$$-\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta})-(\frac{\rho^2-2\mathrm{M}r)}{\rho^2\sin^2\theta\Delta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

formunda açık olarak elde edilir.

Bu denklem hemen görüleceği üzere çok karmaşıktır ve bilhassa $\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi\partial t}$ gibi zaman ile açının karışık türevlerini içermesinden dolayı büyük zorluklar ihtiva eder.Bu karışık terim bizi $\phi(t)=e^{\mp iwt}$ şeklinde bir harmonik çözüm önermekten alıkoymaktadır.Keza denklemin açısal kısımları çok karışık olup klasik sınır değer problemlerinde küresel koordinatlarda sık sık kullanılan $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ küresel harmonik çözümlerini de kabul etmez.

2.KLEİN-GORDON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Kerr Uzay-Zamanda yazılmış olan bu denklemin en genel halleri daha önce aşağıdaki yazarlar tarafından incelenmiştir; (Dictes R. Brill,Paul. L. Chrzanowski,C.Martin Pereria,Edward D. Faderell,James R. Ipses, Physical Review D, Volume 5, Number 8, Page 1913, 1972); (W.G.Unruh, Physical Review D, Volume 10, Number 10, Page 3194, 1974);(L.H. Ford, Physical Review D, Volume 12,Number 10, Page 2963, 1975);(G.Stephanson,J. Phys. A: Math. Gen., Volume 10, No: 1, Page 15, 1977).

Bu yazarlar açısal kısımdan doğan bu problemlere "Oblate Spheroidal Harmonic" fonksiyonlar; $S_{\ell}^{m}(ic,\cos\theta)$ ile yaklaşmışlardır.Biz bu çalışmada oldukça zor olan bu fonksiyonlarla uğraşmamak için normalde t, r, θ, φ değişkenlerine bağlı olması beklenen ϕ yi sadece ϕ(r,t) olarak alacağız.Yani ϕ nin sadece zaman ve yarıçapa bağlı olduğunu kabul edeceğiz. ϕ nin açısal değişkenlerden bağımsızlığı denklemimizi oldukça basitleştirecektir.

ϕ fonksiyonunun açılardan bağımsız olduğunu varsayarak (1,14) denklemini aşağıdaki forma indirgemiş oluruz.

$$\left(\frac{\rho^2(r^2+a^2)+2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2\Delta}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=0 \qquad (2,1)$$

Klein-Gordon tipi denklemlerde zamansal kısmı harmonic çözüm olarak almak en bilinen yaklaşımdır.Bu varsayım bize yarıçapa bağlı denklemde özdeğer ifadesini verecektir.Bu durumda ϕ(r,t) denklemini ayrıştırılabilir formda yani

$$\phi(r,t)=\phi(r)\ \phi(t) \qquad (2,2)$$

şeklinde yazabiliriz.Bunun yanında ϕ(t) yi

$$\phi(t)=e^{\mp iwt} \qquad (2,3)$$

formunda yazabiliriz.Burada w enerjiyi ifade eder.(2,3) yi (2,1) de yerine koyarsak denklemimiz

$$(\frac{(r^2+a^2)}{\Delta}+\frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2\Delta})(-w^2)\phi(r,t)-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}(\Delta\frac{\partial\,\phi(r)}{\partial r})=0 \qquad (2,4)$$

haline dönüşür.

Bu denklem halen içinde $\sin^2\theta$ ve $\cos^2\theta$ (ρ^2 nin açık haline bakılırsa görülecektir)gibi açısal ifadeler bulunması nedeniyle yaptığımız ϕ nin açıdan bağımsız olma varsayımına uyumsuz ifadeler içermektedir.(1,3) nolu denklemde belirttiğimiz $a \le M$ olma şartı $a \approx M$ kabul edilir ve etrafa gravitasyon alanı yayan cismin temel tanecik olduğu düşünülürse M ve dolayısıyla a 'nın çok küçük olacakları varsayılabilir.Eğer büyük r değerleri için incelemek yeterli sayılabilirse $\frac{M}{r}$ veya $\frac{a}{r}$ ifadelerinin çok küçük ve boyutsuz olacağı aşikardır.Dolayısıyla

$$\frac{M}{r} \equiv \frac{a}{r} \ll 1 \qquad (2,5)$$

varsayımında bulunmak yanlış olmaz.Bundan sonra $\frac{M}{r}$ ve $\frac{a}{r}$ nin Kerr Metriği'nin yapısına uygun olarak en fazla ikinci kuvvetlerini saklayacağız ve daha büyük kuvvetlerin 0 olduğunu kabul edeceğiz.Bu yaklaşımlar altında (2,4) denklemi

$$w^2(1+\frac{2M}{r}+\frac{4M^2}{r^2})\phi(r)$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}((r^2-2Mr+a^2)\frac{d\phi(r)}{dr})-\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\frac{d}{dr}((r^2-2Mr+a^2)\frac{d\phi(r)}{dr})\right]=0 \qquad (2,6)$$

haline gelir.Artık $a \approx M$ ifadesini eşitliğe dönüştürüp $a = M$ yazalım.Kalan son açı ifadesi olan $\cos^2\theta$ için incelememizi çok küçük θ açıları ile sınırlayalım.($\theta \ll 1$)Bu sınırlama bize

$$\cos^2\theta \approx 1 \qquad (2,7)$$

yazabilme hakkı verecektir.Artık radyal denklemimiz

$$w^2(1+\frac{2M}{r}+\frac{4M^2}{r^2})\phi(r)$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}((r^2-2Mr+M^2)\frac{d\phi(r)}{dr})-\frac{M^2}{r^2}\frac{d}{dr}((r^2-2Mr+M^2)\frac{d\phi(r)}{dr})\right]=0 \quad (2,8)$$

şekline dönüşecektir.

2.1. Basitleştirilmiş Radyal Denklemin Yaklaşık Çözümü

(2,8) nolu denklemimizde bulunan $\frac{2M}{r}$ kuvvetleri bize

$$x=\frac{2M}{r} \quad (2,9)$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapma cesareti verir.Ancak bu değişken dönüşümünün etkisini incelemeden evvel r nin hangi sınır aralıklarında incelenmesi gerektiğini ve sınırlardaki sınır koşullarını tartışalım.1. bölümde (1,3) nolu denklemde Kerr Metriği'nin ufkunu(horizon) yani "singularity" durumunu incelemiştik.(1,3) denklemine bakılırsa $a=M$ halinde ufkun,

$$r_{hor}=M \quad (2,10)$$

olduğu görülür.Demek ki r yarıçapı M den küçük olamaz.Bu bize r ile ilgili ilk bilgiyi verir.

$$r\geq M \quad (2,11)$$

Ancak (2,5)-(2,11) denklemleri arsında yaptığımız incelemenin (2,5) da belirtildiği gibi $\frac{M}{r}\ll 1$

varsayımına dayandığını hatırlarsak r nin bizim problemimizde M den çok büyük olması gerktiğini farkederiz.Bu bize

$$r\gg M \quad (2,12)$$

koşulunu verir.Bu takdirde r ye vereceğimiz alt sınır hayali bir c sayısı olup

$$c\gg M \quad (2,13)$$

özelliğini taşır.Yani r nin tanım aralığı,

$$c\leq r<\infty \quad (2,14)$$

şeklindedir.O zaman (2,9) de verilen $x = \frac{2M}{r}$ dönüşümü sonunda x in sınırları

$$0 \le x \le \frac{2M}{c} \tag{2,15}$$

olur. $\frac{2M}{c} = \varepsilon$

çok küçük sayı tanımı yapılırsa x in tanım aralığı $x \in [0, \varepsilon]$ şeklinde 1 den çok küçük 0 a çok yakın sayılardan oluşan bir cümleye sıkıştırılmış olur.

(2,9) dönüşümü altında (2,8) denklemi x cinsinden aşağıdaki forma dönüşür.

$$E^2\left(1+x+x^2\right)\phi(x)+\left(x^4-\frac{x^6}{4}\right)\frac{d}{dx}\left(\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)\frac{d\phi}{dx}\right)=0 \tag{2,16}$$

Bu denklemde E=2Mw boyutsuz sabiti tanımlanmıştır.Böylece denklemimiz tümüyle boyutsuz bir forma dönüşmüş olup yaklaşık diferansiyel denklem çözme metotlarının uygulanması artık daha kolay olacaktır.(2,16) denklemini "Normal Form"a getirmek, yani aranan fonksiyonun birinci türevinin olmadığı bir görünüme kavuşturmak için

$$\phi(x) = u(x)v(x)$$

şeklinde bir çözüm önerilirse denklemimiz

$$E^2\left(1+x+x^2\right)uv$$

$$+\left(x^4-\frac{x^6}{4}\right)\left[\left(-1+\frac{x}{2}\right)\left(u'v+v'u\right)+\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)\left(u''v+2u'v'+v''u\right)\right]=0$$

(2,17)

formuna gelir.Bu denklemde v nin katsayılarını sıfıra eşitleyerek

$$\left(-1+\frac{x}{2}\right)u = -2u'\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right) \tag{2,18}$$

denklemine ulaşılır.Bu denklem kolay çözülebilecek bir diferansiyel denklem olup rahatça

$$u=\frac{c_1}{\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2,19}$$

çözümüne ulaşılır.Burada c_1 integrasyon sabitini belirtmektedir. $\phi=uv$ olarak tanımlandığından dolayı u nun çözümünde x in 2. derecesine kadar olan terimlerinin alınması yeterlidir.(2,19) sonucuna binom açılımı uygulanarak u fonksiyonu

$$u\approx c_1\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right) \tag{2,20}$$

olarak elde edilir.Bu sonuç (2,17) denkleminde yerine konularak ve v' katsayılarının sıfıra eşitlendiği hatırlanarak (2,17) denklemi

$$E^2\left(1+x+x^2\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)v+\left(x^4-\frac{x^6}{4}\right)\left(-1+\frac{x}{2}\right)(1+x)\frac{v}{2}$$

$$+\left(x^4-\frac{x^6}{4}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)\frac{v}{2}+\left(x^4-\frac{x^6}{4}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)v''=0 \tag{2,21}$$

haline dönüşür.Biz bu denklemi büyük özdeğer $\left(E^2\gg 1\right)$ varsayımı altında çözeceğiz.

E^2 nin çok büyük değerleri için yukarıdaki (2,21) nolu denklemin 2. ve 3. terimleri ihmal edilebilir.Bu terimler çok küçük olan x in 4. ve 6. kuvvetlerini ve daha fazlasını bulundurduklarından E^2 yi içeren 1.terimin yanında çok küçük olarak kabul edilebilirler.Böylece denklemimiz

$$\left(x^4-\frac{x^6}{4}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)v''+E^2\left(1+x+x^2\right)v=0 \tag{2,22}$$

şeklinde nispeten basit bir forma dönüşür.

Son olarak gerekli sadeleştirmeler yapılır ve E^2 özdeğerinin önünde en fazla x^2 bulunacak şekilde polinom bölmesi metodu ile yaklaşım uygulanırsa denklemimiz

$$v'' + E^2\left(\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{11}{4x}+\frac{37}{16}+\frac{27}{16}x+\frac{19}{16}x^2\right)v = 0 \qquad (2{,}23)$$

şeklinde "Normal Form" görüntüsünde yazılır.

Bu denklem WKB(Wentzel-Kramer-Brilloun) yaklaşımı için uygun bir görüntü vermektedir.WKB yaklaşımı detaylı olarak bazı kitaplarda bulunabilir. (G.Stephanson and P.M.Radmor,Advanced Mathematical Methods For Enginiering and Science Students,Cambridge University Pres,1990). WKB metodu ε çok küçük bir parametre olmak üzere

$$\varepsilon^2\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)y \qquad (2{,}24)$$

denklemini ε nun mertebelerine göre yaklaşık olarak çözmek için kullanılan bir tekniktir. ε nun 1. mertebeye kadar alınması durumunda (2,24) denklemi

$$y = \left[f(x)\right]^{-\frac{1}{4}} e^{\mp\frac{1}{\varepsilon}\int\left[f(x)\right]^{\frac{1}{2}}dx} \qquad (2{,}25)$$

şeklinde iki çözümün lineer kombinasyonuna sahip olur.(2,23)nolu denklemimizde E^2 nin yanındaki parantez içinde yer alan ifade –f(x) olarak tanımlanırsa denklem

$$v'' = E^2 f(x)v \qquad (2{,}26)$$

şekline gelir. $\frac{1}{E} = \varepsilon$ olarak tanımlarsak ve E nin çok büyük olduğunu hatırlarsak denklemimiz WKB ile çözülmeye uygun (2,24) formuna girer.Şimdi (2,25) formülü uygulanırsa

$$v = \frac{Birkomplekssabit}{\left[\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{11}{4x}+\frac{37}{16}+\frac{27}{16}x+\frac{19}{16}x^2\right]^{\frac{1}{4}}} e^{\mp Ei\int\left[\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{11}{4x}+\frac{37}{16}+\frac{27}{16}x+\frac{19}{16}x^2\right]^{\frac{1}{2}}dx}$$

(2,27)

olarak bulunur.Paydadaki terim Binom Açılımı vasıtasıyla paya alınarak ve x in en fazla 2. kuvvetine izin verilerek

$$v \approx \left(x - \frac{x^2}{2} \right) e^{\mp Ei\int \left[\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{11}{4x} + \frac{37}{16} + \frac{27}{16}x + \frac{19}{16}x^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx} \qquad (2,28)$$

daha basit bir form elde edilir.Benzer işlemler integralin içinde de uygulanarak

$$v \approx \left(x - \frac{x^2}{2} \right) e^{\mp Ei\left(-\frac{1}{x} + \ln x + x + \frac{3}{16}x^2 \right)} \qquad (2,29)$$

elde edilir. ϕ(x) fonksiyonun ϕ=uv şeklinde tanımlandığı hatırlanacak olursa ve u nun (2,20) nolu denklemdeki ifadesi ile v nin (2,29) nolu denklemdeki ifadesi birleştirilirse ve x in en fazla 2. derecesi tutulursa

$$\phi \approx xe^{\mp iE\left(\frac{1}{x} - \ln x - x - \frac{3}{16}x^2 \right)} \qquad (2,30)$$

elde edilir.

(2,30) nolu denklemde bulduğumuz sonucun incelenmesi durumunda , x $= \frac{2M}{r}$ olduğu hatırlanacak olursa fonksiyonun büyük r değerlerindeki azalmasının $\frac{1}{r}$ ile oluştuğu görülür.Biz kendi ekseni etrafında dönen küresel simetrik bir cismin gravitasyon alanını, daha önce giriş bölümünde bahsettiğimiz çalışmada ise Hawking statik küresel simetrik bir cismin gravitasyon alanını incelemiş olmasına karşın, her iki sonucun da $\frac{1}{r}$ ile azaldığı görülür.

x değişkeninden r ye geri dönerek ve E yi 2Mw şeklinde yazarak ve (2,30) denklemindeki sonuçların lineer kombinasyonunu alarak aşağıdaki reel sonuca ulaşılır.

$$\phi(r)=\frac{AM}{r}\sin 2Mw\left(\frac{r}{2M}-\ln\frac{2M}{r}-\frac{2M}{r}-\frac{3}{4}\frac{M^2}{r^2}\right)$$

$$+\frac{BM}{r}\cos 2Mw\left(\frac{r}{2M}-\ln\frac{2M}{r}-\frac{2M}{r}-\frac{3}{4}\frac{M^2}{r^2}\right) \qquad (2,31)$$

(2,13) ve (2,14) de verilen sınır özelliklerini düşünerek

$$\phi\left(r=c\right)=0 \qquad (2,32)$$

sınır koşulunu önerebiliriz.Bu koşulun kullanımı ile sonucumuz

$$\phi(r)=\frac{AM}{r}\sin 2Mw\left[\frac{(r-c)}{2M}+\ln\frac{r}{c}+2M\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{r}\right)+\frac{3}{4}M^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right] \qquad (2,33)$$

haline gelir.A complex değerler alabilen bir sabit olup zamansal kısmın çözümlerinin sabitlerine absorbe edilebileceğinden dolayı belirlenmesine gerek yoktur.Hem zaman ,hem uzay bağımlılığını içeren toplam ϕ(r,t) fonksiyonu için (2,3) de önerdiğimiz form hatırlanarak skaler alan fonksiyonunu c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere

$$\phi(r,t)=\left(c_1e^{iwt}+c_2e^{-iwt}\right)\frac{M\sin\left[wf(r)\right]}{r} \qquad (2,34)$$

olarak yazabiliriz.Burada $f(r)$

$$f(r)=(r-c)+2M\ln\frac{r}{c}+4M^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{r}\right)+\frac{3}{2}M^3\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right) \qquad (2,35)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında ϕ fonksiyonuna operatör özelliği atfedip bundan faydalanarak enerji-momentum-stress tansörünün vakum beklenen değerini hesaplamaya çalışacağız.

3.ENERJİ-MOMENTUM TANSÖRÜNÜN VAKUM BEKLENEN DEĞERİNİN HESAPLANMASI

Stress –Enerji-Momentum Tansörü gerek Genel Relativite'de gerekse de bütün alan teorilerinde, bulunulan uzaydaki Momentum ve Stress, Basınç, Shear(Kayma Gerilmesi) gibi temel fiziksel büyüklüklerini veren en önemli dağılım fonksiyonu ya da tansörüdür. Albert Einstein, Einstein Alan Denklemleri'ni oluştururken sistemdeki bütün fiziksel büyüklükleri içeren Stress -Enerji-Momentum tansörünü fiziksel olarak tasarlamış ve bu tansöre Newton Denkleminde kuvvetin gördüğü vazifeyi atfetmiştir. Daha sonra Einstein bir sistemde fiziksel büyüklüklerin korunması ilkesinden hareketle(enerjinin,momentumun,açısal momentumun korunmaları vb.)Stres –Enerji-Momentum Tansörü'nün "Kovaryant Türevi"nin(türevin eğri uzaylarda da geçerli olan genelleştirilmiş hali) sıfır olması gerektiğini yani bu büyüklüklerin korunması gerektiğini düşünmüş ve bu tansöre eşitleyebileceği,korunan yani benzer şekilde "Kovaryant Türevi" sıfır olan denklem niteliği taşıyacak bir tansör aramıştır.Bu tansör Einstein tansörü olup Ricci Tansörü,Ricci Skaler Eğriliği ve Metrik Tansör'ün bir lineer kombinezonudur.Açıkça yazmak gerekirse Einstein Alan Denklemleri sözel olarak

(Einstein Tansörü)=(Enerji-Momentum-Stress Tansörü) (3,1)

olarak yazılabilir.Matematiksel olarak

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = T_{ab} \tag{3,2}$$

olarak yazılır.Burada R_{ab} Ricci Tansörü,R Ricci Skaler Eğriliği, g_{ab} metrik tansör ve T_{ab} de Enerji-Momentum-Stress Tansörüdür.Einstein Alan Denklemleri genellikle eldeki fiziksel oluşuma uygun olarak yazılmış bir T_{ab} nin bilinmesi halinde (3,2) de verilen denklem sisteminin çözülerek g_{ab} Metrik Tansörünün bulunması dolayısıyla eldeki uzayın özelliklerinin saptanması olarak özetlenebilir.

Nasıl ki non-relativistik fizikte potansiyelin ve dolayısıyla kuvvetin bulunması başlıbaşına bir araştırma konusu ise benzer şekilde Genel Relativite'de de Enerji-Momentum-Stress Tansörü'nün bulunması bir araştırma konusu

oluşturur.(3,2) de verdiğimiz Einstein Alan Denklemleri klasik denklemlerdir.Bizim bu çalışmada incelediğimiz Klein-Gordon Denklemi ise Kuantum Alan Teoriktir. O zaman bizim için T_{ab} Enerji-Momentum-Stress Tansörü'nün vakum beklenen değeri anlam taşır.Yani bulmak istediğimiz ifade < T_{ab} > dir.Burada <T_{ab} > , T_{ab} nin vakum beklenen değeri anlamını taşır.

3.1. Skaler Alanın Kuantizasyonu

Skaler alanımız olan ve (2,34) ile (2,35) de belirtilmiş olan ϕ yi kuantize etmek için (2,34) denklemindeki c_1 ve c_2 sabitlerine operatör niteliğini empoze etmeliyiz. c_1 ve c_2 nin isimlerini A ve A^+ ile değiştirerek ve A ile A^+ nın birbirinin hermitik eki olduğunu düşünerek skaler alanımız

$$\phi(r,t)=\left(Ae^{iwt}+A^{+}e^{-iwt}\right)M\,\frac{\sin\left[wf(r)\right]}{r} \tag{3,3}$$

şeklinde yazılabilir. $f(r)$ (2,35) da verildiği gibidir.Ancak A ve A^+ operatörlerinin etkileri ve özelliklerini belirtmeliyiz. A ve A^+ nın özelliklerini görebilmek için içinde çalıştığımız uzayda bir boşluk durumu (Fock Space) tanımlandığını varsayacağız.Boşluk durumu Dirac Notasyonunda

$$\mathrm{I}\,0> \tag{3,4}$$

ile gösterilir ve boş uzayı ya da minimum enerji seviyesini temsil eder.(3,4) da verdiğimiz boşluk durumunun eşleniği de

$$<0\,\mathrm{I} \tag{3,5}$$

ile gösterilir.O zaman A yı yoketme, A^+ yı da yaratma olarak tanımlayabiliriz.Matematiksel olarak

$$A\mathrm{I}\,0>=0 \tag{3,6}$$

ve

$$A^{+}\mathrm{I}\,0>=\mathrm{I}\,1> \tag{3,7}$$

ile ifade edilir.Yani A^+ boşluktan bir parçacık yaratmakta, A ise eldeki parçacığı yoketmektedir.Yani

$$A\,\mathrm{I}\,1>=\mathrm{I}\,0>$$

$$A^{+}\,\mathrm{I}\,1>\mathrm{I}\,2> \qquad (3,8)$$

gibi davranırlar.Genellersek

$$A\,\mathrm{I}\,n>=\mathrm{I}\,n\text{-}1>$$

$$A^{+}\,\mathrm{I}\,n>\mathrm{I}\,n+1> \qquad (3,9)$$

olarak yazabiliriz.

Varsaydığımız Fock Uzayı da parçacık sayısına göre orthonormal olarak kabul edilirse

$$<\mathrm{n}\,\mathrm{I}\,\mathrm{n}>=1 \qquad (3,10)$$

ve

$$<\mathrm{n}\,\mathrm{I}\,\mathrm{m}>=0 \qquad (3,11)$$

$$\mathrm{n}\neq\mathrm{m}$$

olarak tanımlanabilir.

Eğer (3,6)-(3,9) arasında bahsettiğimiz A ve A^{+} operatörlerine de aşağıdaki komütasyon bağıntısı empoze edilirse

$$\mathrm{A}\mathrm{A}^{+}-A^{+}A\equiv\left[A,A^{+}\right]=1 \qquad (3,12)$$

yaratma ve yoketme operatörlerini içeren herhangi bir büyüklüğün beklenen değeri I n >ve < n I arasında "sandwich" edilme metodu ile bulunabilir.Yani açıkça yazılırsa,H beklenen değeri aranan herhangi bir büyüklük, ve keza H, A ve A^{+} nın fonksiyonu olmak üzere

$$<\mathrm{n}\,\mathrm{I}\,\mathrm{H}\,\mathrm{I}> \qquad (3,13)$$

hesaplanabilir.Özel olarak boşluk durumları önemlidir ve

$$<0\,\mathrm{I}\,\mathrm{H}\,\mathrm{I}\,0>\equiv<\mathrm{H}> \qquad (3,14)$$

vakum beklenen değeri bulunabilir.

3.2. T_{ab} Stres –Enerji-Momentum Tansörünün Vakum (Boşluk) Beklenen Değerinin Hesaplanması

Bilinen herhangi bir skaler alandan T_{ab}

$$= \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c \phi \partial_d \phi \qquad (3,15)$$

formülü ile (N.D.Birrell, P.C.W.Davies, Quantum Fields in Curved Space,CambridgeUniversity Pres,1994) bulunabilir.(3,3) de açık ifadesi verilen ϕ nin sadece t ve r ye bağlı olduğunu hatırlarsak (3,15) formülü daha açık olarak

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \left[g^{tt} \partial_t \phi \partial_t \phi + g^{rr} \partial_r \phi \partial_r \phi \right] \qquad (3,16)$$

olarak yazılabilir.

Yukarıdaki formülden görüleceği üzere g_{ab} nin ifadelerine ihtiyacımız vardır. g_{ab} metrik tansörü (1,8) ve (1,9) da verilmişti.Ancak radyal denklemi çözerken yaptığımız en fazla

$x^2 = \left(\frac{2M}{r} \right)^2$ yi tutma yaklaşımını metrik tansörümüze uygulamalıyız.Bu yaklaşım altında g_{ab} nin bileşenleri (1,9) da verilen biçimlerinden şimdi kullanacağımız aşağıdaki hallerine dönüşürler.

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$

$$g_{rr} = -\left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{4M^2}{r^2} \right)$$

$$g_{\theta\theta} = -\left(r^2 + M^2 \right) \qquad (3,17)$$

$$g_{\varphi\varphi} = -\left(r^2 + M^2 \right) \sin^2 \theta$$

$$g_{t\varphi} = g_{\varphi t} = \frac{2M^2}{r} \sin^2 \theta$$

g_{ab} nin contravariant görüntüsü olan g^{ab} nin bileşenleri de

$$g^{tt} = 1 + \frac{2M}{r} + \frac{4M^2}{r^2}$$

$$g^{rr} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$g^{\theta\theta} = -\left(\frac{1}{r^2} - \frac{M^2}{r^4}\right)$$

$$g^{\varphi\varphi} = -\frac{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{M^2}{r^4}\right)}{\sin^2\theta}$$

$$g^{t\varphi} = g^{\varphi t} = \frac{2M^2}{r^3} \qquad (3,18)$$

haline gelir. ϕ nin (3,3) deki açık hali düşünülerek ve vakum beklenen değeri altında $\left(A + A^+\right)^2$ nin davranışı incelenerek ,

$$< 0 \text{ I } \left(A + A^+\right)^2 \text{ I } 0> = < 0 \text{ I } A\,A + A\,A^+ + A^+\,A + A^+\,A^+ \text{ I } 0 > \qquad (3,19)$$

yazılır.Yukarıdaki terimlerden sadece $< 0 \text{ I } A\,A^+ \text{ I } 0 >$ katkı geleceği anlaşılır.Çünkü

$$< 0 \text{ I } A\,A \text{ I } 0 > = 0$$

$$< 0 \text{ I } A^+\,A \text{ I } 0 > = 0$$

$$< 0 \text{ I } A^+\,A^+ \text{ I } 0 > = 0$$

$$< 0 \text{ I } A^+\,A^+ \text{ I } 0 > = 1 \qquad (3,20)$$

olduğu açıkça görülür.

(3,17) ve (3,18) ile (3,3) nin (3,16) formülünde yerine konulması ve beklenen değer alınması sonucu

$$< 0 \text{ I } T_{ab} \text{ I } 0 > \qquad (3,21)$$

beklenen değerinin bileşenleri

$$\mathrm{T_{tt}} = M^2\left[w^2\frac{\sin^2 wf}{r^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)B(r)\right]$$

$$T_{tr} = iM^2 w\frac{\sin wf}{r}\left(\frac{\cos wf}{r}\frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2}\right)$$

$$T_{t\theta} = 0$$

$$T_{t\varphi} = -\frac{M^4}{r}\sin^2\theta B(r)$$

$$T_{rt} = +iM^2 w\frac{\sin wf}{r}\left(\frac{\cos wf}{r}w\frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2}\right)$$

$$T_{rr} = M^2\left(\frac{\cos wf}{r}w\frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{2}M^2\left(1+\frac{2M}{r}+\frac{4M^2}{r^2}\right)B(r)$$

$$T_{r\theta} = 0$$

$$T_{r\varphi} = 0$$

$$T_{\theta t} = 0$$

$$T_{\theta r} = 0$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{M^2}{2}\left(r^2+M^2\right)B(r)$$

$$T_{\theta\varphi} = 0$$

$$T_{\varphi t} = -\frac{M^4}{r}\sin^2\theta B(r)$$

$$T_{\varphi r} = 0$$

$$T_{\varphi\theta} = 0 \qquad (3,22)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{M^2}{2}\left(r^2 + M^2\right)\sin^2\theta B(r)$$

olarak bulunur.Burada B(r) aşağıdaki gibidir.

$$B(r) = \left[\left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{4M^2}{r^2}\right)w^2\frac{\sin^2 wf}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\cos wf}{r}w\frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2}\right)^2\right]$$

(3,23)

f ise daha önce (2,35) da belirtildiği gibidir.(3,22) daki elemanlardan T_{tr} ve T_{rt} özdeş olarak sıfıra eşitlenebilir.Çünkü imajiner olduklarından fiziksel bir büyüklüğe karşılık gelmezler.

$$T_{tr} = T_{rt} \equiv 0$$

(3,24)

Hesaplamamızı nispeten kısaltmak ve daha sade bir şekilde elde etmek için M^4 kuvvetlerini atılabilecek kadar küçük olduğunu kabul edebiliriz.Böylece T_{ab} principal diagonal hale dönüşür ve nispeten basitleşir. T_{ab} nin sıfırdan farklı elemanları artık aşağıdaki gibidir.

$$T_{tt} = M^2 w^2 \frac{\sin^2 wf}{r^2} - \frac{M^2}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)B$$

$$T_{rr} = M^2\left(\frac{\cos wf}{r} w\frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2}\right)^2 + \frac{M^2}{2}\left(1 + \frac{2M}{r}\right)B$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{M^2 r^2}{2}B$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{M^2 r^2}{2}\sin^2\theta B \qquad (3,25)$$

B de daha önce (3,23) de verildiği gibidir.

Elimizdeki ifadeler halen çok karışık olup bir miktar daha basitleştirmek lehimize olacaktır.Bundan sonra M^3 lü terimi de sıfıra eşitlersek (2,35) daki f aşağıdaki gibi olur.

$$f \approx (r-c) + 2M\ln\frac{r}{c} + 4M^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right) \qquad (3,26)$$

(3,25) deki ifadeler de

$$T_{tt} \approx M^2 w^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2} - \frac{M^2}{2} B$$

$$T_{rr} \approx M^2 \left(\frac{\cos wf}{r} w \frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2} \right)^2 + \frac{M^2}{2} B$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{M^2 r^2}{2} B$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{M^2 r^2}{2} \sin^2\theta B \qquad (3,27)$$

haline gelirler.B nin (3,23) de verilen açık ifadesi göz önüne alınarak ve M^2 den büyük terimler yok sayılarak aşağıda forma ulaşılır.

$$T_{tt} = M^2 \left[\frac{w^2 \sin^2 wf}{2r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos wf}{r} w \frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2} \right)^2 \right]$$

$$T_{rr} = M^2 \left[\frac{w^2 \sin^2 wf}{2r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos wf}{r} w \frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2} \right)^2 \right]$$

$$T_{\theta\theta} = M^2 \left[\frac{w^2}{2} \sin^2 wf - \frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos wf}{r} w \frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2} \right)^2 \right]$$

$$T_{\varphi\varphi} = M^2 \sin^2\theta \left[\frac{w^2}{2} \sin^2 wf - \frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos wf}{r} w \frac{df}{dr} - \frac{\sin wf}{r^2} \right)^2 \right] \qquad (3,28)$$

Yukarıdaki yaklaşık ifadelerde dikkati çeken özellikler vardır.Bu özellikler aşağıda belirtilmiştir.

$$T_{tt} = T_{rr}$$

$$T_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta\, T_{\theta\theta} \tag{3,29}$$

Bu ifadeleri daha basitleştirmenin yolu r nin çok büyük değerleri için hesap yaptığımızı hatırlamaktır. $\frac{1}{r^2}$ den küçük terimleri bundan sonra ihmal edeceğiz. f nin (3,26) de verilen yaklaşık ifadesinin türevi

$$\frac{df}{dr} = 1 + \frac{2M}{r} + \frac{4M^2}{r^2} \tag{3,30}$$

olarak bulunur.Bu ifadenin (3,28) de verilen T_{ab} bileşenlerinde yerine yazılması ile ve keza $\frac{1}{r^2}$ den küçük her r ifadesinin ihmali ile T_{ab} de yer alan karmaşık terimler aşağıdaki forma kavuşur.

$$<T_{tt}>=\frac{M^2w^2}{2r^2}$$

$$<T_{rr}>=\frac{M^2w^2}{2r^2}\equiv<T_{tt}>$$

$$<T_{\theta\theta}>=M^2\left[-\frac{w^2}{2}\cos 2wf+\frac{w}{2}\frac{\sin^2 wf}{r}-\frac{\sin^2 wf}{2r^2}\right]$$

$$<T_{\varphi\varphi}>=\sin^2\theta<T_{\theta\theta}> \qquad (3,31)$$

Elimizdeki Stress –Enerji-Momentum Tansörü ifadelerinin vakum beklenen değerleridir.Yukarıdaki ifadelerin en doğru şekillerinin bulunması için bütün w lar üzerinden toplanması gereklidir.Ancak böyle bir integral işleminin bize sonsuz sonucunu vereceği aşikardır.Bu durumda biz çalışmamızı sabit bir özdeğer ile yani sabit bir w ile sınırlandırdık.w nın büyük bir değere haiz olduğu,bir başka deyişle $2Mw\square 1$ şartı altında bu çözümlerin yapıldığını hatırlatmak zorundayız.Keza T_{ab} nin "principal diagonal" olduğunu görürüz ki,Einstein Alan Denklemlerine konulduğunda nispeten en sade görünümü veren Stres –Enerji-Momentum Tansörü biçimidir. $T_{\theta\theta}$ ve $T_{\varphi\varphi}$ ifadelerinin içindeki trigonometrik yapılar seriye açılarak ifadeler daha da basitleştirilebilir.Bu kısımları ilerideki bir çalışmaya bırakarak çözümlerimizi noktalıyoruz.

4.SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER

Bu çalışmada biz Kerr Uzay Zamanının kuantize bir skaler alan ile etkileşmesini ve bu etkileşmeden ortaya çıkacak Stress –Enerji-Momentum tansörünü inceledik.Çalışmamızı sadece zaman ve yarıçap bağımlı bir alan ile ve çok büyük sabit bir enerji özdeğeri ile sınırlandırdık ve çok küçük θ açıları için çözüm yaptık.Gravitasyonun tam bir Kuantum Teorisi'nin olmaması ve Kerr Uzay-Zamanı'nın oldukça karmaşık yapısı bizi pek çok sınırlama altında bu problemi çözmeye yöneltti.Bu çalışmanın sonuçları başka çalışmalarda Einstein Alan Denklemleri'nde yerine konularak ve bu denklemler çözülerek daha faydalı hale getirilebilir.

KAYNAKLAR

1. B.Carter , Phys. Rev. Lett. 26, 331,1971

2. L. D. Landau, E.M. Lipschitz, The Classical Theory of Fields, Butterworth-Heinman 2000

3. N.D.Brill, P.C.W.Davies, Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Pres,1994

4. S.A.Fulling, Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time, Cambridge University Press, 1991

5. S.W.Hawking, Commun. Math. Phys. , 43, 199, 1975

6. Dictes R. Brill,Paul. L. Chrzanowski,C.Martin Pereria,Edward D. Faderell,James R. Ipses, Physical Review D, Volume 5, Number 8, Page 1913, 1972,

7. W.G.Unruh, Physical Review D, Volume 10, Number 10, Page 3194, 1974,

8. L.H. Ford, Physical Review D, Volume 12,Number 10, Page 2963, 1975,

9. G.Stephanson,J. Phys. A: Math. Gen., Volume 10, No: 1, Page 15, 1977,

10. G.Stephanson and P.M.Radmore,Advanced Mathematical Methods For Engineering and Science Students,Cambridge University Press,1990

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında İstanbul' da doğdu. İlköğrenimini Burdur' un Gölhisar İlçesi'nde 27 Mayıs İlköğretim Okulu'nda , orta öğrenimini Burdur Cumhuriyet Lisesinde tamamladı.Lisans eğitimini Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nde bitirdi.

Yurdun çeşitli şehirlerinde öğretmenlik görevi yapmış olup şu anda Erzincan'ın Kemaliye İlçesi'nde Matematik Öğretmenliği yapmaktadır.