

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK FONKSİYONLARIN
TEKİLLİKLERİ VE KAPASİTE

NURHAN OKÇU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2003

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK FONKSİYONLARIN
TEKİLLİKLERİ VE KAPASİTE

NURHAN OKÇU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof.Dr.Tahir ALİYEV

GEBZE
2003

ÖZET

Bu tezde kapasite, polar kümeler, subharmonik fonksiyonların devam problemi ele alınmış olup, bunlardan yararlanarak Phragmen Lindelöf tipi teoremler ispatlanmıştır.

SUMMARY

In this thesis, capacity, polar sets and the continuation problem of subharmonic functions have been considered and as an application new Phragmen-Lindelöf type theorems have been proved.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından ötürü çok değerli öğretmenim Sn. Prof. Dr. Tahir ALİYEV'e, Sn. Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY'a, Sn. Prof. Dr. Ali ALKUMRU'ya ve çalışmam süresince bana destek olan eşim Yaşar OKÇU, yeğenim Doğan OKÇU, okul müdürüm Abdürrahim KÖKSAL'a değerli arkadaşlarım Bülent Nafi ÖRNEK, Abidin BAZIN ve Selda IŞIN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
GİRİŞ	1
1. POTANSİYEL VE KAPASİTE	2
1.1 Subharmonik Fonksiyonlar	2
1.2. Potansiyel ve Kapasite	6
1.3. Polar Küme Ve Uygulamaları	18
2. SUBHARMONİK DEVAM	25
2.1.Subharmonik devam	25
2.2 Phragmen-Lindelöf Teoreminin Bir Genellemesi	31
SONUÇ	36
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	39

GİRİŞ

$R^m, m \geq 2$ boyutlu Öklit uzayı olsun. Kapasitesi sıfır olan E kümesi açık $D \subset R^m$ 'in onda kapalı olan alt kümesi ise, $D - E$ 'de yukarıdan sınırlı her subharmonik fonksiyonun D 'ye (tek) subharmonik devamı vardır . Bir çok alanlarda uygulaması olan bu sonuç M.Brelot tarafından ispatlanmıştır. Hayman ve Kennedy'in "Subharmonic function" isimli monografisinde bu teorem genelleştirilmiş olup, E 'nin D 'de kapalılığı koşulu yerine ona yakın olan bir koşul kullanılmıştır: E 'nin sıfır kapasiteli kompaktların sayılabilir birleşimine dahil olduğu varsayılmıştır.

P.M.Tamrazov tarafından daha genel, E 'nin üzerine kapalılık veya benzeri koşulların konulmadığı hal incelenmiştir. Tezde subharmonik fonksiyonlardan daha genel " Kuazi subharmonik" denilen fonksiyonlar sınıfı için devam problemleri ele alınmış olup, Phragmen Lindelöf tipi teoremlere uygulaması yapılmıştır.

Tezin esas kısmı iki bölümden oluşuyor. Birinci bölümde subharmonik fonksiyon, potansiyel, kapasite ve polar küme gibi kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde kuazi subharmonik fonksiyonlar için devam problemi incelenmiş olup Phragmen Lindelöf tipi teoremler ispatlanmıştır.

Sonuçların ispatında [1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 15,] makaleleri ve [16, 17, 18, 19, 20, 26] kitapları kullanılmıştır.

1. POTANSİYEL VE KAPASİTE

1.1 Subharmonik Fonksiyonlar

R^m , m boyutlu Öklit uzayı olsun. $E \subset R^m$ kümesinde tanımlanmış reel değerli $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ona yukarıdan yarı süreklidir denir:

$$(i) -\infty \leq f(x) < \infty, \quad x \in E;$$

$$(ii) \forall a \in (-\infty, \infty) \text{ sayısı için } \{x : x \in E, \quad f(x) < a\} \text{ kümesi açıktır.}$$

$-f(x)$ fonksiyonu yukarıdan yarı sürekli olduğu taktirde $f(x)$ aşağıdan yarı süreklidir denir. Yarı sürekli fonksiyonların bazı önemli özelliklerini sıralayalım.

Önerme 1.1 : $E \neq \emptyset$ kompakt kümesinde yukarıdan yarı sürekli olan $f(x)$ fonksiyonu E ' de maksimum değerini alır, yani $\exists x_0 \in E$ öyle ki

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in E .$$

Önerme 1.2 : Monoton azalan yukarıdan yarı sürekli $f_n(x)$ fonksiyonlar dizisinin limiti, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ yukarıdan yarı süreklidir.

Önerme 1.3 : E kümesinde yukarıdan yarı sürekli olan $f(x)$ fonksiyonu için E ' de tanımlanmış öyle azalan sürekli $f_n(x)$ fonksiyonları dizisi vardır ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in E .$$

Önerme 1.4 : $u : E \rightarrow (a, b)$ fonksiyonu yukarıdan yarı sürekli, $f : (a, b) \rightarrow R$ fonksiyonu ise sürekli ve azalan olsun. Bu taktirde $f[u(x)]$ fonksiyonu E 'de süreklidir.

Tanım 1.5 : Reel eksenin I aralığında tanımlanmış reel değerli $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyorsa konvektir denir :

Her $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ noktaları ve

$$l(x_1) \geq f(x_1), \quad l(x_2) \geq f(x_2)$$

koşullarını sağlayan her $l(x)$ lineer fonksiyonu için

$$l(x) \geq f(x) \quad (x_1 < x < x_2).$$

x_0 herhangi nokta, r pozitif sayı olmak üzere ;

$$\begin{aligned}
D(x_0, r) &= \{x : |x - x_0| < r\}, \\
C(x_0, r) &= \{x : |x - x_0| \leq r\}, \\
S(x_0, r) &= \{x : |x - x_0| = r\}
\end{aligned}$$

olsun.

Tanım 1.6 : Aşağıdaki koşullar sağlandığı taktirde $D \subset R^m$ kümesinde tanımlanmış $u(x)$ fonksiyonu subharmoniktir denir:

- (i) $-\infty \leq u(x) < +\infty \quad \forall x \in D,$
- (ii) $u(x)$, D 'de yukarıdan yarı süreklidir,
- (iii) Her $x_0 \in D$ noktası için r istenilen kadar küçük pozitif sayı olmak üzere

$$u(x_0) \leq \frac{1}{C_m r^{m-1}} \int_{S(x_0, r)} u(x) d\sigma(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $d\sigma(x)$ ifadesi $S(x_0, r)$ 'in yüzey alanıdır. Açıktır ki u ve $-u$ 'nun aynı anda subharmonik olması için gerek ve yeter koşul u 'nun harmonik olmasıdır.

Subharmonik fonksiyonların bazı özelliklerini sıralayalım :

1. $u_1, u_2, \dots, u_k$ fonksiyonları subharmonik ve $t_1, t_2, \dots, t_k$ negatif olmayan reel sayılar ise

$$u = \sum_{v=1}^k t_v u_v$$

subharmoniktir.

2. $u_1, u_2, \dots, u_k$ fonksiyonları D 'de subharmonik iseler

$$u(x) = \sup_{v=1, k} u_v(x),$$

subharmoniktir.

3. Kompleks değişkenli $f(z)$ fonksiyonu $D \subset C$ bölgesinde analitik ise

$$u(z) = \log |f(z)|$$

subharmoniktir.

Aşağıdaki önermede yer alan Jensen eşitsizliğinden yararlanılarak diğer subharmonik fonksiyonlar sınıfları üretilebilir.

Önerme 1.7 : $u, E \subset R^m$ kümesinde tanımlanmış reel değişkenli fonksiyon, $\phi(u)$ ise $u(x)$ 'in E deki görüntüsünü içeren bir intervalde konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\phi\left\{\frac{1}{\mu(E)} \int_E u(x) d\mu(x)\right\} \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E \phi[u(x)] d\mu(x),$$

Burada, ya $E \subset R^m$ ölçülebilir ve $d\mu$ Lebesgue ölçüsüdür, ya da E, R^m deki bir S hyperyüzeyi üzerinde ölçülebilir küme ve $d\mu$ S 'de yüzey alanıdır;

$u(x)$ fonksiyonu E 'de integrallenebilirdir ve $0 < \mu(E) < \infty$.

4. u, D bölgesinde subharmonik, konveks monoton azalmayan $\phi(u)$ fonksiyonu ise u 'nun R görüntüsünde tanımlanmış olsun veya u, D 'de harmonik ve $\phi(u)$ ise R 'de konveks olsun. Bu taktirde $\phi[u(x)]$, D 'de subharmoniktir.

Özel halde 4 den aşağıdaki sonuçlar çıkar:

(i) $u(x), D$ 'de subharmonik ise $\lambda > 0, k \geq 1$ ve $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ olmak üzere $e^{\lambda u}$ ve $[u^+(x)]^k$ fonksiyonları da subharmoniktir.

(ii) u, D 'de harmonik ve $k \geq 1$ ise $|u(x)|^k$ D 'de subharmoniktir.

(iii) $f, D \subset C$ bölgesinde regüler, $\log^+ |f| = \max(\log |f|, 0)$ $k \geq 1, \lambda > 0$ olmak üzere $(\log^+ |f|)^k$ ve $|f|^\lambda$ fonksiyonları subharmoniktir.

Subharmonik fonksiyonların en önemli özelliklerinden biri maximum ilkesidir.

Teorem 1.8 : $u(x), D \subset R^m$ bölgesinde subharmonik olsun. D 'nin her ζ sınır noktası ve $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$u(x) < \varepsilon \quad \forall x \in N \cap D \quad (1.1)$$

olacak şekilde ζ 'nin bir N komşuluğu bulunabiliyorsa, D de ya $u(x) < 0$ ya da $u(x) \equiv 0$ dır. Eğer D sınırsız ve $\zeta = \infty$ ise (1.1)'in $N = \{x : |x| > R\}$ komşuluğunda sağlandığını varsayacağız.

5. $u(x) \not\equiv -\infty$ fonksiyonu R^m 'in kapalı $r_1 \leq |x - x_0| \leq r_2$ halkasında subharmonik olsun. Bu taktirde

$$I(r, u) = \frac{1}{C_m r^{m-1}} \int_{S(x_0, r)} u(x) d\sigma(x)$$

ifadesi $m = 2$ ise $\log r$ 'nin, $m > 2$ ise r^{2-m} 'nin $r_1 \leq r \leq r_2$ aralığında konveks fonksiyonu olur. ($0 < r_1 < r_2$). Eğer $r_1 = 0$ ve $u(x)$ $C(x_0, r_2)$ de subharmonik ise, $I(0, u) = u(x_0)$ olmak üzere, $I(r, u)$ fonksiyonu $[0, r_2]$ aralığında sürekli ve azalmayandır.

6. 5'in koşulları dahilinde

$$B(r, u) = \sup_{x \in S(x_0, r)} u(x),$$

ifadesi $m = 2$ ise $\log r$ 'nin, $m > 2$ ise r^{2-m} 'in $[r_1, r_2]$ aralığında konveks fonksiyonudur. ($0 < r_1 < r_2$).

Eğer u fonksiyonu $C(x_0, r_2)$ de subharmonik ise, $B(r, u)$ r 'nin $[0, r_2]$ de azalmayan fonksiyonudur.

$X \subset R^m$ olsun. (Çoğu zaman X in bölge veya R^m de kompakt olduğunu varsayacağız). X de tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonu için $\{x : f(x) \neq 0\}$ kümesinin R^m deki kapanışına $f(x)$ in dayanağı (support) denir. Açıktır ki dayanak $f(x) \neq 0$ koşulunu sağlayan bütün noktalardan ve onların limit noktalarından oluşmaktadır.

X 'de sürekli olup dayanağı X de kompakt olan bütün fonksiyonlar kümesini $C_0 = C_0(X)$ ile göstereceğiz. X kompakt ise C_0 , X de sürekli olan fonksiyonlar kümesidir. X bir D bölgesi ise $C_0^\infty(D)$ ile, D de sonsuz diferansiyellenen dayanağı D de kompakt olan fonksiyonlar kümesini göstereceğiz.

f fonksiyonunun dayanağını $\text{supp } f$ ile göstereceğiz.

Dayanağı $D(0, r)$ de olan $K_\delta(x)$ Borel fonksiyonunu ele alalım. $\mu(x)$, $D(0, r)$ de Borel ölçüsü, $f(x)$ ise sınırlı $D \subset R^m$ bölgesinde tanımlanmış fonksiyon olmak üzere

$$F(x) = \int K_\delta(y) f(x+y) d\mu(y)$$

olsun.

D bölgesi ve δ sayısı için

$$D^0(\delta) = \{x : \text{dist}(x, R^m - D) > \delta\}$$

kabul edelim.

Aşağıdaki teoremi ileride kullanacağız.

Teorem 1.9 : (i) f, D 'de subharmonik ve $K_\delta(y) \geq 0$ ise $F(x)$ fonksiyonu $D^0(\delta)$ da s.h. dir. Eğer f, D de harmonik ise $F(x)$ $D^0(\delta)$ harmoniktir.

(ii) Eğer $d\mu$ p boyutlu Lebesgue ölçüsü, $K_\delta(y) \in C^p$ ve $f(x)$ D 'de integrallenebilir fonksiyon ise $F(x)$, $D^0(\delta)$ kümesinde C^p 'dendir.

1.2 Potansiyel ve Kapasite

x uzaydaki nokta ve $\alpha > 0$ olmak üzere

$$K_\alpha(x) = -|x|^{-\alpha}$$

$$K_0(x) = \log|x|$$

$E \subset R^m$ kompakt μ, E de tanımlanmış ölçü, $\mu(E) = 1$ olsun.

Bu takdirde

$$V_\alpha(x) = \int_E K_\alpha(x-y) d\mu(y)$$

ifadesine α -potansiyeli diyeceğiz.

$\alpha \leq m-2$ ise $K_\alpha(x)$ 'in R^m de subharmonik olduğunu biliyoruz. Buradan Teorem 1.8'e göre $V_\alpha(x)$ fonksiyonu da R^m 'de subharmoniktir. $\alpha = m-2$ ise $V_\alpha(x)$, E 'nin dışında harmoniktir. Bu durum önemli olduğu için (Newton

potansiyeli) bazen $K_{m-2}(x)$ yerine $K(x)$, $V_{m-2}(x)$ yerine $V(x)$ yazacağız. Eğer $\alpha > m - 2$ ise $V_\alpha(x)$ E nin dışında subharmoniktir.

Her durumda $K_\alpha(x), R^m$ 'de yukarıdan yarı süreklidir ve bundan dolayı Teorem 1.8'e göre $V_\alpha(x)$ de R^m 'de yukarıdan yarı süreklidir. Aşağıdaki teorem aslında $V_\alpha(x)$ in bundan daha iyi özelliğe sahip olduğunu gösterir.

Teorem 1.10 : (Süreklilik ilkesi) Eğer $x_0 \in E$ ve

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} V_\alpha(x) = V_\alpha(x_0)$$

ise

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in R^m}} V_\alpha(x) = V_\alpha(x_0).$$

Bu teorem $V_\alpha(x)$ 'in E ye kısıtlamasının x_0 'da sürekli olduğu takdirde onun kendisinin de x_0 'da sürekli olduğunu göstermektedir.

İspat : $V_\alpha(x)$, E 'de tanımlanmış fonksiyon olarak x_0 noktasında sürekli olduğundan dolayı $V_\alpha(x_0) = V_0 > -\infty$. Öteki yandan $V_\alpha(x)$ yukarıdan yarı sürekliydi, yani

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} V_\alpha(x) \leq V_0. \quad (1.2)$$

Şimdi

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} V_\alpha(x) \geq V_0 \quad (1.3)$$

eşitsizliğini ispatlayacağız.

V_0 sonlu olduğundan dolayı $\{x_0\}$ 'in ölçüsü pozitif değildir. $\rho > 0$ olsun.

E 'nin tümleyeni D ve

$$D_\rho = D \cap D(x_0, \rho), \quad E_\rho = E \cap C(x_0, \rho) \quad (1.4)$$

olsun.

Eğer x_0 E 'nin ayrık noktası ise her durumda $V_\alpha(x), x_0$ da süreklidir, x_0 E 'nin iç noktası ise onun bir $D(x_0, \rho)$ komşuluğu E ye dahildir ve teoremin hükmü açıktır.

Şimdi varsayalım ki x_0 hem E 'nin hem D 'nin limit noktasıdır. $x \in D_\rho$ ve x_1, E_ρ 'nun x 'e en yakın noktası olsun, yani

$$|x_1 - x| \leq |x - a| \quad \forall a \in E_\rho.$$

Bu taktirde

$$|x_1 - a| \leq |x - x_1| + |x - a| \leq 2|x - a| \quad \forall a \in E_\rho. \quad (1.5)$$

Verilmiş $\varepsilon > 0$ sayısı için, $V_\alpha(x_0)$ sonlu olduğundan dolayı, öyle ρ seçebiliriz ki

$$\int_{E_\rho} -K_\alpha(x_0 - a) d\mu(a) < \varepsilon \quad (1.6)$$

sağlansın.

$$\int_{E-E_\rho} K_\alpha(x - a) d\mu(a) \quad (1.7)$$

ifadesinin x_0 noktasında sürekli olduğu açıktır. Böylelikle $V_\alpha(x_1)$, x_1 'in x_0 noktasında sürekli fonksiyonu olduğundan dolayı

$$\int_{E_\rho} K_\alpha(x_1 - a) d\mu(a) = V_\alpha(x_1) - \int_{E-E_\rho} K_\alpha(x - a) d\mu(a) \quad (1.8)$$

ifadesi x_1 'in E deki fonksiyonu olarak x_0 da sürekli dir. Böylelikle $|x_1 - x_0| < \rho_1 < \rho$ ise

$$\int_{E_\rho} -K_\alpha(x_1 - a) d\mu(a) < \int_{E_\rho} -K_\alpha(x_0 - a) d\mu(a) + \varepsilon < 2\varepsilon. \quad (1.9)$$

Varsayalım ki $|x - x_0| < \rho_2 < \frac{1}{2}\rho_1$. Bu taktirde (1.5)'e göre $|x_1 - x_0| < \rho_1$ dir.

$\alpha = 0$ ise (1.5)'den

$$-K_\alpha(x - a) \leq -K_\alpha(x_1 - a) + \log 2 \quad (1.10)$$

elde ederiz .

Demek ki ρ yu $\mu(E_\rho) < \varepsilon$ olacak şekilde seçersek

$$\int_{E_\rho} -K_\alpha(x - a) d\mu(a) \leq \int_{E_\rho} -K_\alpha(x_1 - a) d\mu(a) + \mu(E_\rho) \log 2 < 3\varepsilon. \quad (1.11)$$

Eğer $\alpha > 0$ ise (1.5)'den

$$\int_{E_\rho} -K_\alpha(x - a) d\mu(a) \leq 2^\alpha \int_{E_\rho} -K_\alpha(x_1 - a) d\mu(a) < 2^{1+\alpha} \varepsilon. \quad (1.12)$$

$$\int_{E-E_\rho} K_\alpha(x-a) d\mu(a) \quad (1.13)$$

ifadesinin $x = x_0$ da sürekliliğinden dolayı $|x - x_0| < \rho_2$ dir ve demek ki $|x_1 - x_0| < 2\rho_2$ için ρ_2 , yeteri kadar küçük olduğu taktirde

$$\left| \int_{E-E_\rho} K_\alpha(x-a) d\mu(a) - \int_{E-E_\rho} K_\alpha(x_1-a) d\mu(a) \right| < \varepsilon, \quad (1.14)$$

sağlanır, çünkü her iki integral (1.13) ifadesine yaklaşıyor. Sonuçta

$$\begin{aligned} |V_\alpha(x) - V_\alpha(x_1)| &\leq \left| \int_{E-E_\rho} \{K_\alpha(x-a) - K_\alpha(x_1-a)\} d\mu(a) \right| \\ &+ \left| \int_{E_\rho} K_\alpha(x-a) d\mu(a) \right| + \left| \int_{E_\rho} K_\alpha(x_1-a) d\mu(a) \right| < 6^{1+\alpha} \varepsilon \end{aligned} \quad (1.15)$$

elde ediyoruz.

$V_\alpha(x_1)$, $x_1 = x_0$ noktasında sürekli olduğundan dolayı (1.3) sağlanır.

Aşağıdaki Teoremden de yararlanacağız.

Teorem 1.11 : Varsayalım ki Teorem 1.8'in koşulları sağlanır ve

$$V_\alpha(x) \geq \mu_0 \quad \forall x \in E \quad (1.16)$$

Bu taktirde

$$V_\alpha(x) \geq \mu'_0 \quad \forall x \in R^m \quad (1.17)$$

burada

$$\alpha > 0 \text{ ise } \mu'_0 = 2^\alpha \mu_0, \quad \alpha = 0 \text{ ise } \mu'_0 = \mu_0 - \log 2. \quad (1.18)$$

İspat : D, E nin tümleyeni olsun. Herhangi $x \in D$ noktası ve E nin x 'e en yakın noktalarından biri olan x_1 'i ele alalım. Bu taktirde $\forall a \in E$ için

$$|x_1 - x| \leq |x - a| \quad (1.19)$$

ve

$$|x_1 - a| \leq 2|x - a| \quad (1.20)$$

(bak.(1.5)). Bundan dolayı $\alpha > 0$ için

$$K_\alpha(x - a) \geq 2^\alpha K_\alpha(x_1 - a) \quad (1.21)$$

ve

$$V_\alpha(x) \geq 2^\alpha V_\alpha(x_1) \geq \mu'_0 \quad (1.22)$$

$\alpha = 0$ ise

$$K_0(x - a) \geq K_0(x_1 - a) - \log 2 \quad (1.23)$$

ve bundan dolayı

$$V_0(x) \geq V_0(x_1) - \log 2 \int_E d\mu \geq \mu_0 - \log 2 = \mu'_0 \quad (1.24)$$

elde ediyoruz.

$$I_\alpha(\mu) = \int_E V_\alpha(x) d\mu(x) = \iint_{E \times E} K_\alpha(x - y) d\mu(x) d\mu(y) \quad (1.25)$$

olsun.

$K_\alpha(x - y)$ fonksiyonu E de yukarıdan sınırlı olduğundan dolayı (1-25) integrali mevcuttur.

$$V_\alpha = \sup_\mu I_\alpha(\mu) \quad (1.26)$$

ifadesine E 'nin denge değeri diyeceğiz. E 'nin çapı d olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} K_0(x - y) &\leq \log d, \\ K_\alpha(x - y) &\leq -d^{-\alpha}, \quad \alpha > 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

sağlanır. $\mu(E) = 1$ olduğundan dolayı

$$V_0 \leq \log d, \quad V_\alpha \leq -d^{-\alpha} \quad \alpha > 0. \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} C_0(E) &= e^{V_0}, \quad \alpha = 0 \text{ ise}, \\ C_\alpha(E) &= (-V_\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \text{ ise}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

sayısına E kümesinin α kapasitesi denir.

Açıktır ki

$$0 \leq C_\alpha(E) < \infty \quad (1.30)$$

dır.

Eğer $C_\alpha(E) = 0$ ise her μ ölçüsü için $I_\alpha(\mu) = -\infty$ olduğunu görüyoruz.

(1.26) deki V_α supremumunun alındığını, yani V_α nın E deki bir ölçüsünün enerji integrali olduğunu göstermek (bu ölçüye denge ölçüsü diyeceğiz) için ölçüler teorisinden aşağıdaki teoremden yararlanacağız.

Teorem 1.12 : Herbiri $E \subset R^m$ de tanımlanmış μ_n ölçüler dizisi, A bir sabit olmak üzere, $\mu_n(E) \leq A$, $\forall n$ koşulunu sağlasın. Bu taktirde bu diziden E deki bir μ ölçüsüne zayıf yakınsayan alt dizi seçilebilir, yani öyle bir μ_{n_p} alt dizisi vardır ki E de sürekli olan her $\phi(x)$ fonksiyonu için

$$\int_E \phi(x) d\mu_{n_p} \rightarrow \int_E \phi(x) d\mu, \quad p \rightarrow \infty \quad (1.31)$$

Önerme 1.13 : μ_n ölçüler dizisi F kompakt kümesinde μ ölçüsüne zayıf yakınsıyor ve $f(x)$ fonksiyonu F 'de yukarıdan yarı sürekli ise

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_F f(x) d\mu_n(x) \leq \int_F f(x) d\mu(x). \quad (1.32)$$

İspat : $f(x)$ yukarıdan yarı sürekli olduğundan dolayı azalarak ona yakınsayan $f_m(x)$ sürekli fonksiyonlar dizisi mevcuttur. Açıktır ki

$$\int_F f_m(x) d\mu(x) \rightarrow \int_F f(x) d\mu(x), \quad m \rightarrow \infty \quad (1.33)$$

Verilmiş $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\int_F f_m(x) d\mu(x) < \int_F f(x) d\mu(x) + \varepsilon. \quad (1.34)$$

sağlanacak biçimde m bulunabilir.

Böylelikle

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_F f d\mu_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_m d\mu_n = \int_F f_m d\mu < \int_F f d\mu + \varepsilon. \quad (1.35)$$

Şimdi esas teoremi ifade edelim.

Teorem 1.14 : $E \subset R^m$ kompakt ve $V_\alpha(E) > -\infty$ olsun. Bu taktirde E de öyle μ birim ölçüsü vardır ki,

$$I_\alpha(\mu) = V_\alpha(E). \quad (1.36)$$

Önceki teoreme göre μ_n dizisinden bir μ (E de tanımlanmış) ölçüsüne zayıf yakınsayan alt dizi seçilebilir. Yeniden bu diziyi μ_n ile gösterelim. (1.31) de ϕ olarak E de 1'e eşit olan fonksiyonu alırsak

$$\mu(E) = \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \lim \mu_n(E) = 1 \quad (1.37)$$

elde edilir. Demek ki μ birim ölçüdür.

Son önermeyi $E \times E$ de tanımlanmış $K_\alpha(x-y)$ fonksiyonuna uygularsak $I_\alpha(\mu) \geq \overline{\lim} I_\alpha(\mu_n) = V_\alpha(E)$ elde edilir. Aksi yönde eşitsizlik V_α nın tanımındadır ve böylelikle teorem ispatlanmıştır.

Teorem'de varlığı ispatlanmış μ ölçüsüne E deki denge dağılımı (ölçüsü) demiştik.

$$U_\alpha(y) = \int_E K_\alpha(x-y) d\mu(x) \quad (1.38)$$

ifadesine denge potansiyeli diyeceğiz.

Şimdi kompakt olmayan kümeler için kapasite tanımını verelim:

Herhangi E kümesinin içerdiği bütün kompakt F kümelerinin $C_\alpha(F)$ kapasitelerinin supremumuna E nin kapasitesi (iç) diyeceğiz. E 'yi içeren açık kümelerin kapasitelerinin infimumuna E 'nin dış kapasitesi $C_\alpha^*(F)$ diyeceğiz. Açıktır ki, $E_1 \subset E_2$ ise $C_\alpha(E_1) \leq C_\alpha(E_2)$. Herhangi sınırlı E kümesi için $C_\alpha(E) \leq C_\alpha^*(E)$ elde edilir. $C_\alpha(E) = C_\alpha^*(E)$ olduğu taktirde E kapasiteye göre ölçülebilirdir denir.

Açıktır ki $E_1 \subset E_2$ ise

$$C_\alpha^*(E_1) \leq C_\alpha^*(E_2). \quad (1.39)$$

Tanımdan anlaşılıyor ki G açık kümesi için

$$C_\alpha^*(G) = C_\alpha(G), \quad (1.40)$$

sağlanır. Yani açık kümeler kapasiteye göre ölçülebilirdir.

Teorem 1.15 : E kompakt ve G_n sınırlı açık kümeleri $\overline{G_{n+1}} \subset G_n$ $n=1,2,\dots$ ve

$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = E$ koşullarını sağlasınlar. Bu taktirde

$$C_{\alpha}(G_n) \rightarrow C_{\alpha}(E), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.41)$$

Böylelikle kompakt kümeler kapasiteye göre ölçülebilirdirler. Bu sonuçlardan Borel kümelerin kapasiteye göre ölçülebilir olduğunu elde ederiz. Son teoremdeki özelliğe kapasitenin yukarıdan yarı sürekliliği diyeceğiz.

Denge potansiyelini öğrenmek için aşağıdaki iki teoremden yararlanacağız.

Teorem 1.16 : E kompakt küme, E de tanımlanmış ν pozitif ölçüsü $0 < \nu(E) < \infty$ ve

$$I(\nu) = \int_E K_{\alpha}(x-y) d\nu(x) d\nu(y) > -\infty, \quad (1.42)$$

koşullarını sağlasın (yani $cap_{\alpha}(E) > 0$ sağlanır). Bu taktirde E_1 , E 'nin $cap_{\alpha}(E_1) = 0$ koşulunu sağlayan alt kümesi veya böyle kümelerin sayılabilir bileşimi ise $\nu(E_1) = 0$ dır.

İspat : E 'nin çapı d olsun bu taktirde

$$\begin{aligned} K_{\alpha}(x-y) &\leq 0, \quad \alpha > 0 \\ K_{\alpha}(x-y) &\leq \log^+ d, \quad \alpha = 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

$d_1 = \log^+ d$ alırsak

$$K(x-y) = K_{\alpha}(x-y) - d_1 \leq 0, \quad \forall x, y \in E. \quad (1.44)$$

E_1 , E nin kompakt alt kümesi ise

$$\int_E K(x-y) d\nu(x) d\nu(y) > -\infty, \quad (1.45)$$

den

$$\int_{E_1} K(x-y) d\nu(x) d\nu(y) \geq \int_E K(x-y) d\nu(x) d\nu(y) > -\infty. \quad (1.46)$$

elde edilir. Demek ki,

$$\int_{E_1} K_\alpha(x-y) dv(x) dv(y) > -\infty. \quad (1.47)$$

Eğer $v(E_1) > 0$ ise bu sonuncudan $cap(E_1) > 0$ elde edilir ki, bu da çelişkidir.

$$\text{Eğer } E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad cap(F_n) = 0 \quad \text{ise,} \quad \forall n \text{ için } v(F_n) = 0 \text{ ve ölçünün}$$

toplamsallığından $v(E_1) = 0$ sonucu elde edilir.

$$E \text{ kümesi ve } F_n \text{ kompaktları } cap_\alpha(F_n) = 0, \quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ koşulunu sağlarsa}$$

E 'ye α - polar küme denir (Buradan $cap_\alpha^*(E) = 0$ çıkarılabilir). Eğer bir özellik α - polar küme dışında sağlanırsa o kuazi her yerde veya (nearly every where) veya $k.h.h.(n.e.\alpha.)$ sağlanır diyeceğiz.

E kompakt kümesinde tanımlanmış μ pozitif ölçüsüne bakalım.

$$E^* = \{x : \mu\{D(x_0, r)\} > 0 \quad \forall r\}$$

olsun. E^* ya μ ölçüsünün taşıyıcısı diyeceğiz. Açıktır ki E^* kapalıdır, ve E 'nin kompaktlığından dolayı aynı zamanda kompaktır.

Teorem 1.17 : E pozitif kapasiteli kompakt, μ onun denge ölçüsü E^* ise μ nün taşıyıcısı olsun. Bu taktirde $E^* \subset E$ kompaktı için

$$cap_\alpha(E^*) = cap_\alpha(E) \quad (1.48)$$

eşitliği sağlanır.

Açıktır ki $E_0 = E - E^*$ kümesi için $\mu(E_0) = 0$. Gerçekten $\forall x_0 \in E_0$ merkezli öyle bir D küresi vardır ki E^* ile kesişmiyor ve $\mu(D) = 0$. Buradan merkezinin koordinatları ve yarıçapı rasyonel olan öyle D_0 küresi bulunabilir ki $x_0 \in D_0 \subset D$, $\mu(D_0) = 0$. Böyle küreler sayılabilir sayıdadır ve onları D_i gibi numaralarsak

$$\mu(E_0) \leq \sum_i \mu(D_i) = 0 \quad (1.49)$$

sonucunu çıkarıyoruz.

μ , E^* da birim ölçüdür ve

$$V_\alpha(E^*) \geq \int_{E^* \times E^*} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y) = \int_{E \times E} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y) = V_\alpha(E). \quad (1.50)$$

sağlanır. Demek ki,

$$cap_\alpha(E^*) \geq cap_\alpha(E). \quad (1.51)$$

Aksi yönde eşitsizlik $E^* \subset E$ ilişkisinden çıkıyor.

Aşağıdaki teorem Frostman veya denge potansiyelinin temel teoremi ismiyle ünlüdür.

Teorem 1.18 : $E \subset R^m$ kompakt, $cap_\alpha(E) > 0$, $u(x)$, E 'nin denge potansiyeli, μ denge ölçüsü, E^* ise μ 'nün taşıyıcısı ve

$$I_\alpha(\mu) = \iint_{E^*} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y) = V > -\infty \quad (1.52)$$

olsun. Bu taktir de

$$u(x) = \int_{E^*} K_\alpha(x-y) d\mu(y) \geq V \quad x \in E^* \quad (1.53)$$

ve

$$u(x) \leq V, \quad E' \text{ de } k.h.y. \quad (1.54)$$

Böyleki özel durum da

$$u(x) = V, \quad E^* \text{ da } k.h.y. \quad (1.55)$$

Buna ek olarak

$$V' = 2^\alpha V, \quad \alpha > 0, \quad V' = V - \log 2, \quad \alpha = 0, \quad (1.56)$$

olmak üzere

$$u(x) \geq V', \quad R^m \text{ 'de}, \quad (1.57)$$

sağlanıyor.

İspat : $A_n = \left\{ x \in E : u(x) \geq V + \frac{1}{n} \right\}$ olsun. $u(x)$ yukarıdan yarı sürekli olduğundan

dolayı A_n ler kompaktlardır. Demek ki $cap_\alpha(A_n) = 0$, $\forall n$ olduğunu göstermek yeterlidir. (1.54) ün sağlanmadığı noktalar kümesini A ile işaretlersek açıktır ki,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Varsayalım ki teoremin hükmü yanlıştır ve öyle $E_1 \subset E$ kompaktı vardır ki

$$u(x) \geq V + 2\varepsilon, \quad x \in E_1, \quad (1.58)$$

ve $cap_{\alpha}(E_1) > 0$ sağlanıyor. Mesela uygun n için $E_1 = A_n$ ve $\varepsilon = (3m)^{-1}$ alabiliriz.

Teorem 1.17 göre, μ aynı zamanda E^* 'ın da denge ölçüsü olacak ve

$$\int_{E^*} u(x) d\mu = V. \quad (1.59)$$

Buradan $u(a_0) < V + \varepsilon$ olacak şekilde $a_0 \in E^*$ noktası vardır. a_0, E_1 'in dışındadır,

ve $u(x)$ yukarıdan yarı sürekli olduğu için a_0 'ın uygun bir $D(a_0, r)$

komşuluğunda

$$u(x) < V + \varepsilon \quad (1.60)$$

sağlanacaktır. r 'yi öyle küçük seçelim ki $D(a_0, r)$ den E_1 'e kadar uzaklık pozitif

olsun. $a_0 \in E^*$ koşulundan

$$\mu\{D(a_0, r)\} = m > 0 \quad (1.61)$$

elde ediyoruz.

$cap_{\alpha}(E_1) > 0$ koşulundan E_1 'de öyle pozitif σ ölçüsü vardır ki

$$I_{\alpha}(\sigma) = \int_{E_1 \times E_1} K_{\alpha}(x - y) d\sigma(x) d\sigma(y) > -\infty, \quad \sigma(E_1) = m > 0 \quad (1.62)$$

sağlanır. E 'de

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma & , \quad E_1 \text{'de} \\ -\mu & , \quad D(a_0, r) \text{'de} \\ 0 & , \quad \text{kalan yerlerde} \end{cases}$$

gibi tanımlanmış σ_1 ölçüsünü ele alalım. Bu taktirde her $\eta, 0 < \eta < 1$ için E 'de

tanımlanmış pozitif $\mu_1 = \mu + \eta\sigma_1$ ölçüsü

$$\int_E d\mu_1 = 1 \quad (1.63)$$

koşulunu sağlar. Açıktır ki yeteri kadar küçük η ler için

$$\begin{aligned}
\delta(I) &= I_\alpha(\mu_1) - I_\alpha(\mu) = \iint_E K_\alpha(x-y) d\mu_1(x) d\mu_1(y) - \int_{E \times E} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y) \\
&= 2\eta \int_{E \times E} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\sigma_1(y) + \eta^2 \int_{E \times E} K_\alpha(x-y) d\sigma_1(x) d\sigma_1(y) \\
&= 2\eta \int_E u(y) d\sigma_1(y) + \eta^2 I_\alpha(\sigma_1) \\
&\geq 2\eta \left[(V + 2\varepsilon)m - (V + \varepsilon)m + \frac{1}{2} \eta I_\alpha(\sigma_1) \right] \\
&= 2\eta(\varepsilon m + \frac{1}{2} \eta I_\alpha(\sigma_1)) > 0.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Bu sonuç $I_\alpha(\mu)$ nün maksimallığı ile çelişiyor. Demek ki $cap_\alpha(A_n) = 0$, $\forall n$ ve buradan (1.54) ispatlandı. Şimdi (1.55)'i ispatlayalım. Aksini düşünelim. Varsayalım ki $x_0 = x \in E^*$ noktası için

$$u(x) < V - \varepsilon. \tag{1.65}$$

$u(x)$ 'in subharmonikliğinden aynı eşitsizlik x_0 'ın bir $D(x_0, r)$ komşuluğu içinde sağlanacaktır. Öteki yandan $x_0 \in E^*$ koşulundan

$$\mu\{D(a_0, r)\} = m_0 > 0. \tag{1.66}$$

yazılabilir.

$$E_2 = \{x \in E^* : u(x) > V\}$$

olsun. (1.54) ve (Teorem 1.16) dan $\mu(E_2) = 0$ sonucunu çıkarıyoruz.

$E_3 = E^* \cap D(x_0, r)$ ve E_4, E^* 'ın tümleyeni olsun.

Bu taktirde

$$\begin{aligned}
V &= \int_E u(x) d\mu = \int_{E^*} u(x) d\mu = \sum_{j=2}^4 \int_{E_j} u(x) d\mu \\
&= \int_{E_3} u(x) d\mu + \int_{E_4} u(x) d\mu \leq m_0(V - \varepsilon) + (1 - m_0)V = V - m_0\varepsilon
\end{aligned} \tag{1.67}$$

sağlanır. Bu ise çelişkidir ve E^* da $u(x) \geq V$ eşitsizliğinin sağlandığını görüyoruz. (1.54) 'de göz önüne alınırsa

$$u(x) = V \quad k.h.h. \quad E' \text{ de.} \tag{1.68}$$

μ, E^* da tanımlandığından dolayı Teorem 1.11'e göre (1.53) den (1.57) elde ediliyor.

1.3. Polar Kümeler ve Uygulamaları

Bu kısımda önce potansiyelin $-\infty$ olduğu noktalar kümesi ve polar küme kavramlarının ilişkisini ele alacağız.

Teorem 1.19 : E kompakt kümesinde tanımlanmış v pozitif ölçüsünün

$$v(x) = \int_E K_\alpha(x-y) dv(y) \quad (1.69)$$

$v(x)$ potansiyeli $E_1 \subset R^m$ kompakt kümesinde $-\infty$ ise $cap_\alpha(E_1) = 0$ dır.

İspat : Aksini, yani $cap_\alpha(E_1) > 0$ olduğunu varsayalım. E_1 'in denge potansiyeli $u(x)$, denge ölçüsü μ ve μ 'nün taşıyıcısı E_1^* olsun. Bu taktirde Teorem 1.18 göre

$$u(x) = \int_{E_1^*} K_\alpha(x-y) d\mu(y) \geq V' > -\infty \quad R^m \text{ 'de} \quad (1.70)$$

sağlanır. $K_\alpha(x-y)$ nin yukarıdan sınırlılığı ve Fubini Teoremine göre

$$\int_{E_1^*} v(x) d\mu(x) = \int_{E_1^*} d\mu(x) \int_E K_\alpha(x-y) dv(y) = \int_E u(y) dv(y). \quad (1.71)$$

Bu sonuncu ifadede sol taraf $-\infty$ dır, sağ taraf ise en azından $-V'$ 'dir ve bundan dolayı sınırlıdır. Bu çelişki teoremi ispatlıyor.

Sonuç olarak $E \subset R^m$ kompakt kümesinin komşuluğunda tanımlanmış subharmonik $u(x)$, $u(x) \not\equiv 0$ fonksiyonu E kümesinin her noktasında $u(x) = -\infty$ ise $cap_{m-2}(E) = 0$ dır. Öyle F kompakt kümesini ele alalım ki onun bir komşuluğunda $u(x)$ s.h. ve $E \subset \text{int } F$ olsun. Bu taktirde Riesz teoremine göre (Riesz Representation Theorem) $\text{int } F$ 'de

$$u(x) = \int_F K_{m-2}(x-y) d\mu(y) + h(x), \quad (1.72)$$

sağlanır. Öyleki $h(x)$, $\text{int } F$ 'de harmoniktir ve demek ki E 'de sınırlıdır.

$$\int_F K_{m-2}(x-y) d\mu(y) = -\infty, \quad x \in E. \quad (1.73)$$

elde edilir. Buradan önceki teoreme göre $cap_{m-2}(E) = 0$ sonucuna varıyoruz.

Bu teoremin tersi de doğrudur.

Teorem 1.20 : $E \subset R^m$ $cap_{m-2}(E) = 0$ koşulunu sağlayan kompakt veya daha genel $(m-2)$ -polar küme olsun. Bu takdirde R^m de s.h. olan öyle $u(x)$ fonksiyonu vardır ki, verilmiş $x_0 \in R^m - E$ noktasında sonlu olup, E 'de $-\infty$ dur ($u(x) = -\infty \forall x \in E$). Eğer $m > 2$ ise R^m 'de $u(x) < 0$ alabiliriz. Eğer E kompakt ise $u(x)$ E dışında sınırlıdır.

Polar kümeler subharmonik fonksiyonların incelenmesinde önemli role sahiptirler. Örneğin, aşağıdaki teorem böyle kümelerin “göz ardı edilebileceğini” göstermektedir.

Teorem 1.21 : $u, D \subset R^m$ bölgesinde s.h. ve yukarıdan sınırlı fonksiyon, F, D 'nin sınırı, $E \subset F$ polar küme ve

$$\overline{\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x \in D}}} u(x) \leq M \quad \forall \zeta \in F - E \quad (1.74)$$

olsun. Eğer D sınırsız ise, ancak $m=2$ halinde $\infty \in E$ varsayılabilir.

Bu takdirde : $F = E$ ise $u(x)$ sabittir, aksi halde ya

$$u(x) < M \quad \forall x \in D \quad (1.75)$$

ya da

$$D \text{ 'de } u(x) \equiv M.$$

Bu teoremdaki (1.74) den görüldüğü gibi sınır koşulu bütün sınırda değil bir E kümesi dışında sağlanır ve bu küme polardır. Phragmen Lindelöf ilkesi denilen teoremlerde bu tipik haldir. Aslında $u(x)$ 'in yukarıdan sınırlı olduğu varsayımı yerine E 'nin komşuluğunda u fonksiyonunun “çok hızlı” artmadığını varsaymak yeterlidir.

İspat : Önce D 'nin sınırlı veya $m > 2$ olduğunu varsayalım. Teorem 1.20 ye göre D 'de negatif olmayan öyle s.h. $w(x)$ fonksiyonu vardır ki, E de $w(x) = -\infty$ dır.

Herhangi $x_0 \in D$ alalım. $w(x_0) > -\infty$ varsayabiliriz. $\varepsilon > 0$ yeteri kadar küçük sayı olmak üzere

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon w(x) \quad (1.76)$$

fonksiyonuna bakalım. Açıktır ki

$$\overline{\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x \in D}}} u_\varepsilon(x) \leq M \quad \forall \zeta \in F. \quad (1.77)$$

Gerçekten $\zeta \notin E$ ise bu (1.74) den ve $w(x) \leq 0$ dan çıkıyor. $\zeta \in E$ ise $u(x)$ in D 'de sınırlılığından dolayı

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x \in D}} u_{\varepsilon}(x) = -\infty \quad (1.78)$$

ilişkisi sağlanır.

Böylelikle $u_{\varepsilon}(x)$ s.h. fonksiyonuna maksimum prensibini uygularsak

$$u_{\varepsilon}(x) \leq M \quad x \in D \quad (1.79)$$

sonucunu çıkarırız ve buradan

$$u_{\varepsilon}(x_0) \leq M, \quad (1.80)$$

demek ki,

$$u(x_0) \leq M - \varepsilon w(x_0). \quad (1.81)$$

$w(x_0)$ sonlu ve ε keyfi olduğundan dolayı

$$u(x_0) \leq M$$

elde ederiz. Şimdi maksimum prensibine göre ya,

$$u(x) < M \text{ ya da } D \text{ 'de } u(x) \equiv M \quad (1.82)$$

sonucunu elde ediyoruz.

Şimdi $m = 2$ ve D 'nin sınırsız olduğu hale bakalım. E polar olduğundan dolayı lineer ölçüsü sıfırdır. Demek ki $S(0, r) \cap E = \emptyset$ koşulunu sağlayan r 'ler reel ekseninde her yerde yoğundur. Böyle r -lere normaldir diyeceğiz. D 'nin sınırsızlığından dolayı $\forall r > r_0$ için $S(0, r) \cap D \neq \emptyset$. Her r normal değeri için

$$B(r) = \sup_{x \in D, |x|=r} u(x) \quad (1.83)$$

olsun. Önce yeteri kadar büyük normal r 'ler için $B(r) \leq M$ olduğunu varsayalım.

$x_0 \in D$ noktası için öyle r seçelim ki $r > |x_0|$ ve $B(r) \leq M$ olsun. $D \cap D(0, r)$ 'nin x_0 'ı içeren alt bölgesi D_r olsun. Şimdi teoremin ispatlanmış kısmını D_r 'ye uygularsak $u(x_0) \leq M$ sonucunu elde ederiz. Demek ki bu halde (1.75) sağlanır.

Şimdi varsayalım ki $r > r_0$ normal sayısı için $B(r) > m$ dir. Açık ki öyle $x \in D, |x| = r$ noktası vardır ki $u(x) = B(r)$ $x \notin E$, çünkü $S(0, r) \cap E = \emptyset$.

Bu x , F 'in başka noktası da olamaz. Çünkü bu durumda (1.74) sağlanır. Demek ki $x \in D$. Buradan u 'nun D 'de ki yukarıdan yarı sürekliliğinden $u(x) \geq B(r)$ ve dolayısıyla $u(x) = B(r)$ elde ederiz.

Şimdi $B(r)$ 'nin yeteri kadar büyük r 'ler için azalmadığını gösterelim. Doğrudan eğer $B(r) > M$ ise $D \cap D(0, r)$ nin bütün alt bölgeleri için ispatladığımız kısmı göz önüne alırsak (1.75) den

$$u(x) \leq B(r) \quad \forall x \in D \cap D(0, r) \quad (1.84)$$

elde ediyoruz. Özel halde $\rho < r$ ise $B(\rho) \leq B(r)$ alırsak. Şimdi varsayalım ki $B(\rho)$ sabittir. Bu halde öyle $x_1, |x_1| = r_1$ vardır ki, $u(x_1) = B(r_1) = B$ ve her $r < r_1$ için $B(r) = B$. Bu taktirde $D \cap D(0, r)$ 'nin x 'i içeren D_r bileşeninde $u(x) \equiv B$ olduğu elde ediliyor. Şimdi r 'yi sonsuzluğa yaklaştırsak $D_r \rightarrow D$ ve demek ki D 'de $u(x) \equiv B$ alıyoruz. Bu halde $u(x)$ sabittir. Şimdi $B(r)$ sabit değil ise

$$B(r) \rightarrow B, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.85)$$

ve her r için $B(r) < B$ alırsak.

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon \log\left(\frac{|x|}{r}\right), \quad (1.86)$$

olsun. $(r < |x| < R) \cap D$ 'nin her alt bölgesi için teoremin ispatlanmış kısmını uygulayalım. Böyle D_0 bölgesi için D_0 'da

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\leq \max\left(B(r), B(R) - \varepsilon \log\left(\frac{R}{r}\right)\right) \\ &\leq \max\left(B(r), B - \varepsilon \log\left(\frac{R}{r}\right)\right) \\ &= B(r) \end{aligned} \quad (1.87)$$

alıyoruz. Böyleki burada verilmiş ε için R yeteri kadar büyük seçilmiştir. x noktası değişmediğinden ε 'u istediğimiz kadar küçük ve $R > |x|$ seçersek, $|x| > r$ için $u(x) \leq B(r)$ ve dolayısıyla $B(R) \leq B(r)$, $R > r$ alıyoruz ki, buradan da $B(r)$ 'nin sabit olduğu çıkıyor. Bu ise varsayımla çelişiyor. Demek ki $u(x)$ 'in sabit olmadığı halde (1.75) sağlanır.

Eğer $E = F$ ise (1.74) koşulu hiçbir noktada konulmuyor. Demek ki M 'i istediğimiz kadar küçük alabiliriz. Özel halde $x_0 \in D$ için $M < u(x_0)$ seçebiliriz.

Bu halde (1.75) sağlanmaz. Demek ki $u(x)$ sabittir. Aksi taktirde (1.74) F 'in en azından bir noktası için sağlanır ve buradan $u(x) = B = \text{sabit}$ gözönüne alınırsa $B \leq M$ buluruz.

Polar kümelerin bir uygulamasına daha bakalım: Bu s.h. fonksiyonların devamı hakkında olacaktır.

Teorem 1.22 : (Brelot) $E \subset R^m$ polar, G açık küme $u(x)$ fonksiyonu yukarıdan sınırlı olup $G - E$ 'nin her noktasında subharmonikliğin tanımındaki (i) – (iii) özelliklerini sağlasın. Bu taktirde $u(x)$ fonksiyonunun G ye tek subharmonik devamı mevcuttur. Eğer $u(x)$ ve $-u(x)$ fonksiyonlarının herbiri yukarıdaki özellikleri sağlarsa $u(x)$ 'in G 'ye harmonik devamı vardır.

İspat : E polar olduğundan $(m-1)$ -ölçüsü sıfırdır. Bundan dolayı spherik ortalamalar u 'nun E 'deki değerlerine duyarsızdır. Yani yukarıdaki hipotezlerin anlamı vardır. Önce teoremin 1. kısmını ispatlayalım. $x_0 \in E \cap G$ için

$$u(x_0) = \overline{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in G-E}} u(x)} \quad (1.88)$$

olsun. E polar olduğu için iç noktaya sahip değildir. Demek ki (1.88) tanımı manalıdır. Açıktır ki $u(x)$ fonksiyonu G 'de yukarıdan yarı süreklidir. G 'nin sınırlı olduğunu varsayabiliriz. Bu halde $x_0 \in G - E$ noktası verildiğinde G 'de negatif ve $w(x) = -\infty$ $x \in E \cap G$ ve $w(x_0) > -\infty$ koşullarını sağlayan subharmonik fonksiyon bulabiliriz. Bu Teorem 1.20 ye göre mümkündür.

Gösterelim ki $\forall C(y, R) \subset G$ küresi, $D(y, R)$ de harmonik ve $C(y, R)$ de sürekli u fonksiyonu

$$u(x) \leq v(x) \quad \forall x \in S(y, R) \quad (1.89)$$

koşulunu sağlıyorsa,

$$u(x) \leq v(x) \quad \forall x \in D(y, R) \quad (1.90)$$

eşitsizliğini de sağlar. $x_0 \in D(y, R) - E$ olsun.

$$h_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon w(x) - v(x) \quad (1.91)$$

fonksiyonu $D(y, R)$ de subharmoniktir, çünkü E 'den olmayan noktalarda $u(x)$, $w(x)$ ve $-v(x)$ fonksiyonları subharmonikliğin tanımındaki koşulları sağlarlar ve E 'nin noktalarında $h_\varepsilon(x)$ fonksiyonu $-\infty$ 'a yaklaşıyor. $S(y, R)$ nin her noktasında

$$h_\varepsilon(x) = u(x) - v(x) \leq 0 \quad (1.92)$$

ve bundan dolayı

$$h_\varepsilon(x) \leq 0 \quad \forall x \in D(y, R). \quad (1.93)$$

Bu sonuncuda $x = x_0 \notin E$ için $\varepsilon \rightarrow 0$ koşulunda limite geçerse

$$u(x_0) \leq v(x_0)$$

elde ederiz. (1.88) den ve $v(x)$ in sürekliliğinden dolayı bu eşitsizlik E 'nin her noktasında sağlanır. Demek ki $u(x)$ subharmoniktir. Devam tektir, çünkü devam olunmuş $u(x)$ fonksiyonu subharmoniktir ve bundan dolayı $x_0 \in G$ için

$$u(x_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{d_m \rho^m} \int_{D(x_0, \rho)} u(x) dx, \quad (1.94)$$

burada d_m, R^m deki birim kürenin hacmidir.

Bu formül subharmonik fonksiyonların tanımından çıkıyor. E 'nin m ölçüsü sıfır olduğundan dolayı bu formülde onun noktaları göz önüne alınmayabilir. Şimdi (1.94) formülü ile $u(x)$ E 'nin noktalarında da tanımlanmıştır ve demek ki devam tektir.

Şimdi varsayalım ki hem $u(x)$, hem de $-u(x)$ yukarıdaki koşulları sağlıyor. Yukarıdakine göre $u(x)$ 'i (1.94) formülü ile tanımlayabiliriz ve sonuçta o G 'de s.h. olacaktır. Aynı şeyleri $-u(x)$ içinde söyleyebiliriz. Demek ki $u(x)$ ve $-u(x)$ 'in her ikisi G 'de subharmoniktir ve bundan dolayı $u(x)$, G 'de harmoniktir. Devam tektir, çünkü (1.94) sağlanmalıdır.

Bu teoremdaki E 'nin polar olması koşulu gereklidir. Gerçekten eğer E 'nin $(m-2)$ – kapasitesi pozitif ise onun denge potansiyeli

$$V_{m-2}(x) = \int K_{m-2}(x-y) d\mu(y) \quad (1.95)$$

için $u(x) = -V_{m-2}(x)$ fonksiyonu E 'nin dışında harmonik olup her kürede sınırlıdır ve Frostman teoremine göre bu fonksiyon aşağıdan da sınırlıdır. Açık ki

$$c = 0 \quad m > 2, \quad c = -\infty, \quad m = 2 \quad (1.96)$$

ise

$$u(x) > c \quad R^m, \quad u(x) \rightarrow c \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.97)$$

Böylelikle $u(x)$ 'in E 'ye s.h. devamı mevcut değildir. Aksi taktirde $u(x)$ R^m de s.h. ve bundan dolayı yukarıdan yarı sürekli olacaktır. Dolayısıyla $M > c$ supremumuna sahip olacaktır. (1.97)'ya göre $u(x)$ fonksiyonu bir $x_0 \in R^m$ noktasında maksimum alacak ve maksimum prensibine göre R^m de $u(x) \equiv M$ olacaktır. Bu çelişkidir $u(x)$ harmonik devama sahip olamaz.

2. SUBHARMONİK DEVAM

2.1. Subharmonik Devam

Önceki bölümde E kümesi sıfır kapasiteli kompaktların sayılabilir bileşimine dahil olduğu taktirde s.h. devamın mümkünlüğü incelenmiştir. Bu bölümde daha genel kümeler de s.h. devama bakılacaktır. Ancak düzlem haline bakacağız.

Logaritmik kapasitesi sıfır olan tüm $E \subset \overline{C}$ kümeler sınıfını M ile göstereceğiz.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $B \subset C$ kümeleri sınıfını L ile işaretleyeceğiz:

Her $\zeta \in C$ noktası verildiğinde $S_\rho(\zeta) = \{z : |z - \zeta| = \rho\}$ çemberinin B kümesi ile arakesit'ini lineer ölçüsü, $\zeta \in B$ ise yeteri kadar küçük ρ 'lar için, $\infty \in B$ ise yeteri kadar büyük ρ 'lar için $2\pi\rho$ 'dur. $D \subset \overline{C}$ açık ve E sıfır kapasiteli küme ise $D - E \subset L$ olduğu hemen gözüküyor.

$B \subset L$ kümesinde tanımlanmış u reel fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ona kuazi subharmonik diyeceğiz.:

$$SH_1. u(\zeta) < \infty \quad \forall \zeta \in B,$$

$$SH_2. u, B' \text{ de yukarıdan yarı süreklidir.}$$

$$SH_3. \text{ Eğer } \zeta \in B \cap C \text{ ise yeteri kadar küçük bütün } \rho > 0 \text{ için,}$$

$$u(\zeta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

eğer $\infty \in B$ ve $\zeta \in C$ ise yeteri kadar büyük bütün $\rho > 0$ için

$$u(\infty) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

B ve u üzerindeki koşullardan bakılan integrallerin mevcut olduğunu görüyoruz.

Eğer B açık ise onda kuazi s.h. olan fonksiyon subharmoniktir. $D \subset \overline{C}$ açık küme ve $E \subset \overline{C}$ olsun.

$D - E$ de tanımlanmış u fonksiyonu, D 'de kompakt olan her K kümesi için $K - E$ 'de yukarıdan sınırlı ise, D 'ye göre yukarıdan yerel sınırlı diyeceğiz.

$D \subset \overline{C}$ verildiğinde aşağıdaki koşulları sağlayan $E \subset \overline{C}$ kümeler sistemini $RSH(D)$ ile işaretleyeceğiz.

1. $D - E \subset \mathbb{L}$
2. D 'ye göre yukarıdan yerel sınırlı $D - E$ 'de kuazi subharmonik her fonksiyonun D 'ye s.h. devamı vardır.

Teorem 2.1 : $E \subset \overline{C}$, $capE = 0$; $D \subset \overline{C}$ açık küme, u , D 'ye göre yukarıdan yerel sınırlı, $D - E$ de kuazi s.h. fonksiyon olsun. Bu taktirde u 'nun D 'ye tek s.h. devamı vardır ve bu devam aşağıdaki koşulları sağlıyor.

$$F_1 : u(\zeta_0) = \overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \zeta_0 \\ \zeta \in D-E}}} u(\zeta) \quad \forall \zeta_0 \in E \cap D,$$

$$F_2 : u(\zeta_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \forall \zeta_0 \in E \cap D \cap C,$$

$$F_3 : \text{Eğer } z = \infty \in E \cap D \text{ ise,}$$

$$u(\infty) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \forall \zeta \in C.$$

Bu teorem birinci bölümdeki Teorem 1.22'in genellmesidir.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $E \subset \overline{C}$ kümeler sistemi $RSH^0(D)$ ile işaretleyeceğiz.:

1. $D - E \in \mathbb{L}$
2. $D - E$ de yukarıdan sınırlı $D - E$ 'de kuazi s.h her fonksiyonun D 'ye s.h. devamı mevcuttur.

Her $\zeta \in D$ noktasının bir $D_0 \subset D$ komşuluğunda $RSH^0(D_0)$ dahil olan $E \subset \overline{C}$ kümeler sistemini RSH_0 ile işaretleyeceğiz.

$$\text{Açıktır ki } RSH_0(D) \subset RSH(D) \subset RSH^0(D) .$$

Bu sınıflardan herhangi birinin elemanının alt kümesi de aynı sınıfın elemanıdır. Teorem 2.1'i göz önüne alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.2 : Her $D \subset C$ açık kümesi için $M \subset RSH_0(D) \subset RSH(D) \subset RSH^0(D)$ ilişkisi sağlanır.

Yukarıdaki işaretlemeleri kullanırsak Brelot'un sonucunu [7, S.41-44] aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

D açık küme, $E \subset D$ kümesi D 'de kapalı ve polar ise $E \subset RSH(D)$ dır. Polar kümeler sınıfı ile sıfır kapasiteli kümeler sınıfının çakıştığı hakkındaki Cartan teoremini [7, S.62] göz önüne alırsak D açık kümesinin onda kapalı sıfır kapasiteli alt kümesinin $RSH(D)$ ye dahil olduğunu görüyoruz. Böylelikle yukarıdaki sonuç Brelot'un sonucundan hem genel hem de kuvvetlidir. Teoremin ispatı için önce aşağıdaki önermeye bakalım.

Önerme 2.3 : $U \subset C$ açık küme, $E \subset U$ sıfır logaritmik kapasiteli boş olmayan G_δ tipli küme olsun. Bu taktirde U 'da dağılmış öyle λ ölçüsü vardır ki $V^\lambda(x)$ logaritmik potansiyeli

$$1) V^\lambda(x) = +\infty \quad \forall x \in E, \quad (2.1)$$

$$2) V^\lambda(x) < +\infty \quad \forall x \in C - E \quad (2.2)$$

koşullarını sağlıyor.

Sonuç 2.4 : Önermenin koşulları dahilinde, d , U 'nun çapı ise

$$V^\lambda(x) > \log \frac{1}{d} \quad \forall x \in U,$$

ek olarak $d \leq 1$ ise U 'da $V^\lambda(x) > 0$ dır.

Önerme 2.3'ün ispatı : Önce $d \leq 1$ varsayalım. Öyle azalan $G_n \subset U$ açık kümeler dizisi seçelimki

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \quad \text{cap} G_n \leq \frac{1}{4^{n+1}} \quad (2.3)$$

sağlansın. $F_n = C - G_n$, $d_n(x)$ x noktasından F_n 'e kadar uzaklık ve

$$f_{n,m} = \{x : 2^{-m-1} \leq d_n(x) \leq 2^{-m}\} \quad (2.4)$$

olsun. $f_{n,m}$ kümeleri kapalıdır ve $U \supset \bigcup_m f_{n,m} = G_n \supset E$. Eğer $f_{n,m} \neq \emptyset$ ise G_n

kümesi yarıçapı 2^{-m-2} olan daireyi içeriyor ve bundan dolayı $\text{cap} G_n \geq 2^{-m-2}$ olur.

Buradan ve (2.3) den $m \geq 2n$ alıyoruz. Böylelikle $m < 2n$ ise $f_{n,m} = \emptyset$. Her n için öyle $m(n) (\geq 2n)$ vardır ki $n \geq m(n)$ olduğunda $f_{n,m} \neq \emptyset$ ilişkisi sağlanır. Ancak $m \geq m(n)$ haline bakacağız. $E_{n,m} = E \cap f_{n,m}$ olsun ve öyle $G_{n,m} \supset E_{n,m}$ seçelim ki

$$\text{cap} G_{n,m} < 4^{-m}, \quad G_{n,m} \subset f_{n,m-1} \cup f_{n,m} \cup f_{n,m+1} \quad (2.5)$$

sağlansın. $G_{n,m}$ 'in denge ölçüsünü $\gamma_{n,m}$ ile gösterelim. $G_{n,m} \subset U$ olduğundan dolayı

$\lambda = \sum_{n,m \geq m(n)} \gamma_{n,m}$ ölçüsü U 'da dağılmıştır. $d \leq 1$ olduğundan her n ve $m \geq m(n)$ için

$$0 < V^{\gamma_{n,m}}(x) \leq 1 \quad \forall x \in U \quad (2.6)$$

$E_{n,m} \subset G_{n,m}$ ilişkisinden $\forall x \in E_{n,m}$ için $V^{\gamma_{n,m}}(x) = 1$.

Bunu (2.6) de gözönüne alırsak her n için

$$\sum_{m \geq m(n)} V^{\gamma_{n,m}}(x) \geq 1 \quad \forall x \in E, \quad (2.7)$$

elde ediyoruz ve bundan dolayı

$$\sum_{n,m \geq n(m)} V^{\gamma_{n,m}}(x) = +\infty \quad \forall x \in E. \quad (2.8)$$

Demek ki (2.1) sağlanır.

Şimdi $x \notin E$ alalım. Öyle $n(x)$ bulabiliriz ki her $n > n(x)$ için $x \in F_n$ olsun ve

bundan dolayı $x \notin \bigcup_{k=m-2}^{m+2} f_{n,k}$.

Eğer $x \notin \bigcup_{k=m-2}^{m+2} f_{n,k}$ ve $y \in \overline{G}_{n,m}$ bu taktirde

$$|x - y| \geq 2^{-m-3} \quad (2.9)$$

ve bundan dolayı

$$\begin{aligned} V^{\gamma_{n,m}}(x) &= \int_{\overline{G}_{n,m}} \log \frac{1}{|x - y|} \gamma_{n,m}(dy) \leq \lambda_{n,m}(\overline{G}_{n,m}) \log 2^{m+3} \\ &\leq 4^{-m} \log 2^{m+3} < 2^{-m+1} \quad \forall x \notin \bigcup_{k=m-2}^{m+2} f_{n,k}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Buradan

$$\sum_{n > n(x)} \sum_{m \geq m(n)} V^{\gamma_{n,m}}(x) \leq \sum_{n > n(x)} \sum_{m \geq 2n} 2^{-m+1} < +\infty \quad \forall x \notin E. \quad (2.11)$$

Her $n \leq n(x)$ için en fazla öyle beş tane m vardır ki $x \in \bigcup_{k=m-2}^{m+2} f_{n,k}$ dır. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq n(x)} \sum_{m \geq m(n)} V^{\gamma_{n,m}}(x) &\leq \sum_{n \leq n(x)} \left(\sum_{\substack{m \geq m(n) \\ x \in \bigcup_{k=m-2}^{m+2} f_{n,k}}} V^{\gamma_{n,m}}(x) + \sum_{\substack{m \geq m(n) \\ x \notin \bigcup_{k=m-2}^{m+2} f_{n,k}}} V^{\gamma_{n,m}}(x) \right) \\ &\leq \sum_{n \leq n(x)} \left(5 + \sum_{m \geq m(n)} 2^{-m+1} \right) < +\infty. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Demek ki

$$0 < \sum_{n, m \geq m(n)} V^{\gamma_{n,m}}(x) < +\infty \quad \forall x \notin E \quad (2.13)$$

böylece $d \leq 1$ halinde önerme ispatlandı. Genel hali lineer dönüşüm yardımıyla bu hale indirgeyebiliriz.

Teorem 2.1 ispatı : Çapı $\frac{1}{2}$ den büyük olmayan ve $\overline{U} \subset D, E \cap U \neq \emptyset$ koşullarını

sağlayan keyfi U dairesini ele alalım. Öyle açık G_n kümeleri seçebiliriz ki

$$E \subset G_n \subset G_{n+1}, \quad n=1,2,\dots$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} G_n = 0$$

olsun.

$G'_n = G_n \cap U$ kümeleri benzer özellikleri sağladığından dolayı $G_n \subset U$

$\forall n$ varsayımı genelliği bozmaz. $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = E_1$ olsun. Açıktır ki, E_1 kapasitesi sıfır

olan G_δ tipi kümedir ve $E \subset E_1 \subset U$. Bundan dolayı $D - E_1 \in \mathbb{L}$, $D - E \in \mathbb{L}$ ve

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (2.14)$$

integralinin varlığı ve değeri $u(\zeta)$ 'in, E kümesinde aldığı değerlerden bağımsızdır.

Öteki yandan bu integral $u(\zeta)$ fonksiyonunun $S_\rho(\zeta_0) - E$ kümesinde yukarıdan yarı sürekliliğinden dolayı mevcuttur.

E kümesinin hiçbir noktası dahili nokta olmadığından dolayı F_1 formülü $u(\zeta)$ 'i $D \cap E$ 'nin bütün noktalarında tanımlıyor. Önerme ve onun sonucuna göre U da dağılmış öyle λ ölçüsü mevcuttur ki V^λ potansiyeli E_1 de $+\infty$, E_1 dışında her yerde sonlu ve U da pozitifdir.

Şimdi önermeyi kullanarak önceki bölümden Teorem 1.22 ispatına benzer biçimde devam edeceğiz. Kapanışı U 'da olan $D(\zeta_0, r)$ dairesini ele alalım. Eğer v fonksiyonu $\overline{D}(\zeta_0, r)$ de sürekli, $D(\zeta_0, r)$ 'de harmonik ve $S(x_0, r)$ de $u(\zeta) \leq v(\zeta)$ ise, aynı eşitsizlik $\overline{D}(\zeta_0, r)$ de'de sağlanır. Bunu göstermek için $\varepsilon > 0$ alalım ve

$$h_\varepsilon(\zeta) = u(\zeta) - \varepsilon u^\lambda(\zeta) - v(\zeta) \quad (2.15)$$

fonksiyonuna bakalım.

$h_\varepsilon(\zeta)$ fonksiyonu $D(\zeta_0, \rho)$ da $+\infty$ 'a eşit olmayan değerler alıyor, yukarıdan yarı sürekli, $\forall \zeta \in D(\zeta_0, \rho)$ noktası ve yeteri kadar küçük $\rho > 0$ lar için

$$h_\varepsilon(\zeta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_\varepsilon(\zeta + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (2.16)$$

eşitsizliği sağlanıyor. Çünkü önermeye göre $\zeta \in D(\zeta_0, \rho) \cap E$ ise $h_\varepsilon(\zeta) = -\infty$, öteki yandan $\zeta \in D(\zeta_0, \rho) - E$ ise ortalama eşitsizliği $u, v, -u^\lambda$ fonksiyonlarının özelliklerinden çıkıyor. Demek ki $h_\varepsilon(\zeta)$ fonksiyonu $D(\zeta_0, \rho)$ da s.h. tir.

$S(\zeta_0, \rho)$ üzerinde

$$h_\varepsilon(\zeta) \leq u(\zeta) - v(\zeta) \leq 0 \quad (2.17)$$

ve bundan dolayı $D(\zeta_0, \rho)$ da $h(\zeta) \leq 0$ ve $\zeta \in D(\zeta_0, \rho) - E$ için ε 'u sıfıra yaklaştırsak

$$u(\zeta) - v(\zeta) \leq 0$$

elde edilir.

F_1 'e göre bu eşitsizlik $D(\zeta_0, \rho) \cap E$ 'de de sağlanır. Şimdi $S(\zeta_0, \rho)$ da $u(\zeta)$ ya yaklaşan monoton azalan u_n fonksiyonlar dizisini ele alalım. $u_n(\zeta)$ fonksiyonu için $D(\zeta_0, \rho)$ da Dirichlet probleminin çözümünü $v_n(\zeta)$ ile gösterelim. Bu taktirde yukarıdakine göre $u(\zeta_0) \leq v_n(\zeta_0)$ olacaktır.

n 'i sonsuzluğa yaklaştırsak

$$u(\zeta_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta_0 + \tau e^{i\theta}) d\theta \quad (2.18)$$

elde edilir.

$S(\zeta_0, \rho)$ 'ın keyfiliğinden devam olunmuş $u(\zeta)$ fonksiyonunun U 'da s.h. olduğunu, U 'nun keyfiliğinden ise bu fonksiyonun D 'de s.h. olduğu sonucuna varıyoruz.

Şimdi tekliği ispatlayalım. $w(\zeta)$ D 'de s.h. olup $D-E$ de $u(\zeta)$ ile çakışan başka bir fonksiyon olsun. Bu taktirde her $\zeta_0 \in D \cap C$ noktası için ortalama eşitsizliğe göre,

$$w(\zeta_0) \leq \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\zeta_0 + \tau e^{i\theta}) d\theta = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\zeta_0 + \tau e^{i\theta}) d\theta, \quad (2.19)$$

$w(\zeta)$ 'nin yukarıdan yarı sürekliliğinden dolayı ise

$$w(\zeta_0) \geq \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\zeta_0 + \tau e^{i\theta}) d\theta = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta_0 + \tau e^{i\theta}) d\theta \quad (2.20)$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$w(\zeta_0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta_0 + \tau e^{i\theta}) d\theta. \quad (2.21)$$

Demek ki devam fonksiyonu $E \cap \partial D$ 'de de $D-E$ deki değerleri ile belirlenir. Böylece devam tektir.

2.2. Phragmen Lindelöf Teoreminin Bir Genellemesi

D kümesinin $\overline{C}$ 'de kapanışını $\overline{D}$ ile işaretleyeceğiz. Açık $D \subset \overline{C}$ kümesinde tanımlanmış reel değerli u fonksiyonu için

$$u_D^\infty = \begin{cases} \overline{\lim}_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \zeta \in D \cap C}} \frac{u(\zeta)}{\log|\zeta|} & z = \infty \in \overline{D} \\ 0 & z = \infty \notin \overline{D}, \end{cases}$$

olsun.

Teorem 2.5 : $D \subset C$ açık küme, $D \neq C, E \subset RSH(C)$ kümesi F_σ tipli ve $\partial D \not\subset E \subset C - D$ olsun. Ve D 'de s.h., D 'nin her sınırlı parçasında üstten sınırlı ve

$$\overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \in D}}} v(\zeta) \leq 0 \quad \forall z \in \partial D - E$$

olsun. Bu taktirde D 'nin her bağlantılı bileşeni için ya

$$v(\zeta) \leq 0 \quad \forall \zeta \in D_K, \quad (2.22)$$

ya da

$$z = \infty \in \partial D_K \quad \text{ve} \quad v_{D_K}^\infty \in (0, \infty].$$

Bu sonuncu halde eğer $v_{D_K}^\infty < +\infty$ ise D bağlantılıdır ve her $a \in C$ noktası için D kümesi

$$\inf_{\zeta \in C_j} v(\zeta) \rightarrow \infty \quad (j \rightarrow +\infty) \quad (2.23)$$

olacak şekilde $C_j = \{\zeta : |\zeta - a| = \tau_j\}$, $\tau_j \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$) çemberleri içeriyor.

Bu teorem önceki bölümdeki Phragmen Lindelöf teoreminden daha kuvvetli ve geneldir. Teoremin ispatı için yardımcı önermelere ihtiyacımız vardır.

Önerme 2.6 : $S \subset C, S \neq C$ açık küme, $E \in RSH(C), \partial S \not\subset E \subset C - S$ olsun. v, S 'de s.h. onun her sınırlı parçasında üstten sınırlı ve

$$\overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \in D}}} v(\zeta) \leq 0 \quad \forall z \in (\partial S) - E$$

eşitsizliği sağlansın. Bu taktirde

$$u(\zeta) = \begin{cases} v(\zeta) & \forall \zeta \in S \\ 0 & \forall \zeta \in C - \bar{S} \\ \overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in S}}} v(\zeta) & \forall \zeta \in \partial S \end{cases}$$

fonksiyonu C 'de s.h. dir.

İspat : u fonksiyonu C 'de negatif değil, S 'de pozitiftir, $(\partial S) - E$ 'yi içeren $C - (S \cup (E \cap \partial S))$ kümesinde sifıra eşittir. Bu fonksiyon $C - (\partial S)$ 'de s.h. ve $C - (E \cap \partial S)$ kuazi s.h. tir. Çünkü, o $(\partial S) - E$ 'nin her noktasında sifıra eşit olan yerel minimuma sahiptir ve süreklidir. Dolayısıyla u fonksiyonu $C - (E \cap \partial S)$ kümesinde k.s.h. tir ve C 'ye göre yerel sınırlıdır. $E \cap \partial S \in RSH(C)$ olduğundan dolayı Teorem 2.1'e göre bütün C 'de s.h. tir.

Önerme 2.7 : $D \subset C, D \neq \emptyset$ açık küme, $E \in RSH^0(D)$ olsun. Bu taktirde E 'nin iç logaritmik kapasitesi sıfırdır (Eğer E kapasiteye göre ölçülebilir ise, $E \in \mathbf{M}$).

İspat : Aksini düşünelim. Bu taktirde pozitif kapasiteli $K \in E \cap D$ kompaktı mevcuttur. K 'nın denge potansiyeli $\bar{C}$ 'de üstten sınırlı, ζ sonsuza yaklaşırken $-\infty$ yaklaşıyor, C 'de sonlu ve s.h. tir, $C - K$ 'da ise harmoniktir. Bu potansiyel D 'de s.h. olamaz. Çünkü aksi taktirde, o C 'de harmonik olurdu ki bu da çelişkidir. Dolayısıyla $K \notin RSH^0(D)$ alıyoruz ki bu da $E \in RSH^0(D)$ ile çelişki oluşturur.

Önerme 2.8 : $E \subset C$ kümesi F_σ tipi, $a \in C$ herhangi bir nokta $E \in RSH^0(C - \{a\})$, $\psi: \zeta \rightarrow |\zeta - a|$ kompleks düzlemde reel eksene tasvir, $(E)_+ = \psi(E)$ olsun. Bu taktirde $(E)_+ \in M$ 'dir.

İspat : E kümesi E_j 'ler kompakt olmak üzere $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ biçiminde yazılabiliyor.

Önerme 2.7'den $E_j \in M$ sonucunu elde ediyoruz. Her E_j kompaktı ve onun ψ tasviri olan $(E_j)_+$ 'a kapasitenin büzülme tasviri (Contraction Mapping) altında azalmaması hakkındaki teoremi [17, S.212] uygularsak $(E)_+ \in M$ alıyoruz.

Teorem 2.5'in İspatı : Varsayalım ki (2.22) sağlanmıyor.

$$S = \{\zeta \in D : v(\zeta) > 0\}$$

olsun. S 'nin herhangi bağlantılı S_1 bileşenini alalım. D_1 ile D 'nin, S_1 'i içeren bileşenini gösterelim. Bu taktirde

$$B_{S_1}(v(\cdot), z) = 0 \quad \forall z \in (\partial S_1) - E \quad (2.24)$$

sağlanır.

$$u(\zeta) = \begin{cases} v(\zeta) & \forall \zeta \in S_1 \\ 0 & \forall \zeta \in C - \bar{S}_1 \\ \overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in S_1}} v(\zeta)} & \forall \zeta \in \partial S_1 \end{cases} \quad (2.25)$$

olsun. Önerme 2.6'dan görüyoruz ki $u(\zeta)$ fonksiyonu C 'de s.h. tir. S.h. fonksiyonlar için maksimum prensibinden $z = \infty \in \partial S_1$ alıyoruz. Subharmonik fonksiyonlar için konvekslik teoremlerini kullanırsak, $u_{S_1}^\infty \in (0, +\infty]$, ilişkisini gösterebiliriz (Bu [14, S.245] da gösterilmiştir). Buradan ve (2.25)'den $v_{D_1}^\infty \in (0, +\infty]$ alıyoruz. Eğer $v_{D_1}^\infty < +\infty$ ise u 'nun mertebesi sıfırdır. Bundan dolayı

$$u(\varsigma) \leq \frac{1}{2} B_{u,a}(\|\varsigma - a\|) \quad (2.26)$$

ifadesini sağlayan bütün $\varsigma \in C$ noktaları kümesi E_0 , yeteri kadar dağınıktır. [bak. 11-15]

$$(E_0)_+ = \{r > 0 : S(a, r) \cap E_0 \neq \emptyset\}$$

işaretleterek gösterebilirizki, her r için $(r, +\infty) - (E_0)_+ \notin M$ [bak. 11-15]. Buradan önerme 2.8’de görüyoruz ki, öyle τ_j , $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j < \dots$ $\tau_j \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty)$ dizisi mevcuttur ki, $\tau_j \notin (E)_+ \cup (E_0)_+$. Bu halde $S(a, r_j) \cap (E \cup E_0) = \emptyset$ ve $S(a, r_j)$ üzerinde $u(\varsigma) > 0$ olduğundan dolayı $S(a, r_j) \subset D_1$. Bu sonuç (2.25)’den gözüküyor. $v_D^\infty > 0$ koşulundan (2.23)’i elde ederiz.

D_1 ve D ’nin bağlantılılığı ise u ’nun tanımından maksimum ilkesinden hemen çıkıyor. [14, S.246].

Teorem 2.5’i biraz daha genelleştirebiliriz. Öyle ki, teoremdaki u fonksiyonunun E ’nin bir sayılabilir alt kümesinin noktaları komşuluğunda sınırlılık yerine, onların “hızlı artmaması” koşulunu sağlaması yeterli olacaktır.

Bu yönde bir sonuç alalım. Kolaylık için sonucu özel halde vereceğiz (bölgenin sınırlılığı varsayımında).

Önce aşağıdaki yardımcı önermeyi ifade edelim.

Önerme 2.9 : $D \subset C$ açık küme $T \subset Q$ sonlu veya sayılabilir küme; $Q \subset D, Q \in M, Q \neq \emptyset$ G_δ tipli küme olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşulları sağlayan v Borel ölçüsü mevcuttur :

1. $\text{supp } v \subset D$,
2. $\forall b \in T$ noktasında $v(b) > 0$,
3. $u^\vee(x)$ potansiyeli $-\infty$ değerini ancak Q kümesinin noktalarında alıyor.

Önermenin ispatı [17, S.223-225]’dekine benzer olarak yapılıyor.

Teorem 2.10 : $D \subset C$ sınırlı küme, T sonlu veya sayılabilir küme, $E \subset RSH(C)$ kümesi F_σ tipli, $T \subset E, \partial D \not\subset E \subset C - D$ olsun. v, D ’de s.h., her $b \in T$ noktası komşuluğunda bir $o(\|\log|x-b|\|)$, $x \rightarrow b$ büyüklüğü ile yukarıdan sınırlı, her $b \in D - T$ noktası komşuluğunda bir sabitle sınırlı ve

$$\overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \in D}}} v(\zeta) \leq 0 \quad \forall z \in \partial D - E$$

olsun. Bu takdirde

$$u(\zeta) \leq 0 \quad \forall \zeta \in D.$$

İspat : Önermeye göre D 'de negatif olmayan öyle $w(x)$ subharmonik fonksiyonu vardır ki,

$$\text{a) } E \text{ 'de } w(\zeta) = -\infty$$

$$\text{b) } \forall b \in T \text{ noktası komşuluğunda}$$

$$w(\zeta) \sim \log|\zeta - b|$$

koşulları sağlanıyor.

$$z \in D \text{ alalım ve } w(\zeta) > -\infty \text{ varsayalım.}$$

$$u_{\varepsilon}(\zeta) = u(\zeta) + \varepsilon w(\zeta) \quad \varepsilon > 0$$

fonksiyonuna daha önce kullandığımız yöntemleri ve Teorem 2.5'yi uygularsak

$$u_{\varepsilon}(\zeta) \leq 0 \quad \forall \zeta \in D.$$

Şimdi $\varepsilon \rightarrow 0$ koşulunda limite geçerek gerekeni elde ederiz.

3. SONUÇ

Tezde kuazi subharmonik fonksiyonlar için devam problemi ele alınmış olup Phragmen Lindelöf tipi teoremler ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- 1-) Aliyev T.G., and P.M. Tamrazov, A contour-and-solid problem for meromorphic functions, taking into account nonunivalence, Ukrainian Math. Zh. 39 (1987), 683--690 (Russian).
- 2-) Barry P.D. The minimum modulus of small integral and subharmonic functions.- Proc. London Math. Soc. , 1962 , XII, p. 446 – 495
- 3-) Brelot M., Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point. (Actualites scientifiques et industrielles, No: 134. Hermann 1934)
- 4-) Brelot M., Familles de Perron et probleme de Dirichlet. Acta Szeged, I X (1939a) 133 – 153
- 5-) Brelot M., Sur la theorie moderne du potentiel. C.R. de l' Acad. Sci. Paris 209 (1939b) 828.
- 6-) Brelot M., A new proof of the fundamental theorem of Kellogs – Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem. Rend. Circ Mat. Di Palermo (2) 11 (1955) 112-122
- 7-) Brelot M., Elements de la theorie classique du potentiel, Centre de Documentation, Paris, 1959.
- 8-) Carleson L., “Selected Problems on Exceptional Sets” , Van Nostrand Mathematical Studies, No.13, Van Nostrand, 1967
- 9-) Choquet G., Theory of capacities. Ann Inst. Fourier 5 (1955) 131 – 295
- 10-) Du Plessis N., “An Introduction to Potential Theory”, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1970
- 11-) Essen M., Hayman W.K., Huber A. Slowly growing subharmonic functions. I. – Comment. Math. Helv. ,1977 , 51 , p. 1 –28.
- 12-) Evans G.C., Applications of Poincare's sweeping out process. Proc. Nat. Acad. Sci 19(1933) 457
- 13-) Frostman O., Potential d' equilibre et capacite' des ensembles avec quelques applications a la theorie des fonctions. Meddel. Lunds. Univ. Mat. Sem. 3 (1935), 1-118
- 14-) Gehring F.W., Hayman W.K., Hinkkanen A. Analytic Functions satisfying Hölder Conditions on the Boundary. –J. Approx. Theory, 1982, 35, p. 243-249.

- 15-) Hayman W.K. Slowly growing integral and subharmonic functions. – Comment. Math. Helv., 1960, 34 , p.75 – 84
- 16-) Hayman W.K. and Kennedy P.B., “Subharmonic Function”, Academic Press, London, 1976
- 17-) Landkof N.S., “Foundations of Modern Potential Theory”, Springer, Berlin (1972)
- 18-) Markushevich. A.I. “Theory of Functions of a complex variable” Volume 1.2.
- 19-) Ransford Thomas , “Potential Theory in the Complex Plane”.
- 20-) Royden H.L. “Real Analysis Third Edition”.
- 21-) Tamrazov P.M. Quasisubharmonic functions and the removal of singularities //ukr. Mat. Zh. – 1986. – 38, No 5. – P.629 – 634 (in Russian).
- 22-) Tamrazov P.M., “Local contour-and-solid problem for subharmonic functions,” Complex Variables Theory Appl., 7, 231-246 (1986)
- 23-) Tamrazov P.M. Almost subharmonic functions, their analogues in complex spaces and the removal of singularities.Kiev, 1987. – 24p. – (Prepr. / Acad. Sci. Ukr. SSR. Inst. Mathematics; Inst. Mathematics; 87.32) . (In Russian).
- 24-) Tamrazov P.M. Removal of singularities of subharmonic functions and their generalizations // Ukr. Math. Zh. – 1988 . – 40. – P.683 – 694 (In Russian)
- 25-) Tamrazov P.M. Contour – solid problems for holomorphic fuctions and mappings. – Kiev, 1983.- 50 p .- (Prepr. / Acad. Sci. Ukr. SSR. Inst. Mathematics; 83.65). (In Russian).
- 26-) Tsuji M. , “Potential Theory in Modern Function Theory” , Maruzen, Tokyo 1959

ÖZGEÇMİŞ

Nurhan OKÇU, 22.09.1967 yılında Kocaeli-Karamürsel’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladıktan sonra Uludağ Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Halen İstanbul Atatürk Fen Lisesi’nde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.