

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

, 140034

DELTA DİZİLERİ KULLANILARAK
OLUŞTURULAN OLASILIK YOĞUNLUK
FONKSİYONU TAHMİN EDİCİLERİNİN
MAJORANTLAR YARDIMIYLA YAKINSAMA
HIZININ İNCELENMESİ

Özgür SAPMAZ

140034

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd. Doç. Dr. Mustafa NADAR

GEBZE

2003



.....⁴ ÖZGÜR SAPMAZ.....' in tez çalışması, G.Y.T.E Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...16.07.2008... tarih ve ...2007/22... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından ...Matematiği... Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(Tez Danışmanı)

:Yrd. Doç. Dr. Mustafa NADAR
M. Nader

ÜYE

:Prof. Dr. Tahir ALIYEO

ÜYE

:Yrd. Doç. Dr. Bulent AKBAŞ

ONAY

G.Y.T.E Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...06.11.2007... tarih ve ...2007/36... sayılı kararı.

İmza / Mühür
Prof. Dr. Adem KILIÇ
GYTE Mühendislik ve Fen Bil.
Enstitüsü Müdürü

ÖZET

$X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı yoğunluk $f(x)$ fonksiyonundan gelen rasgele değişkenler olsun. Bu çalışmada ‘delta dizileri’ yardımıyla tanımlanmış

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_m(X_i)$$

tahmin edicilerinin yoğunluk fonksiyonundan ortalama kare sapmasının sıfıra yakınsama hızı ele alınmıştır. Daha önce yapılan çalışmalarda G.Walter ve J.Blum [1] yoğunluk fonksiyonunun H^λ ($0 < \lambda < 1$) sınıfından olan halini incelemiştir.

Tezde bu çalışmalar daha genel: yoğunluk fonksiyonlarının süreklilik modülü tipi majorantlarla belirlenen sınıflardan olduğu hale taşınmıştır. Ayrıca, $\lambda = 1$ mertebeden Lipschitz sınıfı H^1 için bile elde edilen sonuç yenidir:

$$E[\hat{f}_n(x) - f(0)]^2 = O(n^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^2)$$

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ihtiyaç duyulan tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde delta dizilerinin özellikleri ve yakınsama hızları incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise majorantlar kullanılarak yeni sonuçlar elde edilmiştir.

SUMMARY

Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be independent identically distributed random variables with common probability density function $f(x)$. In this thesis we consider the estimators

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_m(X_i)$$

mean square rates converges to zero, which denoted by the delta sequences. In the former works G.Walter and J.Blum [1] studied density function which was in the H^λ ($0 < \lambda < 1$) class. In this thesis, we take common probability density functions to majorants type of continuity module class. Furthermore the result is new for Lipschitz class H^1 with $\lambda = 1^{\text{st}}$ degree.

$$E[\hat{f}_n(x) - f(0)]^2 = O(n^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^2)$$

In chapter one, appropriate definitions are given. In chapter two, properties of delta sequences and mean square rates are investigated. In chapter three, we obtain new results with using majorants type of continuity module.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından ötürü çok değerli öğretmenlerim, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa NADAR'a ve Sayın Prof. Dr. Tahir ALİYEV'e teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

VII

Sayfa

ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Tanımlar	2
2. GENEL DELTA DİZİSİ TAHMİN EDİCİLERİ	6
2.1. Global Özelliklere Dayalı Kare Ortalama Oranları	10
2.2. Lokal Yakınsama Oranları	14
3. SÜREKLİLİK MODÜLÜ TİPİ MAJORANTLAR VE LOKAL YAKINSAMA ORANLARI	15
4. SONUÇ	22
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	24

1 GİRİŞ

Bu tezde, dağılımı bilinmeyen bağımsız aynı dağılımdan gelen rastgele $X_1, X_2, \dots, X_n$ değişkenleri için yoğunluk fonksiyonu f 'in herbir noktadaki değerini tahmin etme metodlarından biri olan delta dizileri ile tahmin yöntemini ve yakınsama oranlarını inceledik.

Yoğunluk fonksiyonumuz f 'in her bir noktadaki değerini tahmin etme problemi ilginç ve birçok değişik yöntemin mevcut olduğu bir problemdir. Örneğin; Rosenblatt (1956), Parzen (1962), Schuster (1969), Singh (1974) ve Susarla-Kumar (1975) tarafından çalışılmış olan Kernel metodları, Schwartz (1967), Kronmal ve Tarter (1968) ve Walter (1976) tarafından çalışılmış olan orthogonal seri metodları, Van Ryzin (1973) ve Wahba (1971), (1975) tarafından çalışılmış olan İnterpolasyon metodu ve Blum-Susarla (1976), Farrell (1972) ve Wahba (1975) tarafından çalışılmış olan Karakteristik fonksiyon yaklaşımı metodunu örnek olarak verebiliriz. Delta dizileriyle tahmin metodu yukarıda bahsedilmiş birçok metodu genelleştirecek bir metoddur.

G.Walter ve J.Blum [1] 1979 yılında yayınlanan makalesinde aşağıdaki ilginç teoremi ispatlamışlardır.

(1) $f(x)$, $x = 0$ 'da Lipschitz koşullarını λ . mertebeden ($0 < \lambda < 1$) sağlayan sınırlı bir yoğunluk fonksiyonu ve $\{\delta_m\}$ Fejer tipi bir delta dizisi olsun.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve $f(x)$ dağılım fonksiyonundan gelen rastgele değişkenler olmak üzere

$$E[\hat{f}_n(x) - f(0)]^2 = O(n^{-1+\frac{1}{2\lambda+1}})$$

olduğunu göstermişlerdir. Biz bu tezde süreklilik modülü tipi majorantları kullanarak (1) teoremini genelleştirdik ve

ω :süreklilik modülü tipi majorantlar Z :Zygmund operatörü olmak üzere

$$E[\hat{f}_n(x) - f(0)]^2 = O[Z^2(\omega, n^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}) + n^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}]$$

sonucunu elde ettik ve majorantımızı

$\omega(t) = t$ biçiminde seçerek (1) teoremindeki $0 < \lambda < 1$ kısıtlamasını ortadan kaldırarak,

$$\alpha = 1 \text{ için } E[\hat{f}_n(x) - f(0)]^2 = O(n^{-\frac{2}{3}}(\ln n)^2)$$

gibi daha belirgin bir oran elde ettik.

1.1 Temel Tanımlar

Öncelikle konu ile ilgili temel tanımlamaları verelim.

Tanım 1 *Olasılık Uzayı:*

Ω bir küme, F Ω 'nın alt kümelerinden oluşmuş bir σ -cebri ve P Kolmogorov aksiyomlarını sağlamak üzere, F üzerinde tanımlı olasılık ölçüsünden oluşan (Ω, F, P) üçlüsüne olasılık uzayı denir.

Tanım 2 Ω 'nın alt kümelerinden oluşmuş F aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir σ -cebri dir denir.

$$1) \emptyset \in F$$

$$2) \text{ Eğer } A \in F \text{ ise } A^c \in F$$

$$3) \text{ Eğer } \{A_n\}_{n>1} \text{ , } F\text{'in elemanlarından oluşmuş bir dizi ise}$$

$$\bigcup A_n \in F \text{ dir}$$

Tanım 3 $X : \Omega \rightarrow R \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu $\forall \lambda \in R$ için $\{\omega : X(\omega) < \lambda\} \in F$ koşulunu sağlarsa ona (Ω, F, P) olasılık uzayında rastgele değişken veya (Ω, F, P) üzerinde F -ölçülebilir fonksiyon denir.

Zayıf Türevler:

Sonsuz kere diferansiyellenebilir, kompakt supporta sahip $\phi : U \rightarrow R$ fonksiyonları uzayını $C_c^\infty(u)$ ile göstereceğiz. $\varphi \in C_c^\infty(u)$ ise ona test fonksiyonu denir.

$u \in C^1(u)$ ve $\phi \in C_c^\infty(u)$ ise kısmi integrasyon formülüne göre

$$\int_U u \phi_{x_i} dx = - \int_U u_{x_i} \phi dx \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (a)$$

elde ederiz. Çünkü ∂u sınırı üzere integral sıfır oluyor. Daha genel olarak eğer $k \in Z^+$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ mertebesi $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$ olan multiindeks ve $u \in C^k(u)$ ise

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \phi dx \quad (b)$$

Bu eşitlik $D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi$ ifadesine (a) formülünü $|\alpha|$ kere uygulayarak elde edilir.

Tanım 4 $u, v \in L^1_{loc}(U)$ ve α multiindeks olmak üzere

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx \quad (c)$$

eşitliği her $\phi \in C_c^\infty(U)$ test fonksiyonu için sağlanmaz. v fonksiyonuna u nun α -zayıf kısmi türevi denir ve $D^\alpha u = v$ yazılır.

Sobolev Uzayı

K negatif olmayan bir tamsayı $1 \leq p \leq \infty$ olsun.

Tanım 5 Her α , $|\alpha| \leq k$ multiindeksi için $L^p(U)$ 'ya dahil olan $D^\alpha u$ zayıf türevlerine sahip bütün lokal integrallenebilir $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayını $W^{k,p}(U)$ ile işaretleyip ona Sobolev uzayı diyeceğiz.

Tanım 6 X rastlantı değişkeni sürekli olsun ve bir $[a, b]$ aralığında değerler alsın.

$f_x(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ona olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. (pdf)

- 1) $f_x(x) \geq 0$
- 2) $\int_a^b f_x(x) dx = 1$

Tanım 7 Sürekli bir X rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun ve $g(x)$ 'de X 'in tek değerli bir fonksiyonu olsun. $g(x)$ 'in beklenen değeri

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

biçiminde tanımlanır.

$g(x) = (x - a)^r$ biçiminde seçilirse

$$E[g(x)] = E[(x - a)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^r f(x) dx$$

ifadesi, X rastlantı değişkeninin a üzerinden hesaplanan r .ci momenti olarak isimlendirilir.

Özel olarak $r=2$ aldığımızda

$$E[(x - a)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 f(x) dx$$

ifadesine X 'in varyansı denir ve $\text{Var}(X)$ biçiminde gösterilir.

$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ veya $\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2$ biçimlerinde de gösterilebilir.

Tanım 8 Her noktada f 'in tahmini değerine eşit olan fonksiyona f 'in tahmin edicisi (estimator) denir ve $\hat{f}$ ile gösterilir.

Tanım 9 X rastlantı değişkeni için

$$E(\hat{f}_n(x)) - f(x)$$

ifadesine X 'in bias(sapma) bileşeni denir.

Tanım 10 $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri için

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq K, n \geq n(K)$$

ilişkisi sağlanacak biçimde $K > 0$ $n(K) \in \mathbb{N}$ sayıları bulunabiliyorsa

$a_n = O(b_n)$ yazılır. Özel halde $a_n = O(1)$ 'in anlamı pozitif K ve yeteri kadar büyük n ler için $|a_n| \leq K$ dır. Yani a_n sınırlıdır. Açıktır ki,

$$1) O(m) + O(m) = O(m)$$

$$2) O(m) \cdot O(m) = O(m^2)$$

$$3) m \geq n \text{ ise } O(m) + O(n) = O(m)$$

Tanım 11 $f(x)$ 'in tahmin edicisi olan $\hat{f}_n(x)$ ile ortalama kare sapmasına hata kare ortalaması (mean square error) denir ve

$$E[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 = \text{Var}(\hat{f}_n(x)) + \text{bias}^2(\hat{f}_n(x))$$

olarak ifade edilir.



2 GENEL DELTA DİZİSİ TAHMİN EDİCİLERİ

Bu bölümde delta dizilerinin üzerine delta fonksiyonuna yakınsaması koşulunu koyacağız. Bu koşulun genelliğinden dolayı çıkaracağımız sonuçlar da çok zayıf olacaktır. Sonrasında çeşitli kısıtlamalar altında daha kuvvetli sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 12 R -reel eksen, $J \subset R$ açık bir aralık olsun. $J \times J$ 'de tanımlanmış ölçülebilir, sınırlı $\delta_m(x, t)$ fonksiyonları, aşağıdaki koşulu sağlarsa $\{\delta_m(x, t)\}$ 'ya J üzerinde delta dizisi denir.

$\forall x \in J$ ve $\forall \varphi \in C^\infty$, $\text{supp} \varphi \subset J$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_J \delta_m(x, t) \phi(t) dt = \phi(x) \quad (1)$$

Aynı dağılımdan gelen yoğunlukları $f(x)$ olan bağımsız $\{X_n\}$ rastgele değişkenlerini ele alalım. f 'in tahmin edicisini $\delta_m(x, t)$ dizisi yardımıyla

$$\hat{f}_{n,m}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_m(x, X_k) \quad (2)$$

biçiminde yazabiliriz.

Delta dizisi $\delta_m(x, t)$ için bazı örnekler verelim..

Örnek 1 Kernel Tahmin Edici

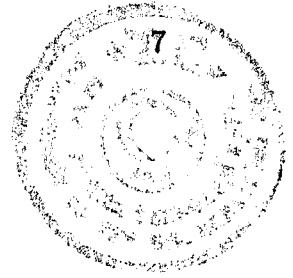
$[0, m^{-1}]$ aralığının karakteristik fonksiyonu $\chi_{m^{-1}}$ ve $x, t \in R$ olmak üzere $\delta_m(x, t) = m\chi_{m^{-1}}(x - t)$ olsun. (Bkz Parzen[2])

Bunun bir delta dizisi olduğunu gösterelim.

$$\chi_{m^{-1}}(x - t) = \begin{cases} 1 & x - t \in [0, \frac{1}{m}] \\ 0 & x - t \notin [0, \frac{1}{m}] \end{cases}$$

den

$$\int_J \delta_m(x, t) dt = \int_J m\chi_{m^{-1}}(x - t) dt = m \int_J \chi_{m^{-1}}(x - t) dt = m \int_0^{\frac{1}{m}} dt = 1,$$



ve

$$\begin{aligned} & \int m\chi_{m-1}(x-t)\phi(t)dt - \phi(x) \\ = & \int m\chi_{m-1}(x-t)\phi(t)dt - \int m\chi_{m-1}(x-t)\phi(x)dt \\ = & \int m\chi_{m-1}(x-t)(\phi(t) - \phi(x))dt = \int_{[0, \frac{1}{m})} m(\phi(t) - \phi(x))dt \leq C\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2 Histogram Tahmin Edici

Delta dizimizi $\delta_m(x, t) = m \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t)$ $x, t \in (0, 1)$ olacak şekilde seçelim.

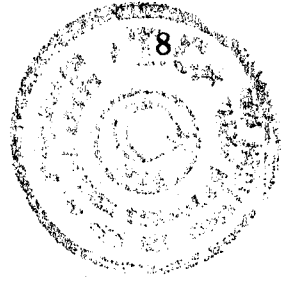
Burada χ_j ile $[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m})$

aralığının karakteristik fonksiyonu gösterilmiştir.

$\delta_m(x, t)$ 'nin delta dizisi olduğunu gösterelim. Öncelikle

$$\begin{aligned} & \int_J \delta_m(x, t) dt \\ = & \int_J m \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t) dt = m \int_J \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t) dt \\ = & m \int_{[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]} \chi_j(t) dt = m \int_{[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]} dt = 1 \end{aligned}$$

Dolayısıyla



$$\begin{aligned} & \int_J \delta_m(x, t) \phi(t) dt - \phi(x) \\ &= \int_J \delta_m(x, t) (\phi(t) - \phi(x)) dt \\ &= \int_J m \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t) (\phi(t) - \phi(x)) dt \\ &\stackrel{\phi(t) - \phi(x) \leq \varepsilon}{\leq} \varepsilon m \int_J \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t) dt \\ &= C\varepsilon \end{aligned}$$

Örnek 3 Yoğunluk Tipine göre Tahmin Etme

Ortalamaları sıfır, varyansları sonlu ve aynı sınırlı yoğunluk fonksiyonlarına sahip olan bağımsız $\{Y_m\}$ rastgele değişkenlerini ele alalım. $g_m(y)$ örnek(sample) ortalamasının yoğunluk fonksiyonu olsun yani, $\bar{Y}$ 'm yoğunluk fonksiyonu $g_m(y)$ ile gösterilsin.

$$Y = \frac{1}{n} \sum Y_i \sim g_m(y)$$

Şimdi delta dizimizi

$\delta_m(x, t) = g_m(x - t)$ gibi tanımlayabiliriz. Çünkü,

$$\begin{aligned} \int g_m(x - t) \phi(t) dt - \phi(x) &= \int g_m(x - t) \phi(t) dt - \int \phi(x) g_m(x - t) dt \\ &= \int g_m(x - t) (\phi(t) - \phi(x)) dt \\ &\stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \int_{|x-t| \geq \delta} g_m(x - t) (\phi(t) - \phi(x)) dt \\ &\quad + \int_{|x-t| < \delta} g_m(x - t) (\phi(t) - \phi(x)) dt \\ &\stackrel{\phi(t) - \phi(x) < \varepsilon}{\leq} \varepsilon \int (\phi(t) - \phi(x)) dt + \varepsilon \int g_m(x - t) dt \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$



Örnek 4 Fourier Dönüşümü Tahmin Edicileri

Bu tahmin edici Blum ve Susarla [3] tarafından ters Fourier dönüşümünü içeren delta karakteristik fonksiyonundan oluşturulmuştur.

$$\delta_m(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m e^{is(x-t)} ds \quad (x, t \in R) \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} \int_J \delta_m(x, t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_J \int_{-m}^m e^{is(x-t)} ds dt \stackrel{u=is(x-t)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_J \int_{-im(x-t)}^{im(x-t)} e^u \frac{du}{i(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_J \left(\frac{e^{im(x-t)} - e^{-im(x-t)}}{i(x-t)} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = 1 \end{aligned}$$

ve,

$$\begin{aligned} &\int_J \delta_m(x, t) \phi(t) dt - \phi(x) \\ &= \int_J \delta_m(x, t) (\phi(t) - \phi(x)) dt \\ &\leq \varepsilon \int_J \delta_m(x, t) dt = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $\{\delta_m(x, t)\}$ bir delta dizisidir.

Örnek 5 Orthogonal Serilerle Tahmin Etme

$L^2(a, b)$ 'de tanımlanmış kompakt operatörün öz fonksiyonlarının oluşturduğu tam ortonormal

$$\Psi_m(x) : (a, b) \rightarrow R$$

sistemini ele alalım.

$$\delta_m(x, t) = \sum_{j=1}^m \Psi_j(x) \Psi_j(t) \quad x, t \in (a, b) \text{ olsun. Bu bir delta dizisidir. (Bkz [4] s:500)}$$

Özel halde bu fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonları içermektedir. Legendre polinomlarını ve Hermite (Charles Hermite) fonksiyonlarını içermektedir.

Trigonometrik fonksiyonlar halinde Dirichlet kernel'ı elde ederiz.

Örnek 6 *İnterpolasyon Tahmin Edici*

$\{\delta_m\}$ delta fonksiyona yakınsayan bir fonksiyonlar dizisi olsun. ve $t_0, t_1, \dots, t_m$ noktaları (a, b) 'de farklı, belirgin noktalar olsun.

Şöyle bir

$L_m(t) = (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_m)$ tanımlayalım.

$$\Delta_m(x, t) = \frac{L_m(x)}{(x-t)L_m(t)} \sum_{j=0}^m \delta_m(t - t_j) \quad x, t \in (a, b) \quad \text{seçeceğimiz } t_j \text{ lere}$$

uygun olarak bir delta dizisi olacaktır. Örneğin Jacobi polinomunun sıfırları buna uygundur.

Örnek 7 *Landau'nun dizileri bazlı tahmin edici*

Bu polinomsal yaklaşımları sağlayan ancak ortogonal polinomlardan ve ara değer kestiriminden (interpolation) farklılık gösteren bir tahmin edicidir ve şu şekilde tanımlanır.

$$\delta_m(x, t) = \frac{(1 - (t - x)^2)^m}{\int_{-1}^1 (1 - t^2)^m dt} \quad t \in (-1, 1)$$

2.1 Global Özelliklere Dayalı Kare Ortalama Oranları

Tahmin edicinizin kare ortalama yakınsama oranlarını inceleyebilmek için delta dizilerinin yakınsama oranlarını kullanacağız. Tanım 12' deki yakınsama tipi uygun antitürevlerin L^p yakınsaması ile karakterize edilebilir. (Bkz örneğin [5]) Oran kavramını tanımlayabilmek için bu tip yakınsama tiplerini kullanacağız.

Tanım 13 $J=(a, b)$ üzerinde tanımlanmış $\{\delta_m(x, t)\}$ dizisi

(i) $x \in J$ için, $\delta_m(x, \cdot) \in L^2(a, b)$

(ii) $x \in J$ için, uniform bir şekilde $\|\delta_m(x, \cdot)\|_2^2 = O(m)$,

koşullarını sağlasın.

s pozitif bir tamsayı olmak üzere $\delta_m^{(-s)}(x, t)$ 'i ilk $(s - 1)$ teriminin a noktasındaki türevi 0 olacak şekilde s . mertebeden, $\delta_m(x, t)$ nin t 'ye göre antitürevleri

olarak tanımlayalım. $\frac{(x-t)_+^{s-1}}{(s-1)!}$ fonksiyonunu $\delta_x^{(-s)}(t) (= \delta^{(-s)}(x-t))$ ile işaretleyelim. Varsayalım ki s sayısı için öyle $q \geq 1$ ve $0 < \beta \leq s + \frac{1}{q} - 1$ sayıları mevcuttur ki ,

$$(iii) \ x \in J \text{ için } \delta_m^{(-s)}(x, \cdot) - \delta_x^{(-s)}(\cdot) \in L^q(a, b),$$

$$(iv) \ x \in J \text{ ye göre düzgün olarak } \left\| \delta_m^{(-s)}(x, \cdot) - \delta_x^{(-s)}(\cdot) \right\|_q = O(m^{-\beta}),$$

$$(v) \ k=1,2,\dots,s \text{ için } x \in J \text{ ye göre düzgün olarak}$$

$$\left| \delta_m^{(-k)}(x, b) - \delta_x^{(-k)}(b) \right| = O(m^{-\beta})$$

koşulları sağlanır.

Bu takdirde $\{\delta_m\}$ dizisi , (s, q) ile $m^{-\beta}$ oranına sahiptir denir.

Teorem 1 $s \geq 1$ ve yoğunluk fonksiyonu $f \in W_p^{(s)}(J)$ olsun. $\{\delta_m\}$, (s, q) ile $m^{-\beta}$ oranına sahip bir delta dizisi

ve $q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlasın. $m = [n^{-1+\frac{1}{1+2\beta}}]$ (2) eşitliğiyle verilen $\hat{f}_{n,m}$ i $\hat{f}_n$ ile işaretleyelim. Bu takdirde J 'de x 'e göre düzgün olarak

$$E[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 = O(n^{-1+\frac{1}{1+2\beta}}) \quad (3)$$

İspat. Öncelikle hatasının karesinin ortalaması (MSE)'yi varyans ve bias terimlerine ayırırız.

$$\begin{aligned} E[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 &= E[\hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x)) + E(\hat{f}_n(x)) - f(x)]^2 \\ &= E(\hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x)))^2 + (E(\hat{f}_n(x)) - f(x))^2 \\ &\quad + 2E[(\hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x)))(E(\hat{f}_n(x)) - f(x))] \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte 3.terimin sıfır olduğunu gösterelim.

$$E(\hat{f}_n(x) - f(x)) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_m(x, X_k)\right) - f(x) = \int_J \delta_m(x, t) \cdot f(t) dt - f(x)$$

olur ki; alınan integral t 'ye bağlı olmaz. Yani $E(\hat{f}_n(x)) - f(x)$ sabit olacaktır

dolayısıyla bu terimi dışarı çıkartırsak ifademiz

$$2(E(\hat{f}_n(x)) - f(x))E(\hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x))) = 0$$

$MSE = E[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 = Var(\hat{f}_n(x)) + (E(\hat{f}_n(x)) - f(x))^2$ olacak şekilde düzenlenir.

Varyans kısmı,

$$\begin{aligned} Var(\hat{f}_n(x)) &= Var\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_m(x, X_k)\right) = \frac{1}{n} Var(\delta_m(x, X_k)) \\ &= \frac{1}{n} [E(\delta_m^2(x, t)) - [E(\delta_m(x, t))]^2] \\ &= \frac{1}{n} \left[\int_J \delta_m^2(x, t) f(t) dt - \left(\int_J \delta_m(x, t) f(t) dt \right)^2 \right] \end{aligned}$$

bias kısmı ise

$$\begin{aligned} [E(\hat{f}_n(x)) - f(x)]^2 &= [E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_m(x, X_k) - f(x)\right]]^2 \\ &= [E(\delta_m(x, X_k) - f(x))]^2 \\ &= \left[\int_J \delta_m(x, t) f(t) dt - f(x) \right]^2 \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} E[\hat{f}_{n,m}(x) - f(x)]^2 &= \frac{1}{n} \left[\int_J \delta_m^2(x, t) f(t) dt - \left(\int_J \delta_m(x, t) f(t) dt \right)^2 \right] \\ &\quad + \left[\int_J \delta_m(x, t) f(t) dt - f(x) \right]^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$|f^p(x) - f^p(a)| = \left| \int_a^x f^{p-1}(x) dx \right| \leq p \int_a^x f^{p-1}(x) |f'(x)| dx \leq p \|f\|_p^{\frac{p}{p-1}} \cdot \|f'\|_p$$

olduğundan

$$\|f\|_\infty \text{ sonlu olur ve } \int_J \delta_m^2(x, t) f(t) dt \leq \|f\|_\infty \|\delta_m(x, \cdot)\|_2^2 \stackrel{\text{Tanım 13 (ii)}}{=} O(m)$$

Benzer şekilde

$$f \in L^\infty(J) \cap L^1(J) \text{ için } \|f\|_2^2 < \infty \text{ olduğundan}$$

$$\left(\int_J \delta_m(x, t) f(t) dt \right)^2 \leq \|f\|_2^2 \|\delta_m(x, \cdot)\|_2^2 = O(m) \text{ olur.}$$

Bias terimini tahmin etmek için s kez kısmi integral alırız ve Hölder eşitsizliğini kullanarak aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\left| \int_J \delta_m(x, t) f(t) dt - f(x) \right| &= \left| \int_J [\delta_m(x, t) - \delta(x - t)] f(t) dt \right| \\
&\leq \left| \int_J [\delta_m^{(-s)}(x, t) - \delta^{(-s)}(x - t)] f^{(s)}(t) dt \right| + O(m^{-\beta}) \\
&\leq \left\| \delta_m^{(-s)}(x, \cdot) - \delta_x^{(-s)}(\cdot) \right\|_q \|f^{(s)}\|_p + O(m^{-\beta})
\end{aligned} \tag{5}$$

Bu iki tahmin edici birleştirildiğinde

$E[\hat{f}_{n,m}(x) - f(x)]^2 = O(\frac{m}{n}) + O(m^{-2\beta})$ elde edilir. Burada $m = [n^{\frac{1}{1+2\beta}}]$ seçilirse istenilen sonuç elde edilmiş olur. ■

Tanım 13'de bahsedilmiş oranı hesaplamak her zaman çok kolay olmaz. Dominize edilmiş kernelları(özellikle Parzen tipi) kullanırsak bu oranı hesaplamak kolaylaşır ve ayrıca hesaplanılan oran için bu kernellar delta dizisidirler.

Tanım 14 $K(x)$, $L^\infty(R)$ 'da negatif olmayan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$(a) \int K = 1$$

$$(b) q=1 \text{ için } \int |s| K(s) ds < \infty \text{ veya } q>1 \text{ için } \int (\log_+ |s|) |s|^q K^q(s) ds < \infty$$

O halde $\delta_m(x, t) = mK(m(x - t))$ ile belirlenen delta dizisi $(1, q)$ ile $m^{-\frac{1}{q}}$ oranına sahiptir.

Bunlar, Tanım 13'deki (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağlayan delta dizisileridir.

(Bkz [1] , Önerme 1)

Tanım 15 Eğer $x, t \in R$ için , $\{\delta_m\}$ delta dizisi,

$$(a) \delta_m(x, t) \geq 0$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \delta_m(x, t) dt = 1$$

$$(c) \delta_m(x, t) \leq CmK(m(t - x))$$

koşullarını sağlıyorsa o K kernel'i tarafından dominize edilmiştir denir.

Buradaki K nın Tanım 14'deki (a) ve (b) koşullarını sağladığı varsayılır.

SONUÇ 1 $\{\delta_m\}$ R 'de bir $q \geq 1$ için tanım 14'deki koşulları sağlayan Kernel ile dominize edilmiş bir delta dizisi olsun. Bu takdirde $\{\delta_m\}$ dizisi $(1, q)$ için $m^{-\frac{1}{q}}$ oranına sahiptir.

2.2 Lokal Yakınsama Oranları

Bölm 2.1'de yoğunluk fonksiyonları Sobolev uzayından alınmış olup, düzgün yakınsama elde edilmiştir, yani sonuçlar globaldir. Genel bir delta dizisi sınıfları için noktasal sonuçlar elde edilebilir. Bu davranışları Fejer Kernel gibi olan Fejer tipi delta dizileridir. Tek değişkenli fonksiyonlardan oluşturulmuş diziler ele alıp sıfır noktasındaki yakınsaklığı inceleyeceğiz.

Tanım 16 R 'de $\pi^{-1}(1+t^2)^{-1}$ kernel'i ile domine edilen delta dizisi Fejer tipidir denir. Sonuç 1'e göre böyle diziler $(1, q)$ ile $m^{-\frac{1}{q}}$ oranına sahiptir. ($q > 1$)

Teorem 2 $f(x)$ $x=0$ 'da λ . mertebeden ($0 < \lambda < 1$) Lipschitz koşullarını sağlayan sınırlı bir yoğunluk fonksiyonu, $\{\delta_m\}$ Fejer tipi bir delta dizisi olsun. $f(x)$ dağılım fonksiyonundan gelen bağımsız $X_1, X_2, \dots$ rastgele değişkenleri için

$$\hat{f}_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_m(X_i)$$

tahmin edicisini $m = n^{\frac{1}{1+2\lambda}}$ olduğunda $\hat{f}_n$ ile gösterelim. Bu takdirde

$$E[\hat{f}_n - f(0)]^2 = O(n^{-1+\frac{1}{2\lambda+1}})$$

İspat. Bkz [1] Teorem 2 ■

Biz bir sonraki bölümde bu teoremi genelleştireceğiz.

3 SÜREKLİLİK MODÜLÜ TİPİ MAJORANTLAR VE LOKAL YAKINSAMA ORANLARI

Bu bölümde süreklilik modülü tipi majorantları kullanarak Teorem 2 farklı kısıtlamalar altında genelleştirerek yeni sonuçlar elde edilmiştir. $\lambda = 1$ mertebesi ile Lipschitz sınıfı için bile bulunan sonuç yenidir.

Tanım 17 $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise ona *süreklilik modülü tipi majorant* denir.

(a) $\omega(0) = 0$

(b) ω monoton artan

(c) $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \quad \forall \delta_1, \delta_2 \in [0, 1]$

Açıkça görülebilir ki;

$$\omega(2\delta) \leq 2\omega(\delta) \quad (6)$$

çünkü, $\omega(2\delta) = \omega(\delta + \delta) \stackrel{(c)}{\leq} \omega(\delta) + \omega(\delta) = 2\omega(\delta)$

$$\begin{aligned} \omega(n\delta) &= \omega[(n-1)\delta + \delta] \stackrel{(c)}{\leq} \omega[(n-1)\delta] + \omega(\delta) \\ &\leq (n-1)\omega(\delta) + \omega(\delta) = n\omega(\delta) \end{aligned} \quad (7)$$

$\forall t \geq 1$ için

$$\omega(t\delta) \leq \omega([t] + 1)\delta \leq ([t] + 1)\omega(\delta) \leq (t + 1)\omega(\delta) \leq 2t\omega(\delta)$$

Aşağıdaki eşitsizlikler Teorem 3'ün ispatında kullanılacaktır.

$$\omega(t\delta) \leq 2t\omega(\delta) \quad \forall t \geq 1, \delta > 0 \quad (8)$$

$$\text{eğer } \delta_1 \leq \delta_2 \text{ ise } \omega(\delta_2) = \omega\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\delta_1\right) \leq \frac{\delta_2}{\delta_1}\omega(\delta_1) \leq 2\frac{\delta_2}{\delta_1}\omega(\delta_1) \Rightarrow$$

$$\frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2} \leq 2\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1} \quad (9)$$

$$t = \frac{1}{\delta} \text{ ise } \omega(\delta) \stackrel{(8)}{\geq} \frac{\delta}{2} \omega(1) \quad (10)$$

$$\omega(\delta) = \frac{\omega(\delta)}{\delta} \delta = \frac{\omega(\delta)}{\delta} \int_0^{\delta} dt \stackrel{(t \leq \delta)}{\leq} 2 \int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt \Rightarrow \quad (11)$$

$$\omega\left(\frac{1}{m}\right) \leq 2 \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\omega(t)}{t} dt$$

Tanım 18 ω majorant ise

$$Z(\omega, \delta) = \int_0^{\delta} \frac{\omega(x)}{x} dx + \delta \int_{\delta}^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx \quad (12)$$

operatörüne Zygmund operatörü denir.

Örnek 8 $\omega(t) = t^{\alpha}$ $0 < \alpha < 1$ ve $0 < \delta < 1$ ise

$$Z(\omega, \delta) = O(\delta^{\alpha}) \quad (13)$$

Gerçekten,

$$\begin{aligned} Z(\omega, \delta) &= \int_0^{\delta} \frac{\omega(x)}{x} dx + \delta \int_{\delta}^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx = \int_0^{\delta} t^{\alpha-1} dt + \delta \int_{\delta}^1 t^{\alpha-2} dt \\ &= \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha-1} (1 - \delta^{\alpha-1}) \leq c\delta^{\alpha} \end{aligned} \quad (14)$$

Çünkü, $0 < \alpha < 1$ ve $0 < \delta < 1$ olduğundan,

$$\frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha-1} - \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha-1} \leq \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} - \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha-1} = -\frac{\delta^{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)} \leq c\delta^{\alpha}$$

Teorem 3 $f(x)$ yoğunluk fonksiyonu sınırlı olup

$|f(x) - f(0)| \leq c\omega(|x|)$ ve $|x| \leq 1$ koşulunu sağlasın. $\{\delta_m\}$ Fejer tipi delta

dizileri olmak üzere, $m = [n^{1/(1+2\alpha)}]$ $\hat{f}_n = \hat{f}_{mn}$, $\hat{f}_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_m(X_i)$ ve $X_1, X_2, \dots$ bağımsız rastgele değişkenlerin yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun.

Bu durumda

$$E[\hat{f}_n(x) - f(0)]^2 = O[Z^2(\omega, n^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}) + n^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}] \quad (15)$$

ilişkisi sağlanır.

İspat. Hatanın karesinin ortalaması (MSE)'yi şu şekilde yazabiliriz.

$$E[\hat{f}_n(x) - f(0)]^2 \stackrel{(4)}{=} \frac{\int \delta_m^2 f(x) - \{\int \delta_m f(x)\}^2}{n} + [\int \delta_m f(x) - f(0)]^2 \quad (16)$$

burada $m = [n^{1/(1+2\alpha)}]$

Tanım 16'dan dolayı $\|\delta_m\|_\infty = O(m)$ ve $\int \delta_m f \leq \|f\|_\infty$ olduğundan (16)'nın ilk terimi Cm/n ile sınırlanmıştır. Çünkü;

$$\begin{aligned} \delta_m(x, t) &\leq Cm \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (m(t-x))^2} \leq \frac{C}{\pi} m \\ &\leq C_1 m \Leftrightarrow \|\delta_m\|_\infty = O(m) \end{aligned}$$

$$\left| \int \delta_m f(x) \right| \leq \left| \int \delta_m \sup |f(x)| \right| \leq \|f\|_\infty \int \delta_m \quad \left(\int \delta_m = 1 \right) = \|f\|_\infty$$

ve sonuçta $\frac{\int \delta_m^2 f(x) - \{\int \delta_m f(x)\}^2}{n} \leq \frac{Cm}{n}$ olur.

Çünkü,

$$\begin{aligned} \frac{\int \delta_m^2 f(x) - \left\{ \int \delta_m f(x) \right\}^2}{n} &\leq \frac{1}{n} \int \delta_m^2 f(x) = \frac{1}{n} \int \delta_m f(x) \delta_m \\ &\leq \frac{1}{n} \|\delta_m\|_\infty \int \delta_m f(x) \quad \left(\int \delta_m f \text{ sonlu} \right) \leq C \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Şimdi (16)'nın ikinci terimini değerlendirelim.

$$\int \delta_m f(x) - f(0) dx = \int \delta_m f(x) dx - \int f(0) \delta_m dx = \int \delta_m (f(x) - f(0)) dx$$

olduğuna dikkat edilirse,

$$\int \delta_m (f(x) - f(0)) dx = \left\{ \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{-\frac{1}{m}} + \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} + \int_{\frac{1}{m}}^1 + \int_1^{\infty} \right\} \delta_m(x) (f(x) - f(0)) dx$$

yazabiliriz. Terimleri teker teker değerlendirelim

İlk olarak

$$\begin{aligned} &\left| \int_1^{\infty} \delta_m(x) (f(x) - f(0)) dx \right| \\ &\leq \int_1^{\infty} |\delta_m(x)| (|f(x)| + |f(0)|) dx \\ &\stackrel{|\delta_m(x)| \leq \frac{C}{m}}{\leq} \frac{C}{m} \int_1^{\infty} |f(x)| dx + \int_1^{\infty} C m^{\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(mx)^2}} |f(0)| dx \\ &\stackrel{t=mx}{\leq} \frac{C}{m} \int_1^{\infty} |f(x)| dx + \int_1^{\infty} C m^{\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}} |f(0)| \frac{dt}{m} \\ &\leq \frac{C}{m} \|f\|_1 + C \int_m^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{dt}{1+t^2} f(0) \\ &= O\left(\frac{1}{m}\right) \stackrel{(10)}{=} O\left(\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right) \end{aligned}$$

ilişkisi sağlanır. İkinci olarak $m \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{m}}^1 |\delta_m(x)| |f(x) - f(0)| dx &\leq Cm \int_{-\frac{1}{m}}^1 \frac{|f(x) - f(0)|}{1 + (mx)^2} dx \\
&\leq Cm \int_{-\frac{1}{m}}^1 \frac{|f(x) - f(0)|}{(mx)^2} dx \leq \frac{C}{m} \int_{-\frac{1}{m}}^1 \frac{\omega(|x|)}{x^2} dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Son olarak ortadaki integrali değerlendirelim.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |\delta_m(x)| |f(x) - f(0)| dx &\leq Cm \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \frac{\omega(|x|)}{1 + (mx)^2} dx \\
&\leq 2Cm \int_0^{\frac{1}{m}} \omega(|x|) dx \stackrel{(11)}{\leq} 2C \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\omega(|x|)}{x} dx
\end{aligned}$$

$x \leq \frac{1}{m} \Rightarrow m \leq \frac{1}{x}$

eşitsizliği sağlanır. Geri kalan integraller benzer düşüncede değerlendirilebilir.

Neticede

$$\begin{aligned}
\left| \int \delta_m f - f(0) \right| &\leq C \left[\omega\left(\frac{1}{m}\right) + \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\omega(|x|)}{x} dx + \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\omega(|x|)}{x^2} dx \right] \\
&\stackrel{(11)}{\leq} C \left[\int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\omega(|x|)}{x} dx + \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\omega(|x|)}{x^2} dx \right]
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
E[\hat{f}_n - f(0)]^2 &\leq C \left[\frac{m}{n} + \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\omega(|x|)}{x} dx + \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\omega(|x|)}{x^2} dx \right\}^2 \right] \\
&= C \left[\frac{m}{n} + Z^2\left(\omega, \frac{1}{m}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$m = [n^{1/(1+2\alpha)}] \text{ ise}$$

$$E[\hat{f}_n - f(0)]^2 \leq C[n^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}} + Z^2(\omega, n^{-\frac{1}{1+2\alpha}})]$$



■

Teorem (3)'den elde edilen sonuçlar

1) $\omega(t) = t^\alpha$ olsun. (15) de $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ kabul edip (13)'ü göz önüne alırsak

$E[\hat{f}_n - f(0)]^2 \stackrel{(13)}{=} O(n^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}})$ olduğu görülür.

2) $\lambda = 1$ mertebeden Lipschitz sınıfı yani, $\omega(t) = t$ için

$$Z(\omega, t) = \int_0^\delta \frac{t}{t} dt + \delta \int_\delta^1 \frac{t}{t^2} dt = \delta + \delta |\ln \delta| \leq C\delta |\ln \delta|$$

$$E[\hat{f}_n - f(0)]^2 \leq C(n^{-\frac{2}{3}} + (\delta |\ln \delta|)^2) \stackrel{\delta=n^{-\frac{1}{3}}}{=} C(n^{-\frac{2}{3}} + n^{-\frac{2}{3}}(\ln n^{-\frac{1}{3}})^2) \leq n^{-\frac{2}{3}}(\ln n)^2$$

$E[\hat{f}_n - f(0)]^2 = O(n^{-\frac{2}{3}}(\ln n)^2)$ sonucu elde edilir.

4 SONUÇ

$X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı yoğunluk $f(x)$ fonksiyonundan gelen rasgele değişkenler olmak üzere 'delta dizileri' yardımıyla tanımlanmış

$$\hat{f}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_m(X_i)$$

tahmin edicilerin yoğunluk fonksiyonundan ortalama kare sapmasının sıfıra yakınsama hızı hakkında. G.Walter ve J.Blum [1] 'un sonuçları genelleştirilmiştir: ω : Süreklilik modülü tipi majorant, $Z(\omega, \cdot)$ Zygmund operatörü olmak üzere

$$E[\hat{f}_n(x) - f(0)]^2 = O[Z^2(\omega, n^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}) + n^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}].$$

$\omega(\delta) = \delta$, yani $\lambda = 1$. mertebeden Lipschitz sınıfı H^1 için bile elde edilen sonuç

$$E[\hat{f}_n - f(0)]^2 = O(n^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^2).$$

yenidir.

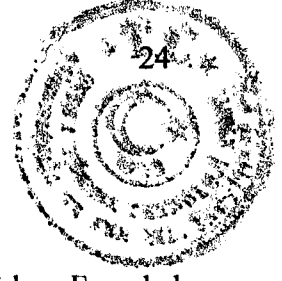


KAYNAKLAR

- [1] G.WALTER; J.BLUM Probabilty Density Estimation Using Delta Sequences
Annals of Statistics, Volume 7, Issue 2(Mar., 1979), 328-340
- [2] PARZEN, E. (1962) On the estimation of probability density and mode. Ann.
Math. Statistics 33 1065-1076
- [3] BLUM, J. And SUSARLA V.(1977) A Fourier inversion method for the
estimation of a density and its derivatives J.Austral.Math.Soc.22 166-171
- [4] WALTER, G. (1965) Expansions of distributions. Trans. American Math.
Society 116 492-510
- [5] KOREVAAR, J.(1971) Mathematical Methods. Academic Press, New York



ÖZGEÇMİŞ



Özgür SAPMAZ 14.01.1976 tarihinde İstanbul'da doğdu. Fenerbahçe Lisesinden 1994 yılında mezun oldu ve aynı yıl girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden 2000 yılında mezun oldu. 2000 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. Bir süre bir bankada sistem analistliği yaptı. Halen bir lisede matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

