

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL AKUSTİK DALGALARIN İÇ
DUVARINDA SONLU BİR BOŞLUĞA SAHİP
SONSUZ DAİRESEL BİR BORUDAN
YANSIMASI VE İLETİMİ

HÜLYA ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2010

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL AKUSTİK DALGALARIN İÇ
DUVARINDA SONLU BİR BOŞLUĞA SAHİP
SONSUZ DAİRESEL BİR BORUDAN
YANSIMASI VE İLETİMİ

HÜLYA ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. ALİNUR BÜYÜKAKSOY

GEBZE

2010



YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15.10.2010 tarih ve 2010/03 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 21.01.2010 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Hülya ÖZTÜRK'ün tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY

ÜYE

:Prof. Dr. Gökhan UZGÖREN

ÜYE

:Prof. Dr. Ali ALKUMRU

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

**TEZ BAŞLIĞI: DÜZLEMSEL AKUSTİK DALGALARIN İÇ DUVARINDA
SONLU BİR BOŞLUĞA SAHİP SONSUZ DAİRESEL BİR
BİR BORUDAN YANSIMASI VE İLETİMİ**

YAZAR ADI: HÜLYA ÖZTÜRK

Bu çalışmada, düzlemsel akustik dalgaların iç duvarında sonlu bir boşluğa sahip sonsuz dairesel bir borudan kırınımı incelenmiştir. İlk olarak düzlemsel akustik dalgaların sağladıkları Helmholtz denklemine doğrudan Fourier dönüşümü uygulanması yoluyla, problem bir Wiener- Hopf denkleminin çözümüne indirgenmiş daha sonra söz konusu denklem ikinci tipten Fredholm integral denklemleri aracılığıyla çözülmüştür. Analizin sonunda ise, koaksiyal silindirik dalga kılavuzunun genişliğinin ve iç duvardaki sonlu boşluğun uzunluğunun kırınım olayına etkisini ortaya çıkaran nümerik sonuçlar sunulmuştur.

SUMMARY

**THESIS TITLE: REFLECTION AND TRANSMISSION OF PLANE
ACOUSTIC WAVES IN AN INFINITE ANNULAR
DUCT WITH A FINITE GAP ON THE INNER WALL**

THESIS AUTHOR: HÜLYA ÖZTÜRK

In this work, the diffraction of acoustic waves by an infinitely long annular duct having a finite gap on the inner wall is investigated rigorously. The related boundary-value problem is formulated into a modified Wiener- Hopf equation which is then reduced to a pair of simultaneous Fredholm integral equations of the second kind. At the end of the analysis, numerical results illustrating the effects of the width of the coaxial cylindrical waveguide and the gap length on the diffraction phenomenon are presented.

TEŞEKKÜR

Öncelikle bana güvenerek akademik hayata atılmam için cesaretlendiren ve destek veren, aralıksız ve düzenli olarak değerli vaktini çalışmalarımıza ayıran, en önemlisi gerçek anlamda bana bu mesleği sevdiren değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇINAR' a çok teşekkür ederim. Emeginiz, anlayışınız ve sabrınız için sonsuz teşekkürler...

Yine çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, her koşulda güvenini ve desteğini benden esirgemeyen eş danışmanım Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY 'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca tez jürimde bulunan Prof. Dr. Gökhan UZGÖREN' e ve Prof. Dr. Ali ALKUMRU' ya ve bu çalışmanın özellikle nümerik kısmında değerli yardımları bulunan Dr. Özge YANAZ ÇINAR' a, yine bu çalışma sırasında yardımlarını gördüğüm Arş. Gör. Feray HACİVELİOĞLU ' na ve Dr. Ayşegül IŞIKYER' e teşekkür ederim.

Son olarakta sadece bu çalışma esnasında değil her zaman yanımda olan, varlığı ile bana güç veren hayatımın dönüm noktası nişanlım Arş. Gör. Hilmi ÖZTÜRK' e ve beni bugünlere getiren aileme özellikle de canım babama sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU	3
2.1. Wiener-Hopf Denkleminin Elde Edilişi	4
2.2. Wiener-Hopf Denkleminin Çözümü	13
2.3. Açılım Katsayılarının Belirlenmesi	21
3. SAÇILAN ALANIN ANALİZİ	24
4. SAYISAL SONUÇLAR	27
5. SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK DEĞERLENDİRMELER	36
KAYNAKLAR	37
EK-I	39
ÖZGEÇMİŞ	45

ŞEKİLLERLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Problemin Geometrisi	3
2.2 Kompleks α -düzlemi	6
4.1 $f = 50$ Hz, $k_a = 1.25$, $k_b = 2.5$ ve $k_l = 10$ değerleri için katsayıların genliklerinin kesim sayısı N e göre değişimi	29
4.2 $f = 50$ Hz ve $k_b = 2.5$ olduğunda farklı k_a değerleri için k_l ye göre yansıma katsayısının değişimi	30
4.3 $f = 50$ Hz ve $k_a = 1$ olduğunda farklı k_b değerleri için k_l ye göre yansıma katsayısının değişimi	31
4.4 $f = 50$ Hz ve $k_b = 2.5$ olduğunda farklı k_a değerleri için k_l ye göre iletim katsayısının değişimi	32
4.5 $f = 50$ Hz ve $k_a = 1$ olduğunda farklı k_b değerleri için k_l ye göre iletim katsayısının değişimi	33
4.6 $f = 50$ Hz ve farklı k_l değerleri için $k(b-a)$ ya göre yansıma katsayısının değişimi	34
4.7 $f = 50$ Hz ve farklı k_l değerleri için $k(b-a)$ ya göre iletim katsayısının değişimi	35

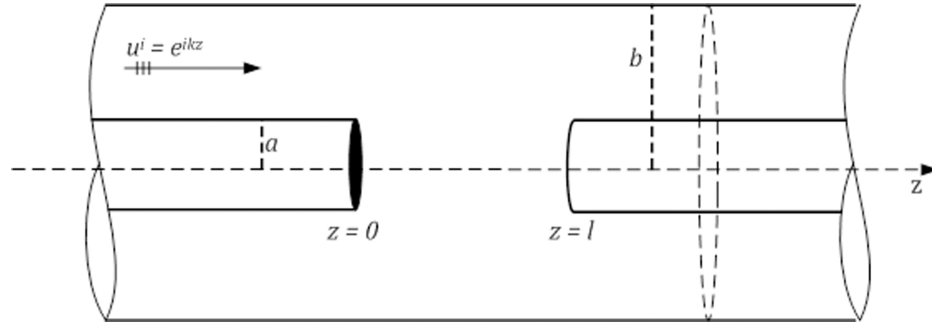
1 GİRİŞ

Yaşadığımız ortamda her geçen gün büyük bir ivmeyle araç sayısının artması ve insanlar açısından hava ulaşımının vazgeçilmez bir hale gelmesi ile hava taşımacılığının yoğunlaşması beraberinde ciddi bir çevresel sorun haline gelen gürültü kirliliğininide getirmiştir. Bu nedenle insanların maruz kaldıkları bu gürültü sorununun giderilebilmesi için çeşitli çalışmalar yapmak ihtiyacı duyulmuştur. Bu çalışmaların temelini koaksiyal dalga kılavuzlarında düzlemsel akustik dalgaların yayılımı ve iletimi oluşturmaktadır. Koaksiyal borulardan dışarıya iletilen gürültüyü azaltmak için kullanılan yöntemlerden biri " dağıtıcı(disipatif) " ve " reaktif " olarak iki grupta sınıflandırılan susturucular kullanmaktır. Disipatif susturucular, ses dalgasının ilerlediği borunun iç kısmını ses yutucu malzeme ile kaplayarak oluşturulan mekanizmalardır. Ses dalgaları yutucu malzemeye çarptıklarında sahip oldukları akustik enerji ısı enerjisine dönüşür böylece dışarıya iletilen akustik alanın azaltılması sağlanmış olur. Reaktif susturucular ise yutucu içermeyen bir veya birden fazla elemandan oluşurlar. Birden fazla sayıda eleman bulunduğu bu elemanlar paralel veya seri bağlanabilir. Bu tip susturucuların temel işlevi ses dalgasının ilerlediği boru içerisinde ani yüzey değişiklikleri ile karşılaşmasını sağlayarak belirli bir uyumsuzluk ortamı oluşturmaktır. Oluşturulan bu kavite rezonans mekanizması(susturucu kutu) sayesinde araba eksoz sistemindeki ses dalgalarının bir kısmının kaynağa doğru geri yansıdığı ve iletilen dalganın enerjisinde önemli ölçüde azalmalar olduğu görülmüştür[1]. En yaygın kullanılan reaktif susturucu elemanları ani genişleme odaları(expansion chamber) ve delikli(perfore) borulardır. Ani genişleme odaları (*e.g.* [4] – [9])

da kapsamlı olarak analiz edilmiştir. Yapılan çalışmalar esnasında kullanılacak susturucu çeşidinin yanı sıra sayısında dikkate alınması gereken ikinci bir unsur olduğu fark edilmiştir. Buradan yola çıkarak tek çeşit susturucunun kullanıldığı bir sistem integral dönüşümü yardımı ile çözülerek borunun dışına iletilen alanın azaltılmasında ne kadar etkili bir sonuç alındığı incelenmiştir. Birden fazla çeşitte susturucunun kullanıldığı sistemlerin analizi ise transfer matris yaklaşımı kullanılarak yapılmıştır[2]. Susturucular ile ilgili olarak gerekli bilgiler [3] te detaylı olarak ele alınmıştır. Bu çalışmada, sonsuz uzun dairesel bir borunun iç duvarındaki sonlu boşluğun sesin yayılımına etkisi incelenecektir. Düzlemsel akustik dalgaların sağladıkları Helmholtz denkleminin doğrudan Fourier dönüşümü uygulanarak problem bir Wiener-Hopf denkleminin çözümüne indirgenecektir. Söz konusu denklemin ikinci tipten Fredholm integral denklemleri aracılığı ile çözümü sonsuz bilinmeyenli, sonsuz boyutlu bir cebirsel lineer denklem sisteminin çözümüne gerektirecektir. Bu denklem sistemi nümerik olarak çözülerek yansıma ve iletim katsayıları hesaplanacaktır. Son olarakta dalga kılavuzunun genişliğinin ve iç duvardaki boşluğun uzunluğunun kırınım olayına etkisi nümerik sonuçlarla açığa çıkarılacaktır.

2 PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Zamana bağılılığı $e^{-i\omega t}$ şeklinde olan harmonik düzlemsel ses dalgasının Şekil 2.1 de gösterilmiş olan iç duvarında sonlu bir boşluğa sahip koaksiyal silindirik dalga kılavuzundan yayılımını göz önüne alalım. Burada içteki ve dıştaki silindirin dış yüzeylerinin rijid olduğu varsayılacaktır.



Şekil 2.1 Problemin Geometrisi

Probleme ilişkin toplam alanı değişik bölgelerde

$$u_T(\rho, z) = \begin{cases} u_2(\rho, z) & , \quad \rho < a, \quad z \in (0, l) \\ u^i(\rho, z) + u_1(\rho, z) & , \quad a < \rho < b, \quad z \in (-\infty, \infty) \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlamak uygun olacaktır. Yukarıdaki tanımda $u_1(\rho, z)$ ve $u_2(\rho, z)$ geçerli bölgelerde saçılan alanı belirtmektedir. u^i ise gelen dalga olup

$$u^i(\rho, z) = e^{ikz} \quad (2.1a)$$

ile verilmiştir. Ayrıca u_1 ve u_2 alanlarının belirlenmesinde gerekli olacak sınır ve süreklilik koşullarını problemin geometrisinden faydalananarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(b, z) = 0 \quad , \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) = 0 \quad , \quad z \in (-\infty, 0) \cup (l, \infty) \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, 0) = 0 \quad , \quad \rho \in (0, a) \quad (2.2c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, l) = 0 \quad , \quad \rho \in (0, a) \quad (2.2d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) = \frac{\partial}{\partial \rho} u_2(a, z) \quad , \quad z \in (0, l) \quad (2.2e)$$

ve

$$u_1(a, z) + u^i(a, z) = u_2(a, z) \quad , \quad z \in (0, l) \quad (2.2f)$$

2.1 Wiener-Hopf Denkleminin Elde Edilişi

Ses dalgaları Helmholtz denklemini sağladığından boru içindeki toplam alan için

$$\Delta u_T + k^2 u_T = 0 \quad (2.3)$$

yazılır. Bu denklem silindirik koordinatlarda

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_T(\rho, z) = 0 \quad (2.4)$$

olarak ifade edilir. Gelen dalganın ve problemin geometrisinin simetrik olmasından ötürü akustik alan her yerde ϕ den bağımsız olur, yani

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_T(\rho, z) = 0 \quad (2.5)$$

İlk olarak $a < \rho < b$, $-\infty < z < \infty$ bölgesinde inceleme yaparsak u^i Helmholtz denklemini sağladığından $u_1(\rho, z)$ saçılan alanı

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_1(\rho, z) = 0 \quad (2.5a)$$

Helmholtz denklemini sağlar. (2.5a) ile gösterilmiş bulunan denklemin z değişkenine göre Fourier dönüşümü alınırsa,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \right) e^{i\alpha z} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} e^{i\alpha z} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 u_1 e^{i\alpha z} dz = 0 \quad (2.6)$$

yazılır. Burada

$$\Phi(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 e^{i\alpha z} dz \quad (2.7)$$

olmak üzere (2.6) denklemi

$$u_1(\rho, z) = \mathcal{O}(e^{\pm ikz}) \quad , \quad z \rightarrow \pm\infty, \quad (2.8)$$

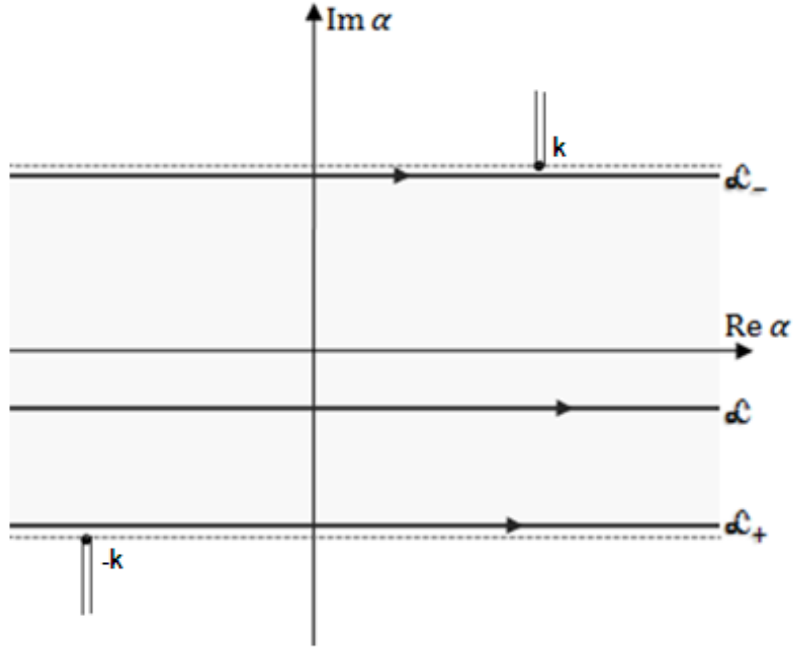
radasyon koşullarında dikkate alınarak

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right] \Phi(\rho, \alpha) = 0 \quad (2.9)$$

yazılır. Yukarıdaki denklemde

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (2.9a)$$

olup, karekök fonksiyonu Şekil 2.2 deki gibi kesilmiş kompleks α -düzleminde $K(0) = k$ olacak şekilde tanımlanmıştır.



Şekil 2.2 Kompleks α -düzlemi

(2.9) denkleminin çözümü,

$$\Phi(\rho, \alpha) = -A(\alpha) \frac{J_o(K\rho)}{KJ_1(Kb)} - B(\alpha) \frac{Y_o(K\rho)}{KY_1(Kb)} \quad (2.10)$$

şeklinde elde edilir. Burada $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ bilinmeyen spektral katsayılar, J_o ve J_1 sırasıyla sıfırcı ve birinci mertebeden birinci tip Bessel fonksiyonları, Y_o ve Y_1 ise sırasıyla sıfırcı ve birinci mertebeden ikinci tip Bessel fonksiyonlarıdır.

(2.7) ile tanımlı olan $\Phi(\rho, \alpha)$ yı

$$\Phi(\rho, \alpha) = \Phi_-(\rho, \alpha) + \Phi_1(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} \Phi_+(\rho, \alpha) \quad (2.11)$$

şeklinde de yazmak mümkündür. Burada

$$\Phi_{\pm}(\rho, \alpha) = \pm \int_0^{\pm\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.11a)$$

ve

$$\Phi_1(\rho, \alpha) = \int_0^l u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz. \quad (2.11b)$$

ile tanımlıdırlar. (2.8) radyasyon koşulları dikkate alınrsa söylenebilir ki, $\Phi_+(\rho, \alpha)$ $\text{Im } \alpha > \text{Im}(-k)$ ile tanımlı üst yarı düzlemde ve $\Phi_-(\rho, \alpha)$ $\text{Im } \alpha < \text{Im}(k)$ ile tanımlı alt yarı düzlemde $\alpha - n\pi$ analitik fonksiyonları iken, $\Phi_1(\rho, \alpha)$ $\alpha - n\pi$ bir tam fonksiyonudur. Bu durumda $\Phi(\rho, \alpha)$ fonksiyonu yalnızca bu iki bölgenin kesişimi olan şeritte regüler olur.

(2.2a) sınır koşulunun Fourier dönüşümü

$$\Phi'(b, \alpha) = 0 \quad (2.12)$$

olacağından

$$B(\alpha) = -A(\alpha) \quad (2.13)$$

bulunur. Burada $(')$, ρ değişkenine göre alınan türevi göstermektedir. Diğer taraftan sınır koşulu (2.2b) nin Fourier dönüşümü

$$\Phi'_-(a, \alpha) + e^{i\alpha l} \Phi'_+(a, \alpha) = 0 \quad (2.14)$$

olacağından (2.10), (2.11) ve (2.13) yardımıyla,

$$A(\alpha) = \Phi'_1(a, \alpha) \frac{J_1(Kb) Y_1(Kb)}{[J_1(Ka) Y_1(Kb) - J_1(Kb) Y_1(Ka)]} \quad (2.15)$$

bulunur. (2.13) ifadesi de dikkate alınarak (2.15) in (2.10) da yerine konmasıyla

$$\Phi_{-}(\rho, \alpha) + \Phi_{1}(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} \Phi_{+}(\rho, \alpha) = \frac{\Phi'_{1}(a, \alpha)}{K(\alpha)} \frac{[Y_o(K\rho) J_1(Kb) - J_o(K\rho) Y_1(Kb)]}{[J_1(Ka) Y_1(Kb) - J_1(Kb) Y_1(Ka)]} \quad (2.16)$$

elde edilir.

İkinci olarak $\rho < a$, $0 < z < l$ bölgesinde inceleme yaparsak $u_2(\rho, z)$ saçılan alanı bu bölgede

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_2(\rho, z) = 0 \quad (2.17)$$

Helmholtz denklemini sağlar. (2.17) nin her iki yanını $e^{i\alpha z}$ ile çarpılıp $0 < z < l$ arasında integre edilecek olursa,

$$\int_0^l \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \right) e^{i\alpha z} dz + \int_0^l \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} e^{i\alpha z} dz + \int_0^l k^2 u_2 e^{i\alpha z} dz = 0 \quad (2.18)$$

yazılır. (2.2c) ve (2.2d) sınır koşullarının da dikkate alınmasıyla,

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) \right] \Psi_1(\rho, \alpha) = i\alpha [e^{i\alpha l} f(\rho) - g(\rho)] \quad (2.19)$$

elde edilir. Burada

$$\Psi_1(\rho, \alpha) = \int_0^l u_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.20)$$

ve

$$f(\rho) = u_2(\rho, l) \quad , \quad g(\rho) = u_2(\rho, 0) \quad , \quad (2.21)$$

göstermektedir. Burada sağ-yanlı bir diferansiyel denklem söz konusudur. Bu denklem Green fonksiyonu yardımı ile çözülmek istenirse, (2.19) diferansiyel denkleminin $\rho = 0$ da sınırlı bir özel çözümüne ilişkin Green fonksiyonu

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) \right] \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \frac{1}{t} \delta(\rho - t) \quad , \quad \rho, t \in (0, a) \quad (2.22)$$

denklemini

$$\mathcal{G}(t+0, t, \alpha) - \mathcal{G}(t-0, t, \alpha) = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t+0, t, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t-0, t, \alpha) = \frac{1}{t} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(a, t, \alpha) = 0. \quad (2.25)$$

koşulları altında sağlar. (2.22) nin yukarıda verilen koşullar ile birlikte çözümü

$$\mathcal{Q}(\rho, t, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} J_o(K\rho) [J_1(Ka) Y_o(Kt) - J_o(Kt) Y_1(Ka)] & , \quad 0 \leq \rho \leq t \\ J_o(Kt) [J_1(Ka) Y_o(K\rho) - J_o(K\rho) Y_1(Ka)] & , \quad t \leq \rho \leq a \end{cases} \quad (2.26)$$

olmak üzere

$$\mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \frac{1}{J_1(Ka)} \mathcal{Q}(\rho, t, \alpha) \quad (2.27)$$

dır. Bu fonksiyon yardımı ile (2.19) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} \Psi_1(\rho, \alpha) = \frac{1}{J_1(Ka)} \{ & C(\alpha) J_o(K\rho) \\ & + i\alpha \int_0^a [e^{i\alpha l} f(t) - g(t)] \mathcal{Q}(t, \rho, \alpha) t dt \} \end{aligned} \quad (2.28)$$

elde edilir. Burada $C(\alpha)$ belirlenmesi gereken spektral bir katsayı, $f(t)$ ve $g(t)$

ise (2.21) ile verilmiş fonksiyonlardır. $C(\alpha)$ katsayısını belirlemek için (2.2e)

süreklilik koşulunda $0 < z < l$ aralığında Fourier dönüşümü alıp, (2.11) ve (2.20) eşitliklerinin de göz önünde bulundurursak

$$\Phi'_1(a, \alpha) = \Psi'_1(a, \alpha) \quad (2.29)$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$C(\alpha) = -\frac{\Phi'_1(a, \alpha)}{K(\alpha)} \quad (2.30)$$

bulunur. O halde (2.30) u (2.28) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \Psi_1(\rho, \alpha) = \frac{1}{KJ_1(Ka)} \{ & -J_0(K\rho) \Phi'_1(a, \alpha) \\ & + i\alpha K \int_0^a [e^{i\alpha l} f(t) - g(t)] \mathcal{Q}(t, \rho, \alpha) t dt \} \end{aligned} \quad (2.31)$$

olur. Yukarıdaki denklemde eşitliğin sol tarafı $\alpha - n$ bir tam fonksiyonudur.

Dolayısı ile sağ tarafında regüler olması gerekir. Ancak, $KJ_1(Ka)$ fonksiyonunun alt ve üst yarı α -düzlemindeki

$$\alpha_o = k \text{ and } \alpha_m = \sqrt{k^2 - K_m^2} \quad , \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.32a)$$

olmak üzere

$$K_m J_1(K_m a) = 0 \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32b)$$

ile verilen $\alpha = \pm \alpha_m$ sıfırları sağ tarafın basit kutuplarının mevcut olduğunu gösterir. Bunu engellemek için $\alpha = \pm \alpha_m$ noktalarındaki rezidüleri sıfır yapmak gerekir yani,

$$-J_o(K_m \rho) \Phi_1'(a, \pm \alpha_m) \pm i \alpha_m K_m \int_0^a [e^{\pm i \alpha_m t} f(t) - g(t)] \mathcal{Q}(t, \rho, \pm \alpha_m) t dt = 0 \quad (2.33)$$

olmalıdır. Buradan

$$\Phi_1'(a, \pm \alpha_m) = \mp \frac{\pi}{2} Y_1(K_m a) i \alpha_m K_m \int_0^a [e^{\pm i \alpha_m t} f(t) - g(t)] J_o(K_m t) t dt \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.33a)$$

ve

$$\Phi_1'(a, \pm k) = \pm \frac{ik}{a} \int_0^a [e^{\pm i k t} f(t) - g(t)] t dt \quad (2.33b)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde görünen $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları Dini koşulunu sağladıkları için

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m J_o(K_m t) \quad (2.34a)$$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_o(K_m t) \quad (2.34b)$$

olarak tam ortogonal fonksiyonlar kümesi cinsinden seriye açılabilirler [Sneddon, 1972]

Burada

$$\begin{bmatrix} f_o \\ g_o \end{bmatrix} = \frac{2}{a^2} \int_0^a \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} t dt \quad (2.35a)$$

ve

$$\begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} = \frac{2}{a^2 J_o^2(K_m a)} \int_0^a \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} J_o(K_m t) t dt \quad , \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.35b)$$

dir. $f(t)$ ve $g(t)$ nin bu seri açılımlarını (2.33a) ve (2.33b) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \Phi'_1(a, \pm\alpha_m) &= \mp \frac{\pi}{2} Y_1(K_m a) i\alpha_m K_m \frac{a^2 J_o^2(K_m a)}{2} [e^{\pm i\alpha_m l} f_m - g_m] \\ &= \pm \frac{a}{2} J_o(K_m a) i\alpha_m [e^{\pm i\alpha_m l} f_m - g_m] \quad , \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.36)$$

ve

$$\Phi'_1(a, \pm k) = \pm \frac{ika}{2} [e^{\pm ikl} f_0 - g_0] \quad (2.37)$$

olarak belirlenmiş olur. Son olarak da (2.2f) süreklilik koşulunun sonlu $0 < z < l$ aralığında Fourier dönüşümünü dikkate alırsak

$$\Phi_1(a, \alpha) = \Psi_1(a, \alpha) + \frac{1 - e^{i(k+\alpha)l}}{i(k+\alpha)} \quad (2.38)$$

eşitliği yazılır. (2.16) ve (2.31) denklemlerinde $\rho = a$ yazılıp (2.38) eşitliğide dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{a \pi K^2 J_1(Ka) [J_1(Ka) Y_1(Kb) - J_1(Kb) Y_1(Ka)]} + \Phi_-(a, \alpha) + e^{i\alpha l} \Phi_+(a, \alpha) \\ & = \frac{-1 + e^{i(k+\alpha)l}}{i(k+\alpha)} - \frac{i\alpha}{Ka J_1(Ka)} \int_0^a [e^{i\alpha l} f(t) - g(t)] J_o(Kt) t dt \end{aligned} \quad (2.39)$$

elde edilir. Burada da bulunan $f(t)$ ve $g(t)$ ifadelerinin seri açılımlarını yerine yazıp

$$\int_0^a J_o(w_1\rho) J_o(w_2\rho) \rho d\rho = \frac{a}{w_1^2 - w_2^2} [w_1 J_o(w_2a) J_1(w_1a) - w_2 J_o(w_1a) J_1(w_2a)] \quad , w_1, w_2 = sbt$$

Lommel integralinin deęerini de göz önünde bulundurursak

$$M(\alpha) = \frac{J_1(Ka)}{J_1(Kb)} [J_1(Ka) Y_1(Kb) - J_1(Kb) Y_1(Ka)] \quad (2.40)$$

yazılır ve (2.34a, b), (2.39) da dikkate alınırsa $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında geçerli olan aŗaęıdaki Modifiye Wiener-Hopf denklemi(MWHE) elde edilir:

$$\begin{aligned} \Phi_-(a, \alpha) + e^{i\alpha l} \Phi_+(a, \alpha) - \frac{2}{\pi a} \frac{\Phi'_1(a, \alpha)}{(k^2 - \alpha^2) M(\alpha)} \\ = \frac{[e^{i(\alpha+k)l} - 1]}{i(\alpha + k)} - \frac{i\alpha (e^{i\alpha l} f_o - g_o)}{(k^2 - \alpha^2)} \\ + i\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^{i\alpha l} f_m - g_m)}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} J_o(K_m a) \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.2 Wiener-Hopf Denkleminin  z m 

[11] deki benzer prosed rleri uygulayarak (2.41) deki MWHE ni ikinci tipten Fredholm integrallerine indirgemeye  alışalım. İlk olarak iŗimizi kolaylaŗtırması a ısından

$$U(\alpha) = \Phi_+(a, \alpha) - \frac{e^{ikl}}{i(k + \alpha)} + \frac{i\alpha}{(k^2 - \alpha^2)} f_o - i\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_o(K_m a)}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)}, \quad (2.42a)$$

$$L(\alpha) = \Phi_-(a, \alpha) + \frac{1}{i(k + \alpha)} - \frac{i\alpha}{(k^2 - \alpha^2)} g_o + i\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_o(K_m a)}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} \quad (2.42b)$$

yazalım. Şimdi (2.41) denkleminin her iki tarafını

$$iM_-(\alpha)(k-\alpha)\sqrt{\frac{\pi a}{2}}$$

ile çarparsak

$$\begin{aligned} iM_-(\alpha)(k-\alpha)\sqrt{\frac{\pi a}{2}}\Phi_-(a, \alpha) + iM_-(\alpha)(k-\alpha)\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{i\alpha l}U(\alpha) - \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\frac{i\Phi'_1(a, \alpha)}{(k+\alpha)M_+(\alpha)} \\ = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}}\frac{M_-(\alpha)(k-\alpha)}{(\alpha+k)} - \sqrt{\frac{\pi a}{2}}\alpha\frac{M_-(\alpha)g_o}{(k+\alpha)} \\ + (k-\alpha)\sqrt{\frac{\pi a}{2}}\alpha M_-(\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m}{(\alpha^2-\alpha_m^2)}J_o(K_m a) \quad (2.43) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $M_-(\alpha) = M_+(-\alpha)$ ve $M_+(\alpha)$, $M(\alpha)$ fonksiyonunun Wiener-Hopf faktörizasyonu sonucunda meydana gelmiş olan sırasıyla kompleks α -düzleminin üst ($\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$) ve alt ($\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha)$) yarılarında regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır. (Bkz. Ek 1). Yukarıdaki denklemde eşitliğin sol tarafındaki ikinci terim ile sağ tarafındaki terimlerin dekompozisyonları yapılmalıdır. İlk olarak

$$f(\alpha) = iM_-(\alpha)(k-\alpha)\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{i\alpha l}U(\alpha) \quad (2.44)$$

ifadesinin dekompozisyonunu ele alırsak

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_+} \frac{i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{i\tau l}M_-(\tau)(k-\tau)U(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.45a)$$

$$f_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_-} \frac{i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{i\tau l}M_-(\tau)(k-\tau)U(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.45b)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$-\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{M_-(\alpha)(k - \alpha)}{(\alpha + k)} \quad (2.46)$$

fonksiyonunun dekompozisyonunu yaparsak $\alpha = -k$ basit kutup noktası için rezidüyü dikkate alarak

$$f_+(\alpha) = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{M_+(k)2k}{(\alpha + k)} \quad (2.47a)$$

$$f_-(\alpha) = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{1}{(\alpha + k)} [M_-(\alpha)(k - \alpha) - M_+(k)2k] \quad (2.47b)$$

bulunur.

$$-\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \alpha \frac{M_-(\alpha)g_o}{(k + \alpha)} \quad (2.48)$$

fonksiyonunun tekil noktasıda $\alpha = -k$ dır. O halde

$$f_+(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{kM_+(k)g_0}{(k + \alpha)} \quad (2.49a)$$

$$f_-(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{g_0}{(k + \alpha)} [-\alpha M_-(\alpha) - kM_+(k)] \quad (2.49b)$$

olur. Son olarakta

$$(k - \alpha) \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \alpha M_-(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} J_o(K_m a) \quad (2.50)$$

fonksiyonunun $\alpha = \pm \alpha_m$ tekil noktaları için dekompozisyonu

$$f_+(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_+(\alpha_m) \alpha_m (k + \alpha_m)}{(\alpha + \alpha_m) 2\alpha_m} J_o(K_m a) g_m \quad (2.51a)$$

$$f_-(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_o(K_m a)}{(\alpha + \alpha_m)} \left[\frac{\alpha M_-(\alpha)(k - \alpha)}{(\alpha - \alpha_m)} - \frac{(k + \alpha_m) M_+(\alpha_m) \alpha_m}{2\alpha_m} \right] \quad (2.51b)$$

bulunur. Bulduğumuz bu ifadeleri (2.43) te yerine yazıp Liouville teoremini uygularsak aşağıdaki birinci integral denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} M_-(\alpha)(k - \alpha) L(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_-} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau)(k - \tau) U(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \\ &\quad - 2ik \frac{M_+(k)}{(k + \alpha)} + ik \frac{M_+(k)}{(k + \alpha)} g_o \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_o(K_m a)}{(\alpha + \alpha_m)} M_+(\alpha_m)(k + \alpha_m) \end{aligned} \quad (2.52)$$

İkinci integral denklemi elde etmek için bu sefer (2.41) denklemini

$$iM_+(\alpha)(k + \alpha) \sqrt{\frac{\pi a}{2}} e^{-i\alpha l} \quad (2.53)$$

ile çarparsak

$$\begin{aligned} &i \sqrt{\frac{\pi a}{2}} M_+(\alpha)(k + \alpha) L(\alpha) e^{-i\alpha l} - \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{i \Phi_1'(a, \alpha) e^{-i\alpha l}}{(k - \alpha) M_-(\alpha)} + i \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \Phi_+(a, \alpha) M_+(\alpha)(k + \alpha) \\ &= \sqrt{\frac{\pi a}{2}} M_+(\alpha) e^{ikl} - \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \alpha \frac{M_+(\alpha) f_o}{(\alpha - k)} - (k + \alpha) \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \alpha M_+(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} J_o(K_m a) \end{aligned} \quad (2.54)$$

denklemini elde ederiz. Yukarıdaki işlemlere benzer olarak (2.54) denkleminin sol tarafındaki ilk terim ve sağ taraftaki son iki terimin dekompozisyonları yapılmalıdır.

$$i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}M_+(\alpha)(k+\alpha)L(\alpha)e^{-i\alpha l} \quad (2.55)$$

fonksiyonunun dekompozisyonu

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_+} \frac{i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{-i\tau l}M_+(\tau)(k+\tau)L(\tau)}{(\tau-\alpha)}d\tau \quad (2.55a)$$

$$f_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_-} \frac{i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{-i\tau l}M_+(\tau)(k+\tau)L(\tau)}{(\tau-\alpha)}d\tau \quad (2.55b)$$

integralleridir.

$$-\sqrt{\frac{\pi a}{2}}\alpha \frac{M_+(\alpha)f_o}{(\alpha-k)} \quad (2.56)$$

fonksiyonunun ise $\alpha = k$ noktasında basit kutbunu dikkate alarak dekompozisyonu yaparsak

$$f_+(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{f_0}{(\alpha-k)} [kM_+(k) - \alpha M_+(\alpha)] \quad (2.57a)$$

$$f_-(\alpha) = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{k f_0 M_+(k)}{(\alpha-k)} \quad (2.57b)$$

bulunur. Son olarak

$$-(k+\alpha)\sqrt{\frac{\pi a}{2}}\alpha M_+(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} J_o(K_m a) \quad (2.58)$$

fonksiyonunun $\alpha = \pm\alpha_m$ tekil noktalarındaki rezidülerinden

$$f_+(\alpha) = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_o(K_m a) f_m}{\alpha - \alpha_m} \left[\frac{\alpha M_+(\alpha) (k + \alpha)}{\alpha + \alpha_m} - \frac{M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m)}{2} \right] \quad (2.59a)$$

$$f_-(\alpha) = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_o(K_m a) f_m M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m)}{2(\alpha - \alpha_m)} \quad (2.59b)$$

şeklinde bulunur. Yine bulduğumuz bu ifadeleri (2.54) te yerine yazarak Liouville teoremini uygularsak aşağıdaki ikinci integral denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} M_+(\alpha) (k + \alpha) U(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_+} \frac{e^{-i\tau l} M_+(\tau) (k + \tau) L(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \\ &+ ik \frac{M_+(k)}{(k - \alpha)} f_o - \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_o(K_m a)}{(\alpha - \alpha_m)} M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m) \end{aligned} \quad (2.60)$$

(2.52) ve (2.60) denklemlerindeki

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_-} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) (k - \tau) U(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.61)$$

ve

$$I_2(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_+} \frac{e^{-i\tau l} M_+(\tau) (k + \tau) L(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.62)$$

integrallerini (2.42a) ve (2.42b) denklemlerini hesaba katarak hesaplayalım. $I_1(\alpha)$

integralinde $e^{i\tau l}$, $l > 0$ terimi dikkate alınarak Jordan Lemmasını uygulamak için

$\mathcal{L}_-$ eğrisi uygun şekilde üstten kapatılıp integral aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
I_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_-} \frac{e^{i\tau l} M(\tau) (k - \tau) U(\tau)}{M_+(\tau) (\tau - \alpha)} d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_-} \frac{J_1(Ka) [J_1(Ka) Y_1(Kb) - J_1(Kb) Y_1(Ka)] (k - \tau) U(\tau) e^{i\tau l}}{J_1(Kb) M_+(\tau) (\tau - \alpha)} d\tau
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Yukarıdaki denklemde integrantta bulunan $J_1(Kb)$ fonksiyonunun $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ yarı düzleminde

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \xi_m^2} \quad , \quad m = 1, 2, \dots \tag{2.64a}$$

olmak üzere

$$J_1(\xi_m b) = 0 \quad , \quad m = 1, 2, \dots \tag{2.64b}$$

ile verilen $\tau = \beta_m$ noktalarında basit sıfırları mevcuttur. Rezidü teoremini uygulayarak bu basit kutupların rezidü katkısını hesaplırsak

$$D_n = \frac{\xi_n (k - \beta_n) J_1^2(\xi_n a) Y_1(\xi_n b)}{\beta_n M_+(\beta_n) J_o(\xi_n b)} e^{i\beta_n l}. \tag{2.65a}$$

olmak üzere

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\beta_n)}{(\alpha - \beta_n)} D_n \tag{2.65b}$$

bulunur. $I_2(\alpha)$ integralinde ise $e^{-i\tau l}$, $l > 0$ terimi dikkate alınarak Jordan Lemmasını uygulayabilmek için $\mathcal{L}_+$ eğrisi uygun şekilde alttan kapatılıp integral aşağıdaki şekilde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
I_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_+} \frac{M(\tau)(k+\tau)L(\tau)e^{-i\tau l}}{M_-(\tau)(\tau-\alpha)} d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_+} \frac{J_1(Ka)[J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)](k+\tau)L(\tau)e^{-i\tau l}}{J_1(Kb)M_-(\tau)(\tau-\alpha)} d\tau
\end{aligned} \tag{2.66}$$

bu sefer integranttaki $J_1(Kb)$ fonksiyonunun $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ yarı düzleminde $\tau = -\beta_m$ noktalarında basit sıfırları mevcuttur. Benzer şekilde Rezidü teoremini uygulayarak bu basit kutupların rezidü katkısını hesaplırsak

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(-\beta_n)}{(\alpha + \beta_n)} D_n \tag{2.67}$$

elde edilir. Şimdi bulduğumuz bu integral değerlerini (2.52) ve (2.60) denklemlerinde yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}
M_-(\alpha)(k-\alpha)L(\alpha) &= \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\beta_n)}{(\alpha - \beta_n)} D_n - 2ik \frac{M_+(k)}{(k+\alpha)} \\
&+ ik \frac{M_+(k)}{(k+\alpha)} g_o + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_o(K_m a)}{(\alpha + \alpha_m)} M_+(\alpha_m)(k + \alpha_m)
\end{aligned} \tag{2.68}$$

ve

$$\begin{aligned}
M_+(\alpha)(k+\alpha)U(\alpha) &= \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(-\beta_n)}{(\alpha + \beta_n)} D_n + ik \frac{M_+(k)}{(k-\alpha)} f_o \\
&- \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_o(K_m a)}{(\alpha - \alpha_m)} M_+(\alpha_m)(k + \alpha_m)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

bulunmuş olur. Elde ettiğimiz (2.68) ve (2.69) denklemlerinden $L(\alpha)$ ve $U(\alpha)$ yı çekip (2.41) de yerine yazarsak MWHE nin çözümü

$$\begin{aligned}
\Phi'_1(a, \alpha) = & + \frac{\pi a}{2b} (k + \alpha) M_+(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\beta_n)}{(\alpha - \beta_n)} D_n \\
& + \frac{\pi a}{2b} (k - \alpha) M_-(\alpha) e^{ial} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(-\beta_n)}{(\alpha + \beta_n)} D_n \\
& - \frac{i\pi ka}{2} M_+(k) [M_+(\alpha) (2 - g_o) - M_-(\alpha) e^{ial} f_o] \\
& + \frac{i\pi a}{4} (k + \alpha) M_+(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_o(K_m a)}{(\alpha + \alpha_m)} M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m) \\
& - \frac{i\pi a}{4} (k - \alpha) M_-(\alpha) e^{ial} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_o(K_m a)}{(\alpha - \alpha_m)} M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m) \quad (2.70)
\end{aligned}$$

olur.

2.3 Açılım Katsayılarının Belirlenmesi

$\Phi'_1(a, \alpha)$ fonksiyonunun $f_o, g_o, f_m, g_m, U(\beta_n)$ ve $L(-\beta_n)$ bilinmeyen sabitleri

bulunur. f_m ve g_m bilinmeyen sabitlerini bulmak için (2.70) denkleminde sırasıyla

$\alpha = \pm\alpha_r$ yazarsak ve bulduğumuz bu ifadeleri (2.36) da dikkate alırsak

$$\begin{aligned}
f_r = & \frac{2i}{a\alpha_r J_o(K_r a)} \left[\frac{\pi a}{2b} (k + \alpha_r) M_+(\alpha_r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(-\beta_n)}{(-\alpha_r + \beta_n)} D_n \right. \\
& \left. + \frac{i\pi ka}{2} M_+(k) M_+(\alpha_r) f_o + \frac{i\pi a}{4} (k + \alpha_r) M_+(\alpha_r) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_o(K_m a)}{(\alpha_r + \alpha_m)} M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m) \right] \quad (2.71)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g_r = & \frac{2iM_+(\alpha_r)}{a\alpha_r J_o(K_r a)} \left[\frac{\pi a}{2b} (k + \alpha_r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\beta_n)}{(\alpha_r - \beta_n)} D_n \right. \\
& \left. - \frac{i\pi k a}{2} M_+(k) (2 - g_0) + \frac{i\pi a}{4} (k + \alpha_r) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_o(K_m a)}{(\alpha_r + \alpha_m)} M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m) \right]
\end{aligned} \tag{2.72}$$

elde edilir. Benzer şekilde f_o ve g_o sabitlerini bulmak için bu sefer (2.70) de $\alpha = \pm k$ yazılarak (2.37) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
f_0 \left[-\frac{1}{2} - \frac{\pi M_+^2(k)}{2} \right] + g_0 \frac{a^2}{2b^2} e^{ikl} \\
= -\frac{(b^2 - a^2)}{b^2} e^{ikl} + M_+(k) \frac{\pi}{ib} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(-\beta_n)}{(-k + \beta_n)} D_n \\
+ M_+(k) \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_o(K_m a)}{(k + \alpha_m)} M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m) \tag{2.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0 \left[-\frac{1}{2} - \frac{\pi M_+^2(k)}{2} \right] + f_0 \frac{a^2}{2b^2} e^{ikl} \\
= M_+(k) \frac{\pi}{2} \left[-2M_+(k) + \frac{2}{ib} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\beta_n)}{(k - \beta_n)} D_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_o(K_m a)}{(k + \alpha_m)} M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m) \right]
\end{aligned} \tag{2.74}$$

bulunur. $U(\beta_n)$ ve $L(-\beta_n)$ bilinmeyenleri için ise (2.68) de $\alpha = -\beta_r$ ve (2.69)

denkleminde de $\alpha = \beta_r$ yazarsak

$$\begin{aligned}
L(-\beta_r) = & \left[-\frac{1}{bM_+(\beta_r)(k + \beta_r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\beta_n)}{(\beta_r + \beta_n)} D_n - \frac{2ikM_+(k)}{(k - \beta_r)M_+(\beta_r)(k + \beta_r)} \right. \\
& \left. + \frac{ikM_+(k)g_0}{(k^2 - \beta^2)M_+(\beta_r)} + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_o(K_m a) M_+(\alpha_m) (k + \alpha_m)}{(-\beta_r + \alpha_m) M_+(\beta_r) (k + \beta_r)} \right] \tag{2.75}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 U(\beta_r) = & \left[\frac{1}{bM_+(\beta_r)(k+\beta_r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(-\beta_n)}{(\beta_r+\beta_n)} D_n \right. \\
 & \left. + \frac{ikM_+(k)f_0}{(k-\beta_r)M_+(\beta_r)(k+\beta_r)} - \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_o(K_m a) M_+(\alpha_m)(k+\alpha_m)}{(\beta_r-\alpha_m)M_+(\beta_r)(k+\beta_r)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.76}$$

bulunmuş olur.

3 SAÇILAN ALANIN ANALİZİ

$a < \rho < b$, $z > l$ bölgesindeki iletilen alanı bulmak için (2.11) ve (2.11a) eşitliklerini göz önüne alırsak $\Phi_+(\rho, \alpha)$ nın ters Fourier dönüşümünü almak gerekir.

$$u_1(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \Phi'_1(a, \alpha) \frac{K[J_1(Kb)Y_o(K\rho) - J_o(K\rho)Y_1(Kb)]}{K^2[J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)]} e^{-i\alpha z} d\alpha \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \Phi_-(\rho, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \Phi_1(\rho, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (3.1)$$

Burada L , $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ şeridi boyunca reel α eksenine paralel olan bir doğrudur. $e^{-i\alpha z}$ teriminden dolayı Jordan lemmasını uygulayabilmek için L eğrisini aşağıdan kapatmak uygun olacaktır. Bu durumda $\Phi_-(\rho, \alpha)$ ve $\Phi_1(\rho, \alpha)$ fonksiyonları kapatılan bu bölgede regüler olacakları için Rezidü teoremi uyarınca integralleri sıfır olacaktır. İntegrandın alt yarı düzlemdeki kutupları yalnızca K^2 fonksiyonundan dolayı $\alpha = -k$ noktası ve

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \chi_m^2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.2a)$$

olmak üzere

$$J_1(\chi_m a) Y_1(\chi_m b) - J_1(\chi_m b) Y_1(\chi_m a) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.2b)$$

ile verilen $\alpha = -\gamma_m$ noktalarıdır. Bunların rezidü katkısından

$$u_1(\rho, z) = -\frac{ia}{k(b^2 - a^2)} \Phi'_1(a, -k) e^{ikz} - i \frac{1}{\chi_m \gamma_m} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi'_1(a, -\gamma_m) \chi_m V(\rho, \chi_m) e^{i\gamma_m z}}{aH(\chi_m) - bB(\chi_m)} \quad (3.3)$$

elde edilir. Burada $V(\rho, \chi_m)$, $H(\chi_m)$ ve $B(\chi_m)$ ile

$$\begin{aligned} V(\rho, \chi_m) &= J_1(\chi_m b) Y_o(\chi_m \rho) - J_o(\chi_m \rho) Y_1(\chi_m b) \\ H(\chi_m) &= J_o(\chi_m a) Y_1(\chi_m b) - J_1(\chi_m b) Y_o(\chi_m a) \\ B(\chi_m) &= J_o(\chi_m b) Y_1(\chi_m a) - J_1(\chi_m a) Y_o(\chi_m b) \end{aligned} \quad (3.3a)$$

yazılmıştır.. Sonuç olarak iletim katsayısı

$$T = -\frac{ia}{k(b^2 - a^2)} \Phi'_1(a, -k) \quad (3.4)$$

bulunur. Yansıyan alanı bulmak için ise $a < \rho < b$, $z < 0$ bölgesi için $\Phi_-(\rho, \alpha)$

nın ters Fourier dönüşümünü almalıyız, yani

$$\begin{aligned} u_1(\rho, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \Phi'_1(a, \alpha) \frac{K[J_1(Kb)Y_o(K\rho) - J_o(K\rho)Y_1(Kb)]}{K^2[J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)]} e^{-i\alpha z} d\alpha. \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \Phi_-(\rho, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha. - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} e^{i\alpha l} \Phi_+(\rho, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Yukarıdakine benzer bir mantıkla $\mathcal{L}$ eğrisinin uygun olarak üstten kapatılması ile integrandın üst yarı düzlemde kutupları K^2 fonksiyonunun basit sıfırı olan $\alpha = k$ noktası ve $[J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)]$ fonksiyonunun $\alpha = \gamma_m$ noktalarındaki basit sıfırları olacaktır. Bu durumda Rezidü teoremini kullanırsak

$$u_1(\rho, z) = -\frac{ia}{k(b^2 - a^2)} \Phi'_1(a, k) e^{ikz} + i \frac{1}{\chi_m \gamma_m} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi'_1(a, \gamma_m) \chi_m V(\rho, -\chi_m) e^{-i\gamma_m z}}{aH(a, b, -\chi_m) - bB(a, b, -\chi_m)} \quad (3.6)$$

şeklindedir buna göre yansıma katsayısı

$$R = -\frac{ia}{k(b^2 - a^2)}\Phi_1'(a, k). \quad (3.7)$$

olur.

4 SAYISAL SONUÇLAR

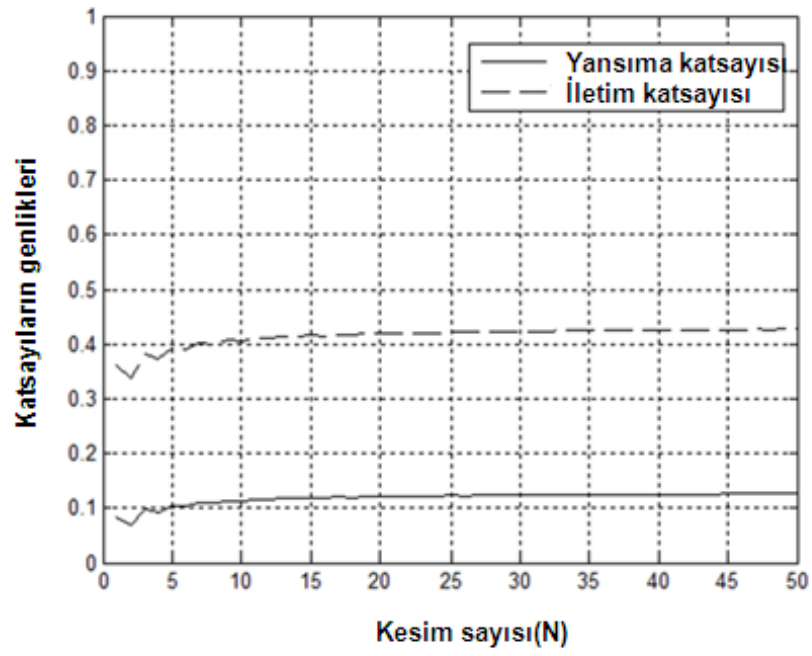
Bu bölümde, ele aldığımız geometride içteki ve dıştaki dairesel kesitli silindirik boruların yarıçaplarının ve iç duvardaki sonlu boşluğun uzunluğunun temel mod için yansıyan ve iletilen alan üzerindeki etkilerini gösteren bazı sayısal sonuçlar sunulmuştur. Bunun için öncelikle bisection yöntemi kullanılarak (2.31b), (2.64b) ve (3.2b) denklemleri ile verilmiş olan α_m , β_m ve γ_m köklerinin sayısal değerleri hesaplanmıştır. Daha sonra bu kökler kullanılarak, problemin çözümünde ortaya çıkan sonsuz boyutlu lineer denklem sistemi Şekil.3' te yapılan yakınsaklık araştırması yardımı ile belirli bir sayıda kesilerek Gauss-Elimination yöntemi ile çözülmüş ve bilinmeyen katsayılar hesaplanmıştır. Son olarakta, bu katsayılardan faydalanılarak yansıma ve iletim katsayıları bulunmuştur.

Şekil 4.1, yansıma ve iletim katsayılarının genliklerinin kesim sayısı N 'ye göre değişimini göstermektedir. Açıkta ki $N \geq 27$ olduğunda yansıma ve iletim katsayılarının genliklerinde çok az değişim görülmektedir. Bu durum göz önünde bulundurularak katsayıların bulunması için oluşturulan sistemde ve bundan sonraki grafiklerde $N = 30$ alınmıştır.

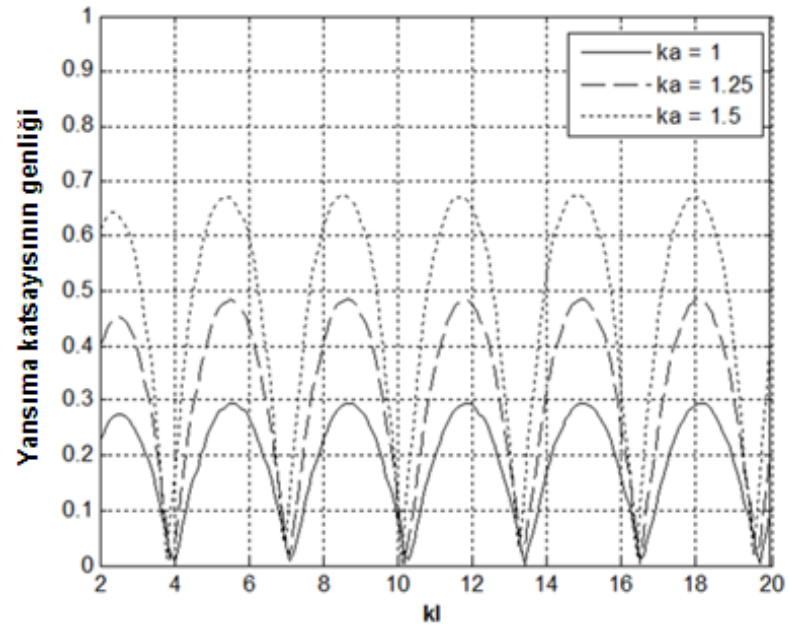
Şekil 4.2 ve Şekil 4.3' te temel mod için yansıma katsayısının genliğinin farklı ka ve kb değerleri için kl ' ye bağlı olarak değişimi incelenmiştir. Grafiklerden görüldüğü gibi kl arttıkça yansıma katsayısının genliği salınım yapmaktadır. Bazı özel değerler için ise (örneğin; $kl = 4, ka = 1, kb = 2.5$ için $|R| \simeq 0.0064$ ve $kl = 7.1, ka = 1, kb = 2.5$ için $|R| \simeq 0.0065$) yansıyan alanın oldukça az olduğu görülmektedir. Bu durum motorun az güç tüketerek çalışması anlamına geldiğinden bu değerler mühendisler için önemlidir.

Şekil 4.4 ve Şekil 4.5’ te ise temel mod için iletim katsayısının genliğinin farklı k_a ve k_b değerleri için kl ’ ye bağlı olarak değişimi incelenmiştir. Diğer grafiklere benzer olarak yine kl değeri arttıkça iletim katsayısının genliği salınım yapmaktadır. Ayrıca $kl = 6.3, k_a = 1, k_b = 2.5$ için $|T| \simeq 0.2237$ ve $kl = 12.6, k_a = 1, k_b = 2.5$ için $|T| \simeq 0.2237$ olduğu dikkate alınması gereken noktalardır.

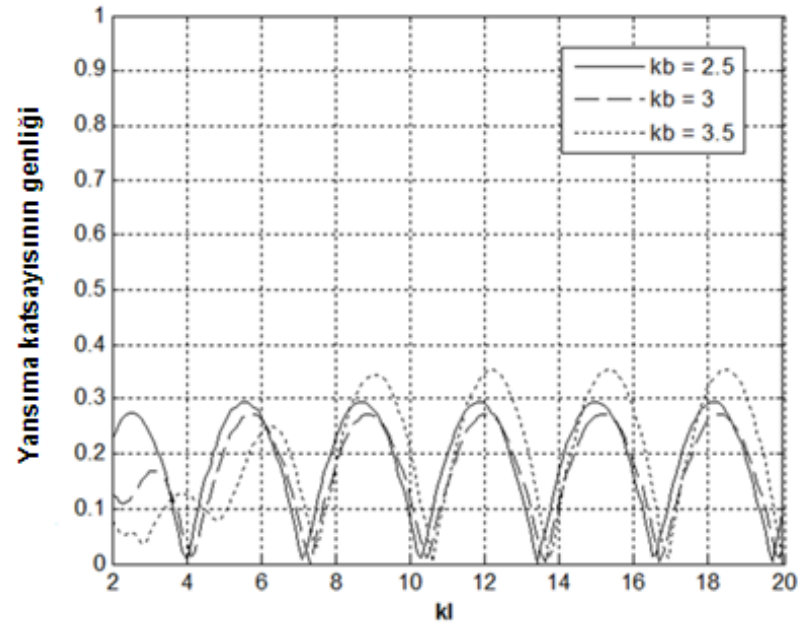
Son olarak, yansıma ve iletim katsayılarının genliğinin $k(b-a)$ ya göre değişimi incelenmiştir. Grafiklerden görülüyor ki, silindirik borunun kesiti arttıkça her iki katsayının genliğide azalmaktadır. Bunun sebebi ise kesitin artması ile temel moddan farklı olarak diğer modlarında yayılmaya başlaması ve temel mod tarafından taşınan enerjinin bir kısmının diğer modlar tarafından taşınmaya başlamasıdır.



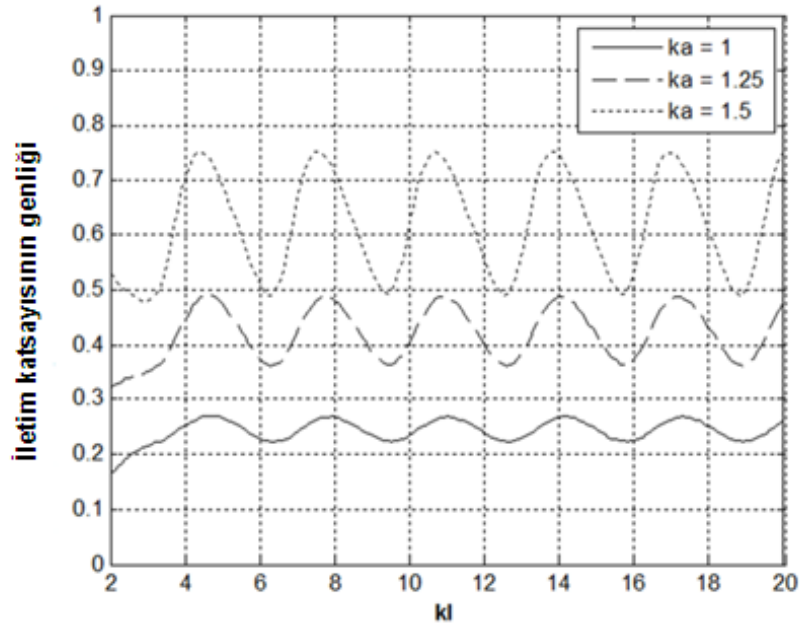
Şekil 4.1 $f=50$ Hz, $k_a = 1.25$, $k_b = 2.5$ ve $k_l = 10$ değerleri için katsayıların genliklerinin kesim sayısı N e göre değişimi



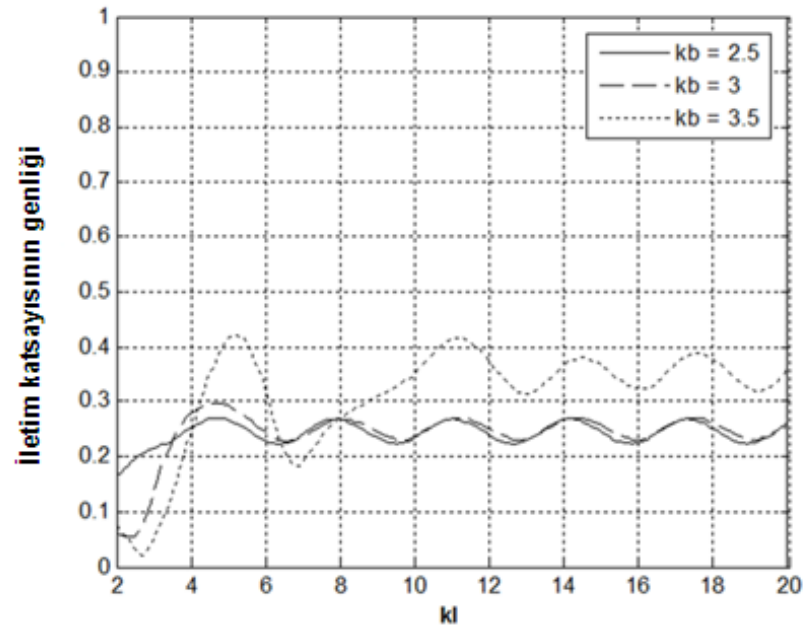
Şekil 4.2 $f=50$ Hz ve $kb=2.5$ olduğunda farklı ka değerleri için kl ye göre yansıma katsayısının değişimi



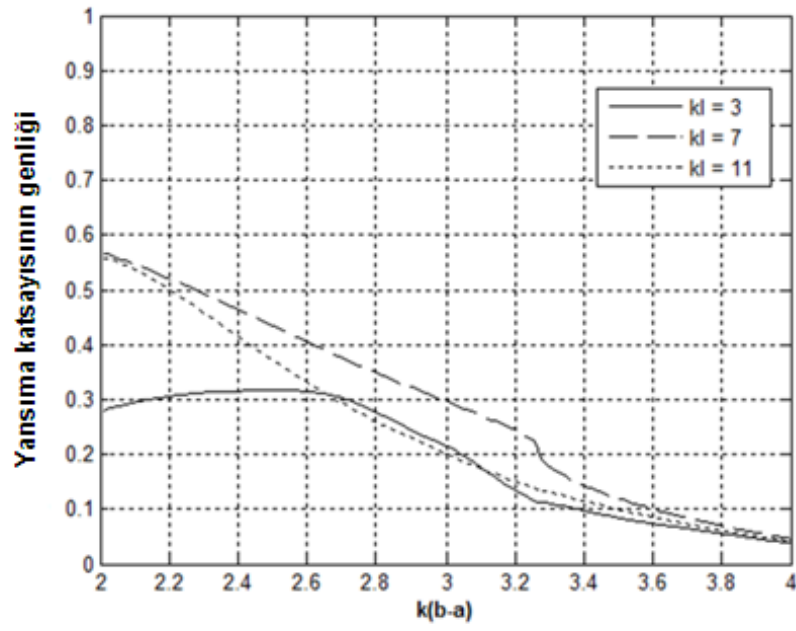
Şekil 4.3 $f=50$ Hz ve $k_a=1$ olduğunda farklı k_b değerleri için kl ye göre yansıma katsayısının değişimi



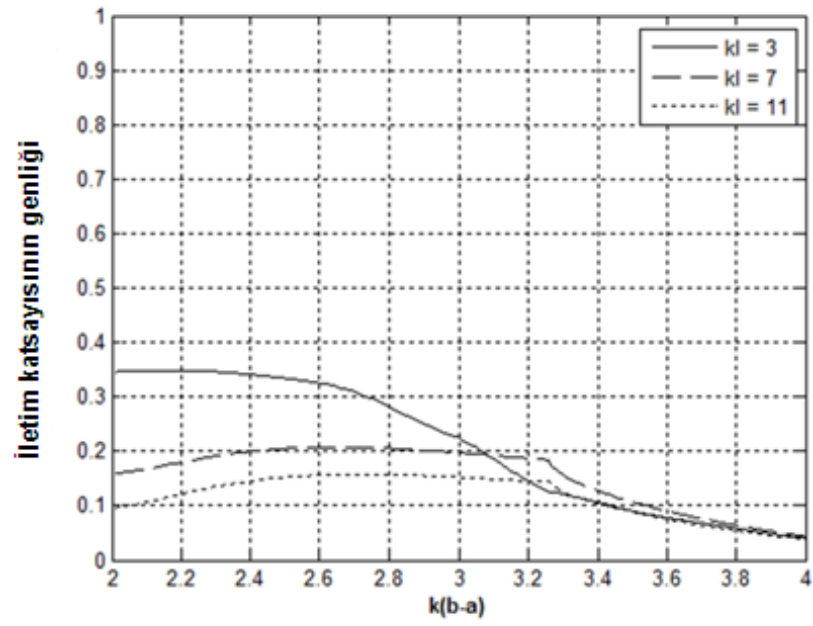
Şekil 4.4 $f=50$ Hz ve $k_b = 2.5$ olduğunda farklı ka değerleri için kl ye göre iletim katsayısının değişimi



Şekil 4.5 $f=50$ Hz ve $k_a=1$ olduğunda farklı k_b değerleri için k_l ye göre iletim katsayısının değişimi



Şekil 4.6 $f=50$ Hz ve farklı kl değerleri için $k(b-a)$ ya göre yansıma katsayısının değişimi



Şekil 4.7 $f=50$ Hz ve farklı kl değerleri için $k(b-a)$ ya göre iletim katsayısının değişimi

5 SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK DEĞERLENDİRMELER

Bu çalışmada, koaksiyal borularda genişleme odası veya yutucu malzemeler kullanmak yerine içteki boruda bulunacak bir boşluğun sesin yayılımına etkisi incelenmiş ve bazı nümerik sonuçlar ortaya konmuştur. Söz konusu problem doğrudan Fourier dönüşümü uygulanarak Modifiye Wiener-Hopf denklemine indirgenmiş olup daha sonra bu denklem ikinci tipten Fredholm integral denklemleri aracılığı ile çözülmüştür. Temel mod için hem yansıma hem de iletim katsayıları sonsuz sayıda bilinmeyen katsayılar bakımından açık olarak ifade edilmiştir. Son olarakta 4. Bölümde elde edilen grafiklerle gürültüyü azaltmak için kullanılabilcek bazı özel a , b ve l değerleri verilmiştir.

Bu çalışmada yapılan analizden yola çıkılarak, silindirik borunun iç kısmının akışkanlı olması ve sonlu boşlukta delikli bir tüpün bulunması veya borunun duvarlarının farklı tipte akustik malzemelerle kaplı olmasına ilişkin incelemeler yapmak mümkündür. Akışkan içeren geometride problem oldukça kompleks bir hal alacaktır ve dikkatlice analiz edilmesi gerekecektir. Duvarların farklı akustik malzemelerle kaplı olması durumu ise sadece çekirdek fonksiyonunun faktörizasyon kısmında bir güçlük yaratacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] K.S. Peat, “The acoustical impedance at the junction of an extended inlet or outlet duct”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 150, no. 1, pp.101–110, 1991.
- [2] L. L. Beranek and I. L. Vér, *Noise and Vibration Control Engineering*, pp. 289–395, John Wiley and Sons, New York, 1992.
- [3] M. Munjal, *Acoustics of Ducts and Mufflers*, John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [4] M. L. Munjal, “Plane wave analysis of side inlet/outlet chamber mufflers with mean flow”, *Applied Acoustics*, vol. 52, no. 2, pp.165–175,1997.
- [5] A. Selamet and Z. L. Ji, “Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with extended inlet outlet”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 223, no. 2, pp. 197–212, 1999.
- [6] A. Selamet and Z. L. Ji, “Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with single-inlet and double-outlet”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 229, no. 1, pp. 3–19, 2000.
- [7] Y. Auregan, A. Debray and R. Starobinski, “Low frequency sound propagation in a coaxial cylindrical duct: Application to sudden area expansions and to dissipative silencers”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 243, no. 3, pp. 461–473, 2001.
- [8] S. Boij and B. Nilsson, “Reflection of sound at area expansions in a flow duct”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 260, no. 3, pp. 477–498, 2003.

- [9] S. W. Rienstra and B. J. Tester, “An analytic Green’s function for a lined circular duct containing uniform mean flow”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 317, no. 3-5, pp. 994–1016, 2008.
- [10] I.H. Sneddon, The Use of Integral Transforms, Mc Graw-Hill, NewYork, 1972.
- [11] F. Birbir and A. Buyukaksoy, “Plane wave diffraction by double impedance steps on a perfectly conducting ground plane”, *Arch. Elektron. Ubertragungs (AEU)*, vol. 48, no. 2, pp. 108–114, 1994.

EK 1. WIENER-HOPF FAKTORİZASYONU

Bu kısımda, bölüm 2' de söz edilen

$$M(\alpha) = \frac{J_1(Ka)}{J_1(Kb)} [J_1(Ka) Y_1(Kb) - J_1(Kb) Y_1(Ka)] \quad (\text{E1.1})$$

fonksiyonunun faktörizasyonu incelenecektir. İlk olarak $\frac{J_1(Ka)}{J_1(Kb)}$ fonksiyonunun, ardından $[J_1(Ka) Y_1(Kb) - J_1(Kb) Y_1(Ka)]$ fonksiyonunun faktörizasyonu yapılarak $M(\alpha)$ nın çarpanları olan $M_+(\alpha)$ ve $M_-(\alpha)$ belirlenebilir.

Örnek : $M(\alpha) = J_1(Ka) / J_1(Kb)$ fonksiyonunun faktörizasyonu

$M(\alpha)$ fonksiyonu dallanma tekilliğine sahip değildir. Yalnızca sıfırları ve kutupları mevcuttur. Bu durumda,

$$J_1\left(a\sqrt{k^2 - \alpha_m^2}\right) = 0 \quad (\text{E1.2})$$

ve

$$J_1\left(b\sqrt{k^2 - \beta_m^2}\right) = 0 \quad (\text{E1.3})$$

olmak üzere

$$M_+(\alpha) = \sqrt{\frac{J_1(ka)}{J_1(kab)}} \exp\{P(\alpha)\} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{\frac{\alpha}{\alpha_m}}}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta_m}\right) e^{\frac{\alpha}{\beta_m}}} \quad (\text{E1.4})$$

olarak bulunur. Burada $P(\alpha)$ sonsuz çarpımın asimptotik davranışını yok edecek şekilde seçilecektir. Bilindiği gibi Bessel fonksiyonları büyük argümanlar için

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\text{E1.5})$$

gibi davranır. O halde bu fonksiyonun büyük sıfırlarında

$$z_m \sim m\pi + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad m \rightarrow \infty \quad (\text{E1.6})$$

davranışına sahip bulunacaktır. Demek ki

$$\alpha_m \sim \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a} + \frac{\pi}{4a}\right)^2} = m\frac{i\pi}{a} + \frac{i\pi}{4a} \quad . \quad m \rightarrow \infty \quad (\text{E1.7})$$

ve

$$\beta_m \sim \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{b} + \frac{\pi}{4b}\right)^2} = m\frac{i\pi}{b} + \frac{i\pi}{4b} \quad . \quad m \rightarrow \infty \quad (\text{E1.8})$$

olur. Bu ifadeler sayesinde $\nu_m = im\pi/a$ ve $\kappa_m = im\pi/b$ biçiminde belirlenir.

Aynı zamanda sonsuz çarpımların asimptotik davranışı

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{ma + b}\right) e^{-\alpha/ma} = \frac{\Gamma(\frac{b}{a} + 1)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{b}{a}} e^{\frac{\alpha}{a}(1-C-\log(\frac{\alpha}{a}))} \quad (\text{E1.9})$$

formülü yardımıyla $\alpha_m = im\pi/a + i\pi/4a$ olduğu da gözönünde bulundurularak

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{\frac{i\alpha a}{m\pi}} = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a\alpha}{i\pi}\right)^{-\frac{3}{4}} e^{-i\frac{a\alpha}{\pi}(1-C-\log(\frac{a\alpha}{\pi})+i\frac{\pi}{2})} \quad (\text{E1.10})$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_m}\right) e^{\frac{i\alpha b}{m\pi}} = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{b\alpha}{i\pi}\right)^{-\frac{3}{4}} e^{-i\frac{b\alpha}{\pi}(1-C-\log(\frac{b\alpha}{\pi})+i\frac{\pi}{2})} \quad (\text{E1.11})$$

olur. Bu durumda

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{\frac{i\alpha a}{m\pi}}}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta_m}\right) e^{\frac{i\alpha b}{m\pi}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{4}} e^{\frac{i\alpha}{\pi}[(b-a)(1-C+i\frac{\pi}{2}+\log \pi - \log \alpha) + a \log a - b \log b]} \quad (\text{E1.12})$$

bulunur. Sonuç olarak

$$M_+(\alpha) = \sqrt{\frac{J_1(ka)}{J_1(kb)}} e^{-\frac{i\alpha}{\pi} [(b-a)(1-C+i\frac{\pi}{2}+\log \pi - \log \alpha) + a \log a - b \log b]} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}) e^{\frac{i\alpha a}{m\pi}}}{(1 + \frac{\alpha}{\beta_m}) e^{\frac{i\alpha b}{m\pi}}} \quad (\text{E1.13})$$

elde edilmiş olur.

Örnek : $J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)$ fonksiyonunun faktörizasyonu

$M(\alpha)$ fonksiyonu dallanma tekilliğine sahip değildir. Yalnızca sıfırları mevcuttur. Bu durumda,

$$J_1(\Gamma_m a)Y_1(\Gamma_m b) - J_1(\Gamma_m b)Y_1(\Gamma_m a) = 0 \quad (\text{E1.14})$$

ve

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \Gamma_m^2} \quad (\text{E1.15})$$

olmak üzere

$$M_+(\alpha) = \sqrt{J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)} \exp\{P(\alpha)\} \prod_{m=1}^{\infty} (1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}) e^{\frac{\alpha}{\gamma_m}} \quad (\text{E1.16})$$

yazılır. Burada $P(\alpha)$ sonsuz çarpımın asimptotik davranışını yok edecek şekilde seçilecektir. Bilindiği gibi Bessel ve Neumann fonksiyonları büyük argümanlar için sırasıyla

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\text{E1.17})$$

ve

$$Y_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\text{E1.18})$$

gibi davranır. O halde bu fonksiyonun büyük sıfırları da

$$\cos\left(Ka - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(Kb - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(Kb - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(Ka - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin K(b-a) \quad (\text{E1.19})$$

olduğundan

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2} = m \frac{i\pi}{(b-a)} \quad (\text{E1.20})$$

davranışına sahip bulunur. Demek ki, $K_m = \frac{im\pi}{(b-a)}$ biçimindedir. Aynı zamanda sonsuz çarpımların asimptotik davranışı

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{ma+b}\right) e^{-\frac{\alpha}{ma}} = \frac{\Gamma\left(\frac{b}{a} + 1\right)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{b}{2}} e^{\frac{\alpha}{a}(1-C-\log(\frac{\alpha}{a}))} \quad (\text{E1.21})$$

formülü yardımı ile $\gamma_m = \frac{im\pi}{(b-a)}$ olduğu da gözönünde bulundurularak

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}\right) e^{\frac{i\alpha(b-a)}{m\pi}} = \sqrt{\frac{i}{2\alpha(b-a)}} e^{-i\frac{\alpha(b-a)}{\pi}(1-C-\log\alpha+\log\pi-\log(b-a)+i\frac{\pi}{2})} \quad (\text{E1.22})$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$M_+(\alpha) = \sqrt{J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)} e^{i\frac{\alpha(b-a)}{\pi}(1-C+\log\frac{\pi}{\alpha(b-a)}+i\frac{\pi}{2})} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}\right) e^{\frac{i\alpha(b-a)}{m\pi}} \quad (\text{E1.23})$$

elde edilmiş olur

$$\textbf{Örnek : } M(\alpha) = \frac{J_1(Ka)}{J_1(Kb)} [J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)] \textbf{ fonksiyonunun}$$

faktörizasyonu

$M(\alpha)$ fonksiyonu

$$M(\alpha) = M_1(\alpha)M_2(\alpha) \quad (\text{E1.24})$$

biçiminde düzenlenir,

$$M_1(\alpha) = \frac{J_1(Ka)}{J_1(Kb)} \quad (\text{E1.25})$$

ve

$$M_2(\alpha) = J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka) \quad (\text{E1.26})$$

biçiminde tanımlanır ve önceki iki bölümde elde edilen sonuçlar birleştirilirse

$$M_1^+(\alpha) = \sqrt{\frac{J_1(ka)}{J_1(kb)}} e^{-\frac{i\alpha}{\pi}[(b-a)(1-C+i\frac{\pi}{2}+\log\pi-\log\alpha)+a\log a-b\log b]} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{\frac{i\alpha a}{m\pi}}}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta_m}\right) e^{\frac{i\alpha b}{m\pi}}} \quad (\text{E1.27})$$

ve

$$M_2^+(\alpha) = \sqrt{J_1(ka) Y_1(kb) - J_1(kb) Y_1(ka)} e^{i \frac{\alpha(b-a)}{\pi} (1-C+\log \frac{\pi}{\alpha(b-a)} + i \frac{\pi}{2})} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}\right) e^{\frac{i\alpha(b-a)}{m\pi}} \quad (\text{E1.28})$$

olmak üzere,

$$e^{-\frac{i\alpha}{\pi} [(b-a)(1-C+i\frac{\pi}{2}+\log \frac{\pi}{\alpha})+\log \frac{a}{b}]} e^{i \frac{\alpha(b-a)}{\pi} (1-C+\log \frac{\pi}{\alpha(b-a)} + i \frac{\pi}{2})} = e^{\frac{i\alpha}{\pi} [\log \frac{b^b}{a^a(b-a)(b-a)}]} \quad (\text{E1.29})$$

ilişkisi yardımıyla

$$M_+(\alpha) = \sqrt{\frac{J_1(ka)}{J_1(kb)} J_1(ka) Y_1(kb) - J_1(kb) Y_1(ka)} e^{\frac{i\alpha}{\pi} [\log \frac{b^b}{a^a(b-a)(b-a)}]} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m})(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m})}{(1 + \frac{\alpha}{\beta_m})} \quad (\text{E1.30})$$

elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Hülya ÖZTÜRK, 1984 yılında İstanbul’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul’da tamamladı. 2008 yılında ise Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun oldu. 2009 yılında aynı üniversitenin Matematik Bölümü’ne araştırma görevlisi olarak atandı, halen bu görevine devam etmektedir.