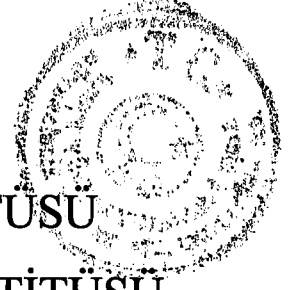


T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**ÇOKGEN PROFİLLİ DİELEKTRİK YÜKLÜ
H-DÜZLEM HORN ANTEN ANALİZİ**

Ahmet Serdar TÜRK

109916

DOKTORA TEZİ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
BOKÜMANTASYON MERKEZİ**

TEZ DANIŞMANI

Prof.Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY

**GEBZE
Eylül 2001**

Ahmet Serdar TÜRK'ün tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 20.08.2001 tarih ve 2001.122 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.



JÜRİ

ÜYE : Prof. Dr. Aliur BÜYÜKAKSOY
(Tez Danışmanı)

ÜYE

: Prof. Dr. Vitaliy Chumachenko

ÜYE

: Prof. Dr. Filiz GÜNEŞ

ÜYE

: Prof. Dr. Gökhan UZGÖREN

ÜYE

: Doç. Dr. Ali ALKUMRU

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05.11.2001 tarih ve 2001.132 sayılı kararı.



ÖZET

Bu tez çalışmasında besleme, horn ve dielektrik yüklemeye oluştan 2-boyutlu simetrik düzlemsel yapılardan elektromagnetik dalga saçılması problemi incelenmiştir. Probleme ilişkin besleme, bir dalga kılavuzu ile kılavuzun içindeki çizgisel kaynaktan ibarettir ve antenin boğaz kısmında dominant mod dalga uyarımını sağlamak amacıyla horn açıklığından yeterince uzağa yerleştirilmektedir. Dielektrik yükleme ise bir veya daha fazla keyfi şekilde ayrıık çokgen yapıli dielektrik tabakalardan oluşmaktadır.

Problemin kesin çözümünde **Bölge Ürün Tekniğı (BÜT)** adı verilen etkin bir analitik/sayısal yöntem kullanılmaktadır. 2-boyutlu sınır değer problemi, ayrıt ve radyasyon koşulları da ele alınarak elektrik alanın tek bir bileşenine göre formüle edilmekte ve çözülmektedir. Buna göre, yapının H-düzlem kesiti çok açılı ve homojen parçalara bölünmektedir. Bu parçalar sınır çizgisi üzerindeki basit temel bölgelerin bileşiminden oluşur. Her temel bölge eliptik koordinatlarda ifade edilebilir bir geometriye uyarlanır ve alan fonksiyonu eliptik koordinatlardaki dalga denklemi çözümünü ifade eden **Mathieu** fonksiyonlarının kompozisyonu şeklinde temsil edilir. Ana parçalardaki alan ifadeleri yukarıda belirtilen temel bölge alan fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlanır. İletken yüzeylerde sınır koşullarını sağlamak, dielektrik ara yüzlerde ise süreklilik koşullarını uygulamak suretiyle, sınır değer problemi sonsuz boyutlu katsayılar matrislerinden oluşan ikinci türden cebirsel matris denklemine indirgenir. Bu sistem kesme (truncation) prosedürü uygulanarak bilgisayar ortamında çözülür ve bilinmeyen katsayılar sayısal olarak elde edilir. Daha sonra ters işlem alınarak ışınan alan diyagramları çıkarılır ve ilgili anten karakteristikleri hesaplanır.

Geliştirilen bu algoritma yeterince geniş bir frekans bandında verimli biçimde çalışabilmekte ve aynı matematiksel model ile değişik bünye parametrelili birçok keyfi geometriye uygulanabilirlik imkanı vermektedir. Tekniğın doğruluğu ve verimliliği bazı test problemleriyle kontrol edilmiştir. Bazı horn yapılarının ışınma karakteristikleri hesaplanmış ve dielektrik yüklemenin anten karakteristiklerinin iyileştirilmesine yönelik çalışmalar yapılmıştır. Elde edilen neticelerden bir kısmı deneysel çalışmalarla da karşılaştırılmış ve doğrulanmıştır.

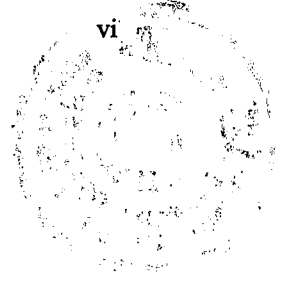
SUMMARY

This thesis study deals with 2D symmetric radiation structure composed of the feed, horn and dielectric loading. The feeding waveguide of a finite length contains a line source which is placed far enough from the aperture to be of opinion that the throat of the horn is excited either by dominant mode. The loading may consist of one or more than one separate dielectric embeddings with arbitrary polyhedral boundaries.

Rigorous analysis of the structure is based on the **Domain Product Technique (DPT)** adapted to studying 2D fields in regions with multiangular boundaries. Boundary value problem is formulated with respect to a single component of electric field satisfying Helmholtz's equation with appropriate boundary, edge and radiation conditions. H-plane cross-section of the structure is divided into multiangular regions with homogenous fillings. The DPT regards interior and exterior subregions introduced as common parts (products) of some simple basic domains possessing separable geometry in local elliptic coordinate systems associated with boundary segments. Sub region fields are constructed efficiently of summands in the forms of **Mathieu** function expansions defined in the above domains. Satisfying boundary conditions on the conducting surfaces and matching the tangential fields across the dielectric-air interfaces, boundary value problem is reduced to the second kind system of infinite matrix equations with respect to expansion coefficients which are determined by solving the resultant matrix equations. The last system is solved using truncation procedure.

The algorithm developed is efficient in a wide enough frequency range and gives the possibility of a substantial variation of the geometry of the radiation structure within the same mathematical model.

The validity and efficiency of the approach are checked and confirmed by solving test problems. Additionally, radiation pattern of some horn antennas which are being of interest to application, are presented in chapter 4. Such numerical results obtained by DPT are confirmed by another numerical results obtained by another authors and experimental results obtained by HP8530A far field antenna measurement system located at GIT Antenna Laboratory.

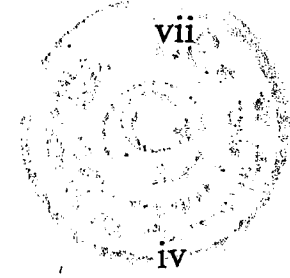


TEŞEKKÜR

Tez çalışması esnasında gerekli ilgi ve desteklerini esirgemeyen değerli danışman hocalarım Prof. Dr. Vitaly P. Chumacheko ve Prof. Dr. Alinur Büyükaksoy'a, GYTE Elektronik Müh. bölümünde öğretim üyeliği görevinden ayrılana kadar bir müddet tez danışmanlığımı da yürüterek yoğun ilgi ve alakasıyla işimin hafiflemesinde büyük rol sahibi olan kıymetli hocam Yrd.Doç.Dr. Ertuğrul Karaçuha'ya, çalışmalarımı huzurlu bir şekilde gerçekleştirdiğim ileri laboratuvar altyapısına sahip nadide yerlerden biri olan Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü'ne, tez süresince sıkça kullandığım kurumsal ve teknik desteği dolayısıyla şuan çalışmakta olduğum TÜBİTAK Marmara Araştırma Merkezi Bilişim Teknolojileri Araştırma Enstitüsü'ne, çalışmalarım boyunca birçok konuda desteğini aldığım tüm mesai arkadaşlarıma, özellikle Dr. Demet S. Armağan Şahinkaya'ya ve başta ailem olmak üzere üzerimde emeği geçen herkese teşekkürü bir borç bilirim.

Ahmet Serdar Türk

İÇİNDEKİLER DİZİNİ



| | |
|--|-----|
| ÖZET | vii |
| SUMMARY | v |
| TEŞEKKÜR | vi |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ | vii |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ | ix |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | xi |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1. Konu ve Önemi | 1 |
| 1.2. Tarihçe | 2 |
| 1.3. Tezin Amacı ve İçeriği | 7 |
| 1.4. Kullanılan Notasyon | 8 |
| 2. BÖLGE ÜRÜN TEKNİĞİ FORMÜLASYONU | 9 |
| 2.1. Bölge Ürün Tekniğine Giriş | 9 |
| 2.2. Genel Silindirik Yapılar için Frekans Domeninde 2- boyutlu Sınır Değer Probleminin Modellenmesi | 13 |
| 2.2.1. Sonsuz uzun mükemmel iletken silindirik yapılar için 2-boyutlu sınır değer problemi modellenmesi | 14 |
| 2.2.2 Radyasyon Koşulu | 16 |
| 2.2.3 Ayırıt Koşulu | 17 |
| 2.3. Eliptik-Silindirik Koordinat Sistemi | 20 |
| 2.4. Sınır Değer Probleminin Eliptik Koordinatlarda Çözümü | 24 |
| 2.4.1. Helmholtz Denkleminin Değişkenlere Ayrıştırılması | 24 |
| 2.4.2. Helmholtz Denkleminin Çözümü | 26 |
| 2.5. Çok açılı Mükemmel İletken Yüzeylerden 2-boyutlu TM-polarize Dalga Saçılımı BÜT Modeli | 31 |

3. DİELEKTRİK YÜKLÜ HORN ANTEN ANALİZİ

4. NÜMERİK VE DENEYSEL UYGULAMALAR

5. SONUÇ VE YORUMLAR

KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ

EKLER

viii

38

53

62

64

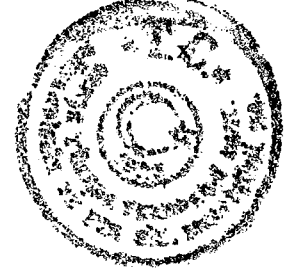
66

67



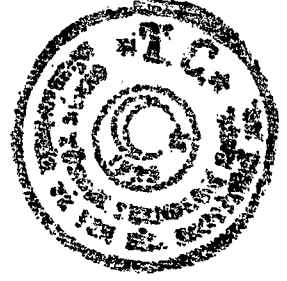
SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---------------|---|
| dB | : Desibel |
| E_z | : Elektrik alanın z-bileşeni |
| H_z | : Magnetik alanın z-bileşeni |
| ϵ | : Dielektrik sabiti |
| μ | : Magnetik geçirgenlik |
| σ | : İletkenlik katsayısı |
| k | : Serbest uzay dalga yayılma sabiti |
| ω | : Açısal frekans |
| λ | : Dalga boyu |
| \vec{n} | : Yüzeyin birim normal vektörü |
| U | : Toplam skaler alan |
| U^s | : Saçılan alan |
| U_0 | : Gelen alan |
| Me_n | : Radyal Mathieu fonksiyonu çift bileşeni |
| Ne_n | : Radyal Mathieu fonksiyonu tek bileşeni |
| ce_n | : Açısal Mathieu fonksiyonu çift bileşeni |
| se_n | : Açısal Mathieu fonksiyonu tek bileşeni |
| $H_0^{(1,2)}$ | : (1,2) inci türden Hankel fonksiyonu gösterimi |
| R | : Yansıma katsayısı |
| β_n | : Mod yayılım sabiti |
| J_s | : Yüzey akımı |



KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|------|--|
| DPT | : Domain Product Technique |
| BÜT | : Bölge Ürün Tekniği |
| ARM | : Analytical Regularization Method |
| HPBW | : Half Power Beam Width |
| TE | : Transverse Electric |
| TM | : Transverse Magnetic |
| HE | : Hybrid Electric |
| 2D | : 2-dimensional |
| 2B | : 2-boyutlu |
| 3B | : 3-boyutlu |
| RF | : Radio Frequency |
| LO | : Local Oscilator |
| IF | : Intermediate Frequency |
| RKA | : Radar Kesit Alanı |
| RCS | : Radar Cross Section |
| TEPW | : method of Transformation into an Equivalent Plane Wave |
| MoM | : Method of Moments |
| GIT | : Gebze Institute of Technology |



ŞEKİLLER DİZİNİ

| <u>Sekil</u> | <u>Sayfa</u> |
|---|--------------|
| 2.1 BÜT Uygulamasına Uygun Örnek Geometrik Kesitler | 12 |
| 2.2a Sonsuz Uzun Mükemmel İletken Silindirik Yapı | 14 |
| 2.2b Sonsuz Uzun Mükemmel İletken Silindirik Yapının Kesiti | 15 |
| 2.3 Mükemmel İletken Ayrıt | 17 |
| 2.4 ξ ve η 'ya Bağlı Elipsoit ve Hiperbol Grafikleri | 22 |
| 2.5 Sonsuz Uzun Şerit Hat Kesiti | 24 |
| 2.6 Çok Açılı Mükemmel İletken Bir Saçıcının Kesiti | 32 |
| 3.1 Çok Açılı Metal-Dielektrik Yapı Konturu | 38 |
| 3.2 Dielektrik Yüklü H-düzlem Horn Geometrisi ve İlgili Koordinat Sistemleri | 46 |
| 4.1a Dielektrik Lens Yüklü H-düzlem Horn Anten Geometrisi | 53 |
| 4.1b Dielektrik Yüklü ve Yüksüz Hornun $a=0.75\lambda$, $l=0.5a$, $q=2a$, $c=1.5a$ $b=1.5a$ ve $d=0.16a$ için Radyasyon Paternlerinin BÜT Analizi | 54 |
| 4.2 Dielektrik Yüklü H-düzlem Horn Geometrisi | 54 |
| 4.3 Dielektrik Lens Yüklü H-düzlem Horn Konfigürasyonları | 55 |
| 4.4 Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=60^\circ$, $l=3a$ ve $\epsilon_r=2.062$ için Radyasyon Paternleri | 56 |
| 4.5 Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=90^\circ$, $l=3a$ ve $\epsilon_r=2.062$ için Radyasyon Paternleri | 56 |
| 4.6 Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=120^\circ$, $l=3a$ ve $\epsilon_r=2.062$ için Radyasyon Paternleri | 57 |
| 4.7 Dielektrik Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=120^\circ$, $l=3a$ ve Değişik Dielektrik Malzemelerin Yüklendiği Durum için Işıma Diyagramları | 57 |

| | |
|---|----|
| 4.8 Şekil 4.7'deki a/λ Frekans Parametresine İlişkin Yansıma Katsayısı | 58 |
| 4.9 Açık Sonlandırılmalı Sonsuz Uzun Paralel Plaka Dalga Kılavuzunun Analitik ve Sayısal Yöntemlerle Elde Edilmiş Işıma Diyagramlarının Karşılaştırılması | 58 |
| 4.10 WR 187 Beslemeli C-band Hornun Yüklü ve Yüksüz Durumda Uzak Alan Paternleri (Her İki Anten Aynı H-düzlem Kesitine Sahiptir) | 59 |
| 4.11 Üstteki Tiplerde Dielektrik Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=60^\circ$, $l=0.8a$ ve $\epsilon_r=2.586$ için Işıma Diyagramları | 59 |
| 4.12 Grafikte Verilen Açık Sonlandırılmalı Dalga Kılavuzu Yapısının $a=0.75\lambda$, $l=0.5a$, $q=1.35a$, $b=1.5a$, $l_f=0.1a$ $d=0.2a$ için Radyasyon Paternleri | 60 |
| 4.13 Grafikte Gösterilen Horn Yapısının $a=0.75\lambda$, $q=2a$, $q_1=0.23a$ $b=1.0a$ ve $c=1.5a$ için Işıma Diyagramları | 60 |
| 4.14 Açık Alan Anten Ölçüm Düzeneği | 61 |
| 4.15 Dielektrik yüklü ve yüksüz hornun $\psi=60^\circ$, $a=0.75\lambda$, $l=2.95a$, $r=1.45a$, $c=2.1a$, $c_1=0.87a$, $c_2=0.3a$ ve $b=2.97a$ için ışım diyagramları | 61 |

1.GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Horn antenler özellikle yüksek frekans uygulamalarında sıkça kullanılan yüksek kazançlı, düşük geri yansımali, genellikle tek ana kulakli, dar huzmeli, verimli bir anten türüdür. Genelde dikdörtgen veya silindirik dalga kılavuzlarının uygun bir açıklıkla sonlandırılıp radyasyon yapması prensibiyle çalışırlar.

Hornun dielektrikle doldurulmasının elektromagnetik ışımaya özelliklerine etkisi birçok bilim adamı tarafından araştırılmaktadır. Yapılan çalışmalar horn antenin ışımaya karakteristiklerinin içerisinde uygun boyutta ve bünyede dielektrik materyal yerleştirilmesi suretiyle önemli ölçüde değiştirilebilir ve iyileştirilebilir olduğunu göstermiştir [1...9]. Verimlilik açısından burada önemli olan iki parametre, yüklemenin hangi şekilde yapılacağı ve ne tür bünye karakteristiğinde olacağının tespit edilebilmesidir. Bu konudaki birçok incelemelere rağmen halihazırda verilen bir anten için optimum dielektrik konfigürasyonu bulacak genel bir çözüm metodu bulunamamıştır. Çünkü anten teknolojisinin pratik uygulamalarında, karşılaşılan karmaşık geometrilerden dolayı yalnızca birkaç tür anten yapısı analitik tekniklerle analiz edilebilmektedir. Geometrinin karmaşıklığı, prensip olarak böyle keyfi yapıların analitik yöntemler kullanmak suretiyle çözülebilmesini son derece zor kılmaktadır. Dolayısıyla birçok konfigürasyonun neticesi ya deneysel sonuçlarla, yada sadece cismin dalga boyundan çok büyük boyutta olduğu durumlarda kullanılan (özellikle yüksek frekanslar) optik yaklaşıklık yöntemleriyle veya çok uzun işlem süresi alan ve büyük kapasiteli bilgisayarlara ihtiyaç duyan direkt nümerik metotlarla alınabilmektedir.

Bu tez çalışmasında ağırlıklı olarak, birçok uygulamada lens anten özelliği gösteren çokgen profilli dielektrikle yüklenmiş geniş açılı H-düzlem horn anten yapısı incelenecektir. Dalga kılavuzu içinde ve açıklık tarafında olmak üzere iki tür yükleme dikkate alınacaktır. Çözüm metodu olarak keyfi geometrik yapılara başarıyla uygulanabilen, kararlı ve güvenli çalışan, Bölge Ürün Tekniği (Domain Product Technique) adlı bir analiz yöntemi geliştirilecektir [11].

1.2. Tarihçe

Elektromagnetik hornların radyasyon karakteristikleri içerilerine uygun yapıda dielektrikler yerleştirilmesi suretiyle kayda değer biçimde iyileştirilebilir. Bu tür yüklemeli cisimlerden dalga saçılması ve ışınma analizi konusunda çok sayıda araştırma yapılmıştır [Hamid and Mohsen-1969, Oh et al.-1970, Tsandoulas and Fitzgerald-1972, Baldwin and McInnes-1973, Hamid and El-Süleyman-1983, Ratajczak et al.-1994, Cruz et al.-1994, Parker et al.-1995, Reig et al.-1997, vd.]. Ancak hala, genel basit yapılar dışında, herhangi bir anten yapısı için iyileştirici sonuç verecek optimum dielektrik konfigürasyonun formülasyonu bulunamamıştır. Burada yapılan incelemelerde, keyfi geometriler Helmholtz denkleminde değişkenlerine ayrıştırılarak çözülemediğinden, optik yaklaşım prensipleri veya direkt sayısal teknikler kullanılmıştır [Hamid and El-Süleyman-1983, Ratajczak et al.-1994, Reig et al.-1997]. Bununla birlikte birçok horn da deneysel olarak çalışılmıştır [Hamid and El-Süleyman-1983, Parker et al.-1995].

Tezde üzerinde durulacak olan temel dielektrik yükleme profili Şekil 2.1.(d)'de verilmektedir. Bunlar, lens özelliği göstermek suretiyle H-düzlem horn antenin ışınma özelliklerini iyileştirme amaçlı poligonalsal kesimli dielektriklerdir. Hornun homojen doldurulması [Cruz et al.,1994] dışındaki konfigürasyonlar geometrinin keyfiliği ve besleme ile horn açıklığı arasındaki mesafenin kısa olması sebebiyle şimdiye kadar analitik yöntemlerle hesaplanamamıştır. Buna benzer problemlerin çözümünde, bölge ürün tekniği adı verilen [Chumachenko-1988, P'yankov and Chumachenko-1990, Kotsur and Chumachenko-1991, Chumachenko et al.-1999], 2-boyutlu mod uydurma (mode-matching) yöntemi uygulanmış ve başarılı sonuçlar alınmıştır. Bu bölümün devamında, burada özetle belirtilen çalışmalar ve benzeri diğer yayınlar detaylı biçimde ele alınacaktır.

M. Hamid ve El-Süleyman tarafından 1983'te yayınlanan "New types of dielectric-loaded horn antennas" isimli makalede, H-düzlem horn antenlerin ışınma karakteristiklerinden bazılarını iyileştirme amaçlı *düşük kayıplı dielektrik yükleme* teknikleri sunulmuştur [5]. Yatay ve düşey düzlemde sürekli, kısmi veya boşluklu şekillerde dielektrik yüklenmiş hornların nümerik (temelde optik yaklaşımlara dayalı) ve deneysel sonuçları elde edilmiştir. Frekans bandındaki daralma ve yan loblardaki bozulmalara karşın; doğrultuculuk kazancını, huzme genişliğini ve giriş

yansımaları (VSWR) iyileştirici örnek uygulamalar verilmiştir. Bununla birlikte, belli bir frekans bandı boyunca ana huzmenin hornun bir duvarından öteki duvarına doğru kaydığı dielektrik yüklemeye konfigürasyonları belirlenerek deneysel sonuçları gösterilmiştir. Bu önemli bulguların ışığı altında, ileriki çalışmalarda birbirini görebilen noktalar arası haberleşme yapan taşınabilir cihazların tasarlanabileceği önerilmiştir.

Z.A. Delecki, M.Hamid ve A.Z. Elsherbeni tarafından 1988 yılında gerçekleştirilen “Scattering by a dielectric discontinuity in a H-plane sectoral horn” isimli çalışmada, paralel plakalı dalga kılavuzuyla beslenmiş ve dikey düzlem boyunca kayıplı dielektrik tabakalar yerleştirilmiş H-düzlem horn anten yapısından saçılma analizi TEPW (method of Transformation into an Equivalent Plane Wave) tekniği kullanılarak incelenmiştir [17]. Klasik analitik yöntemler ve deneysel bilgilerle doğrulanan nümerik sonuçlar ışığında bazı önemli bilgiler elde edilmiştir. 8-10GHz frekans bandında, antenin düzlemsel açıklık açısının yansıma katsayısı ve yakın civardaki elektrik alan dağılımına etkisi belirlenmiştir. Bununla birlikte değişik sayıda kayıplı dielektrik katsayılı geometrilerdeki yüklemelerin anten verimine katkısı da irdelenmiştir. Neticede çıkarılan temel sonuç; açıklık açısı ve dielektrik katsayısının belli bir optimum değer üzerine çıkması durumunda yansımanın arttığı, dolayısıyla hornun verimin düştüğüdür. Grafiklerden alınan bilgilere göre; optimum değerler 24° açıklık açısı ile $\epsilon_r=2.5$ ve $\tan\delta_m=0.005$ bünyeli dielektrik malzeme kullanımı olarak görülmektedir.

L.L. Oh, S.Y. Peng ve C.D. Lunden’in çalışmalarında değişik dielektriklerin hornun radyasyon paternine etkisinin deneysel sonuçları sunulmuştur (bkz. “Effects of dielectrics on the radiation patterns of an electromagnetic horn”, 1970). Dielektrik cisim E-düzlem hornun içine yerleştirilmiş, X-bandında yakın/uzak alan ölçümleri alınmıştır. Fabrikasyonu kolay strafor (köpük) cinsi malzemelerden üçgenel geometriler kullanılmıştır. Dielektrik sabiti oldukça düşük olan ($\epsilon_r=1.03$) bu malzeme sayesinde hava-dielektrik geçişindeki sinyal geri yansıması azaltılmıştır. Ancak düşük dielektriğe rağmen, horn açıklığındaki alanın güç ve faz dağılımının değiştiği gözlenmiştir. Bu sayede, dielektrik lensin şekline de bağlı olarak, daha dar huzme genişliği ve daha düşük yan loblar elde edilmiştir [2]. Deneyde kullanılan horn 84 inch (yaklaşık 213cm) uzunluğunda ve 10° açıklık açısındadır. 10GHz’te $12\lambda \times 2\lambda$

E&H düzlem açıklık boyutuna ulaşılmaktadır. Lens yapısı, düzgün güç dağılımına sahip olması sebebiyle, E-düzlemine konuşlandırılmıştır. İçi boş horn için 4° HPBW (yarım güç huzme genişliği) ve -6dB yan lob seviyesi karakteristiği ölçülmüş iken, 50-150cm arası uzunlukta ve değişik şekillerde dielektrikler doldurulması sonucu bu değer -40dB 'lere kadar çekilmiştir. Küçük açıklıklı ($<20^\circ$) hornlarda düşük dielektrik katsayılı ($\epsilon_r < 1.5$) lenslerin tasarımının incelendiği bu makaleden, düşük yan lob eldesi için açıklıktaki güç-faz dağılımının oldukça etkili olduğu ve düzeltilmesi gerektiği sonucu çıkmaktadır. Büyük açıklıklarda benzer sonuçlara ulaşılmasının ancak daha yüksek katsayılı ($\epsilon_r > 1.5$) lenslerle mümkün olabileceği belirtilmiştir. Fakat bu durumun da daha fazla geri yansımaya sebebiyet vereceği vurgulanmıştır.


Dielektrik yüklemenin deneysel olarak incelenmesi konusundaki önemli otoritelerden M.A.K. Hamid ve A. Mohsen'in 1969 yılında yayınladığı "Diffraction by dielectric-loaded horns and corner reflectors" isimli makalede, düzlemsel hornlar ve köşe yansıtıcılarının duvarlar boyunca düzgün kenarlı dielektriklerle yüklenmesi sayesinde radyasyon diyagramlarında oluşacak değişimlerin deneysel sonuçları verilmiştir. Dielektrik yüklü hornun temelini oluşturan bu çalışma neticesinde anten ağırlığını pek fazla etkilemeyecek küçük dielektrik malzemelerle doğrultuculuğun artırılmasının mümkün olabileceği gösterilmiştir [1]. Yansımaz oda ortamında gerçekleştirilen deneylerde kaplama malzemesi olarak pleksiglas ($\epsilon_r = 2.5$) kullanılmış ve bu sayede, gerek köşe yansıtıcılarda gerekse H-düzlem hornlarda, ana huzmenin daraldığı gözlenmiştir. Ancak H-düzlem hornunda duvarlara yapılan bu yüklemelerin doğrultuculukla birlikte yan lob seviyesini de arttırdığı, hatta bazen yeni lobların oluşmasına bile sebep olduğu görülmüştür.

E.A. Parker, B. Philips ve R.J. Langley tarafından 1995 yılında gerçekleştirilen "Experimental variable beam width horn" adlı çalışmada, düşük dielektrik katsayılı malzemeyle dolu H-düzlem hornun içine ferit çekirdekler konulması durumunda oluşan anten yapısının karakteristikleri incelenmiştir. Horn içindeki dielektrik materyalin bünye katsayısının harici bir magnetik alan uygulanarak değiştirilmesi sonucu, açıklıktaki alanın faz dağılımı etkileneceğinden, ayarlanabilir huzme genişliklerine ulaşılmaktadır. Bundan önce de yine ilgili otoriteler tarafından dar/geniş huzme anahtarlamalı horn çalışması gerçekleştirilmiştir. Deneyde 226mm uzunluğunda, 154mm açıklığında (40° açılı) H-düzlem horn kullanılmış ve X-band

kılavuzla besleme yapılmıştır. Antenin içi granüle dielektrik ve 1-22 ağırlık oranlı ferit toz karışımıyla doldurulmuştur. Duvarlar arasında magnetik alan uygulayacak düzenek kurulmuştur. 10GHz'te alınan veriler, alanın şiddetine ve uygulama konumuna bağlı olarak huzmenin daralıp genişlemesinin kontrol edilebileceğini göstermektedir. Örneğin; normalde içi boş anten için 18.6° olarak ölçülen HPBW değeri, açıklık ortasından 0.65T magnetik alan uygulandığında %35 daralarak 13.1°'ye düşürülmüştür. Magnetik alanın konum ve şiddeti ayarlanarak daralma oran %70'lere kadar çıkarılabilmektedir. Ancak bununla birlikte yan lob seviyelerinde ve anten kaybında artış gözlenmiştir [8].

Dielektrik yüklemenin horn ışınma paternine etkisinin incelenmesine yönelik ilk yayınlardan biri de R. Baldwin ve P.A. McInnes tarafından gerçekleştirilmiştir (bkz. "Radiation patterns of dielectric loaded rectangular horns", 1972). Bu çalışmada, E-düzlemi duvarına kaplanmış sonlu kalınlıklı dielektriğin anten doğrultuculuk kazancına etkisi araştırılmıştır. TM_{y01} hibrit moduyla sürülen hornun ana huzmesi ve yan lob değişimine yönelik analitik ifadeler çıkarılarak, açıklık alan dağılımı ve uzak alan diyagramları hesaplanmıştır. 9.7×7.4cm açıklığında, 1.6mm kalınlıklı ve $\epsilon_r=2.59$ bünye parametrelili pleksiglas kaplı horn antenin 7.8, 10 ve 11GHz frekanslarında hesaplanan (Kirchoff-Huygens yaklaşıklığıyla) ve ölçülen ışınma diyagramları verilmiştir. Grafiklerden görüldüğü üzere dielektrik yükleme (kalınlığa da bağlı olarak) ana huzmeyi daraltırken yan lobların seviyesini arttırmaktadır. Ayrıca, elde edilen sonuçlar pratikte sıkça kullanılan oluklu (corrugated) horn yapısıyla benzer karakteristikler gösterdiğinden, bu sayede üretimi daha kolay ve düşük maliyetli yeni bir oluklu horn eşdeğer tasarımının yapılabileceği öngörülmüştür [4].

Buna benzer çalışmalar yapan G.N. Tsandoulas ve W.D. Fitzgerald'ın 1972'de yayınladığı "Aperture efficiency enhancement in dielectrically loaded horn" isimli makalesinde ise, E- düzlem açıklığı boyunca simetrik olarak dielektrik yüklenmiş dikdörtgen hornun teorik ve deneysel sonuçları elde edilmiştir [3]. Ağırlıklı olarak açıklık verimliliği üzerinde durularak %92-96 değerlerine ulaşabildiği gösterilmiştir. Dominant moda uyarılan boş hornun açıklık verimi en fazla %81 civarında olabilirken, kenarlara dielektrik yerleştirilmesi sayesinde bu oran teoride %100'lere (uygulamada %96) kadar çıkabilmektedir. Böylece özellikle çoklu horn beslemeli Cassegrain anten sistemlerinde büyük avantajlar elde edilebilmektedir.



Hornun açıklığına, malzemenin kaplama kalınlığına, dielektrik katsayısına ve frekansa bağılı verimlilik ve uzak alan patern grafikleri verilmiştir. Açıklık arttıkça verim-frekans bandı, dielektrik katsayısı arttığında ise ana huzme (yan lobların yükselmesi pahasına) daralmaktadır. Grafikler arasında, en iyi verim/huzme oranını verecek açıklık değeri de bulunmaktadır. Deneyler 5.65GHz merkez frekansında $\epsilon_r=2.062$ (teflon), $\epsilon_r=4$ ve $\epsilon_r=6$ 'lık malzemelerle yapılan 1.4λ açıklıklı horn ile yapılarak nümerik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Örneğin H-düzlem için 3-dB huzme genişliği 46° den 36° ye, 10-dB huzmesi ise 85° den 63° ye kadar daraltılmıştır. Bu çalışmada sadece kayıpsız malzemeler dikkate alınmış olmasına rağmen, pratikte dielektrikler mükemmel olmadığından, kayıplı materyallerin anten verimini düşüreceği vurgulanmıştır. Bununla birlikte TE dışında, özellikle dairesel polarizeli hornların sürüldüğü, HE (Hibrit Elektrik) modu için de aynı incelemelerin yapılmasının ticari uygulamalara yön vermesi açısından faydalı olacağı belirtilmiştir.

Bunların dışında, dielektrik yükleme etkisinin 3-boyutlu olarak incelendiği çalışmaların yanı sıra, düzlemsel hornların karakteristiklerini yükleme yapmaksızın düzeltmeyi amaçlayan incelemeler de yapılmıştır [9]. 3B hornlara dielektrik yüklemenin de 2B benzeri sonuçlar verdiği yani lens türü geometrilerin ana huzmeyi daraltıp doğrultuculuğu artırma karşılığı yan lob seviyelerini yükselttiği gözlenmiştir [6]. Ayrıca; kaçak-dalga (leaky-wave) oluşturan özel duvarların geniş açıklıklı düzlemsel hornlarda kullanılması durumunda lensiz faz düzeltmesi yapılabileceği, bu sayede de verimlilik ve doğrultuculuğun iyileştirilebileceği gösterilmiştir [18].



1.3. Tezin Amacı ve İçeriği

Bu tezde, H-düzlem horn anten karakteristikleri değişik dielektrik yüklemeye konfigürasyonları altında incelenecek ve anten teknolojisi açısından oldukça önemli olan yüksek doğrultuculuk kazancı, dar huzme, geniş frekans çalışma bandı, empedans uyumluluğu, düşük yan lob seviyesi gibi temel parametreler araştırılarak uygulamaya yatkın verimli anten yapıları belirlenmeye çalışılacaktır. Besleme kaynağı, dalga kılavuzu, horn ve keyfi dielektrik yüklemeden ibaret simetrik 2-boyutlu geometriler incelenecektir. Yükleme değişik şekilde bir yada daha fazla dielektrik parçadan oluşabilir. Kılavuz sonlu boyuttadır ve içerisinde dominant modu uyarmak amacıyla horn boğazından yeterince uzağa yerleştirilmiş bir çizgisel kaynak bulunmaktadır. Analiz metodu olarak, kendi içinde lokal-eliptik koordinat sistemleri oluşturan ve bunların tüm domendeki etkileşimlerini Mathieu fonksiyonları açılımlarına dayalı tümleşik çözümlerle hesaplayan Bölge Ürün Tekniği (Domain Product Technique) kullanılacaktır [11].

Tezin ilk bölümünde giriş, konu önemi ve içeriğinden kısaca bahsedilmektedir. Ayrıca, şu ana kadar konuyla ilgili çalışan dünya çapındaki otoritelerin bulguları da detaylı biçimde araştırılmış ve incelemeler sonucunda önemli görülenler bu tarihçe alt başlığında toparlanmıştır.

İkinci bölümde, Bölge Ürün Tekniği'nin matematiksel modeli üzerinde durularak genel geometrilere yönelik formülasyon ayrıntılı biçimde verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümü ise, tamamen dielektrik yüklü horn anten yapılarına yönelik BÜT analiz çalışmalarını içermektedir. Bu bölümde öncelikle polarizasyondan bağımsız bir BÜT analizi yapılmış, daha sonra ise sadece H-düzlem horna karşılık gelen TM-polarize dalga saçılımı incelenmiştir.

Bölüm 4'te, tez çalışması boyunca elde edilen sayısal sonuçlara dayalı anten karakteristik grafikleri yer almaktadır. Uygulamada ilgi çekebilecek horn yapılarının ışınım karakteristikleri hesaplanmış ve dielektrik yüklemenin huzmeyi daraltarak anten doğrultuculuğunu arttırdığı gözlenmiştir. Bununla birlikte, antenin yan lob seviyelerini düşürmek, boğaz ve açıklık verimini arttırmak, giriş yansımaları azaltmak vb. karakteristiklerin iyileştirilmesine yönelik çalışmalar da yapılmıştır.



Tekniğin doğruluğu ve verimliliği bazı test problemleriyle kontrol edilmiştir. Örneğin, açık sonlandırılmalı dalga kılavuzundan ışınan alanın analitik sonucu BÜT analiz sonucunun eşdeğer olduğu görülmüştür. Elde edilen neticelerden bir kısmı deneysel çalışmalarla karşılaştırılmış ve doğrulanmıştır. Deneyler GYTE Elektronik Bölümü Anten Laboratuvarı'nda mevcut tam teçhizatlı HP8530A uzak alan anten ölçme sistemiyle gerçekleştirilmiştir.

Sonuç ve yorumlar, tüm bu çalışmalardaki neticeler ve kazanılan tecrübelerin ışığı altında, bölüm 5 içinde alt başlıklar halinde sunulmaktadır. Burada en dikkat çekici sonuç; geliştirilen algoritmanın yeterince geniş bir frekans bandında verimli biçimde çalışabilmesi ve aynı matematiksel model ile değişik bünye parametrelili birçok keyfi geometriye uygulanabilirlik imkanı verebilir olmasıdır.

1.4. Kullanılan Notasyon

Bu tezde kullanılan notasyonlar, genelde yaygın biçimde kullanılan standart notasyonlardır. Bazı özel kullanımlar ise şunlardır:

Me_n, Ne_n : Radyal Mathie fonksiyonları gösterimi

ce_n, se_n : Açısall Mathie fonksiyonları gösterimi

(ξ, η, z) : Eliptik koordinat sistemi parametreleri

2. BÖLGE ÜRÜN TEKNIĞİ FORMÜLASYONU

2.1. Bölge Ürün Tekniğine Giriş

Farklı fiziksel ve geometrik özelliklere sahip cisimlerden elektromagnetik dalgaların saçılımı problemi yıllardır gerek pratik uygulamalar, gerekse teorik bakımdan son derece ilgi çekici ve önemli bir konu olmuştur. Kanonik veya daha karışık yapıda çeşitli cisimlerden elektromagnetik dalga kırınımı ve bu yapıların sayısal modellenmesi modern elektromagnetik teoride büyük bir öneme sahiptir.

Bu tip problemlerin çözümünde, özellikle de karmaşık ve rezonansların söz konusu olabileceği yapılar için oldukça büyük zorluklar söz konusu olabilmektedir. Çünkü “Moment Metodu (MoM)” veya “Sonlu Fark Metodu” gibi direkt nümerik algoritmalar kullanan teknikler, kırınım problemini birinci türden cebrik sisteme indirgemek yada Maxwell denklemlerini iteratif moda uydurmak suretiyle çözüm elde etmeye çalışırlar. Ancak bilindiği gibi bu tür cebrik çözüm sisteminin bazı sorunları vardır. Bunlardan en önemlileri sistemin hal sayısının* hızlı artışı dolayısıyla prosedürde oluşan kararsızlık, çok parçalı yapılarda yüksek bilgisayar kapasitelerine rağmen uzun süren işlem süreleri ve iteratif yöntemlerde uzak alan ifadelerinin hesabının zorluğudur. Örneğin; uygulamalarda sık kullanılan moment metodunun denklemleri birinci türden cebrik sisteme ($Ax=b$ biçiminde) indirgemesi, bu türün bahsedilen kararsızlığı dolayısıyla dielektrik sirkular tüp ve iç süreksizliği bulunan düzlemsel dalga kılavuzu gibi basit kanonik yapıların bile çözümünü çok zor kılmakta ve de ekstra karmaşık işlemlere ihtiyaç duyulmaktadır [16].

Bu sıkıntılarla karşılaşmamak için çalışmamızda yeni geliştirilen bir yöntem olan Bölge Ürün Tekniği (BÜT) kullanılacaktır. Bölge ürün tekniği genel olarak analitik-sayısal yapıdadır ve ele alınan saçılma problemini, matematiksel açıdan orijinal sınır değer problemine eş olan, güvenli ve kararlı yapıdaki, ikinci türden fonksiyonel denkleme indirger.

* Bir matrisin hal sayısı(condition number) matrisin ve tersinin normlarının çarpımı şeklinde tanımlanır.

BÜT olarak adlandırılan 2-boyutlu mode-uyumluluk prosedürü çok açılı süreksizlik problemlerinin analizi için oldukça verimli bir yöntemdir. Arkası boşluklu yarık yada oluklardan elektromagnetik dalga saçılımı problemi RKA (Radar Kesit Alanı, RCS) çalışmaları için oldukça önemlidir, çünkü bu tür cisimler hedefin toplam saçılma paterninde önemli katkı sahibidir. Bu problemle aynı zamanda optik&ses disk tasarımının ve diğer mikrodalga uygulama alanları da ilgilenmektedir.

BÜT ile incelenen konfigürasyonun saçılma analizi yapılırken öncelikle bölgeler çok açılı konturlarla (bir bölgenin düzlemsel kesitini sınırlandıran dış çevre çizgisi) parçalanır. Örneğin, uygulamamızdaki dielektrik yüklü horn yapısının konturu sırasıyla $N^{(1)}$ ve $N^{(2)}$ adet parçadan ibaret homojen dolgulu iki ayrı bölgeye (dielektrikli ve boş olmak üzere) ayrılır ve sınır değer problemi Helmholtz denklemini sağlayan elektrik alanın tek bir bileşenine göre formüle edilir.

$$u^{(1)} = u_s^{(1)} \quad (2.1a)$$

$$u^{(2)} = u_s^{(2)} + u_0 \quad (2.1b)$$

Burada, $u_s^{(1)}$ ve $u_s^{(2)}$ sırasıyla, dielektiriğin içinde ve dışındaki saçılan alanlardır.

p. bölgedeki her bir j. parça için, orijini segmentin ortasında yer alan ve Oy_j eksenini kontur çerçevesinin normali yönünde seçilen, lokal kartezyen koordinat sistemi $(x_j^{(p)}, y_j^{(p)})$ tanımlanır ve aşağıdaki dönüşümle $(\xi_j^{(p)}, \eta_j^{(p)})$ eliptik koordinatlarındaki karşılığı yazılabilir; öyle ki segment uzunluğu $2f_j^{(p)}$ olacaktır:

$$x_j^{(p)} = f_j^{(p)} \cosh \xi_j^{(p)} \cos \eta_j^{(p)}; y_j^{(p)} = f_j^{(p)} \sinh \xi_j^{(p)} \sin \eta_j^{(p)}$$

$$, j=1, \overline{N^{(p)}}, p=1,2 \quad (2.2)$$

Her iki bölgedeki saçılan alan ifadeleri şu biçimde düzenlenir:

$$u_s^{(p)} = \sum_{j=1}^{N^{(p)}} u_j^{(p)} \quad , p=1,2 \quad (2.3)$$

Saçılan alan fonksiyonları Helmholtz denklemini ve sınır koşullarını sağlamalıdır. Eliptik formda işlemler yapıldıktan sonra neticede her bir $u_j^{(p)}$ fonksiyonu için aşağıdaki açılım ifadesi elde edilebilir:

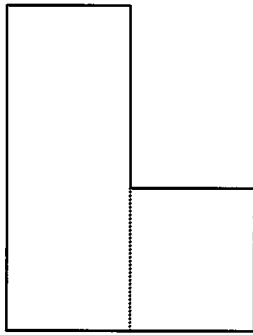
$$u_j^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} {}^p D_n^j \frac{Me_n^{(2)}(\xi_j^{(p)}, q_j^{(p)})}{Me_n^{(2)}(0, q_j^{(p)})} ce_n(\eta_j^{(p)}, q_j^{(p)}) \quad (2.4)$$

Burada;

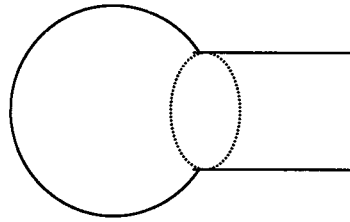
- $ce_n(\eta_j^{(p)}, q_j^{(p)})$ n.derece Mathieu fonksiyonu çift açılmalı bileşen
- $Me_n^{(2)}(\xi_j^{(p)}, q_j^{(p)})$ ilgili Mathieu fonksiyonu radyal bileşeni
- $q_j^{(p)} = (k^{(p)} f_j / 2)^2$.
- $\{ {}^1 D_n^j \}$ ve $\{ {}^2 D_n^j \}$ bilinmeyen açılım katsayıları dizisi

Her toplamın terimi Mathieu fonksiyonu açılımı şeklinde gösterilir. İletken yüzeylerdeki sınır koşulları ve dielektrik-hava geçişindeki teğetsel alan bileşenlerin sürekliliği koşullarını sağlamak suretiyle, ortaya çıkan cebrik matris denklemleri çözülerek fonksiyonun bilinmeyen açılım katsayıları belirlenir. Buradan bilinmeyen alan ifadeleri bulunarak anten ışıma karakteristikleri hesaplanabilir.

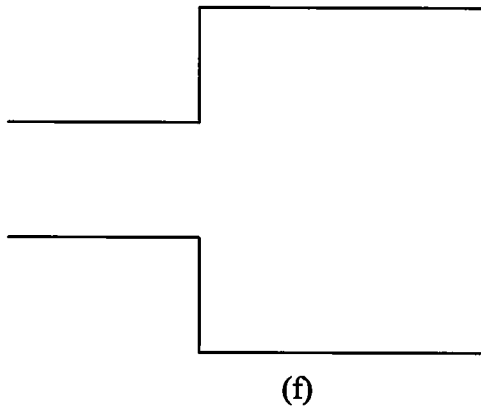
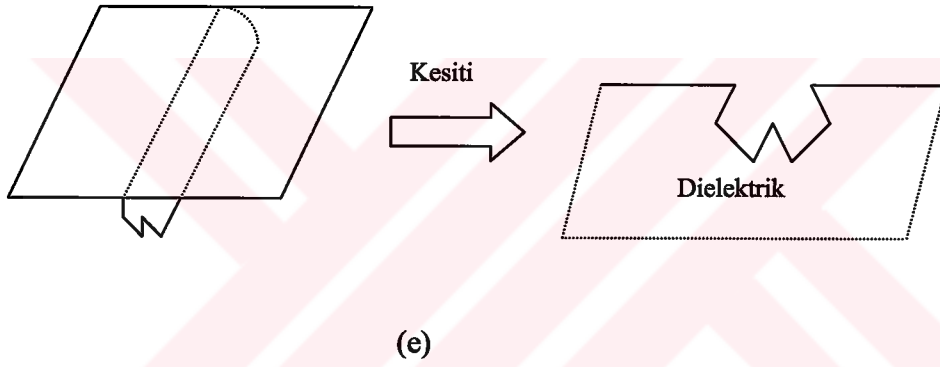
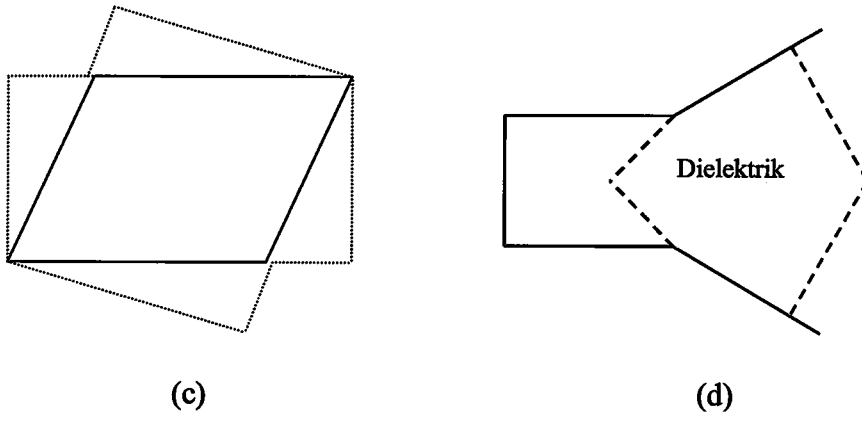
Şekil 2.1'de BÜT'ün uygulanabileceği 2-boyutlu yapılara örnekler görülmektedir.



(a)



(b)



Şekil 2.1 BÜT Uygulamasına Uygun Örnek Geometrik Kesitler

(a) Bitişik Sınır

(b) Ortak Sınır

(c) Kesişim Sınırı

(d) Dielektrik Yüklü Horn

(e) Dielektrik Tabakalı Oluk

(f) Kademeli Kılavuz Yapıları

2.2. Genel Silindirik Yapılar için Frekans Domeninde 2-boyutlu Sınır Değer Probleminin Modellenmesi

Bilindiği üzere elektrik ve magnetik alan vektörleri en genel biçimde, \vec{r} konum vektörünü ve t zamanı temsil etmek üzere, sırasıyla $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ve $\vec{H}(\vec{r}, t)$ şeklinde ifade edilmektedir. Frekans domeni incelemelerinde monokromatik hal için işlem kolaylığı açısından (2.5)'te tanımlanan fazör kavramı ele alınıp Maxwell denklemlerinde yerine konulursa aşağıdaki denklem seti elde edilir:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}\} \text{ olmak üzere,} \quad (2.5a)$$

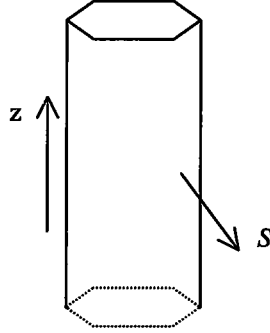
$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -i\omega\mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= i\omega\varepsilon \vec{E} + \sigma\vec{E} + \vec{J}_s \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \rho / \varepsilon \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \\ \mu &= \mu_0 \cdot \mu_r \end{aligned} \quad (2.5b)$$

(2.5) düzenlenmiş Maxwell denklemleri kullanılarak elektrik ve magnetik alan için (2.6) ve (2.7)'deki dalga denklemleri çıkarılabilir:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = i\omega\mu \vec{J}_s + \frac{i}{\omega\varepsilon} \text{gradiv} \vec{J}_s \quad (2.6)$$

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = -\nabla \times \vec{J}_s \quad (2.7)$$

2.2.1. Sonsuz Uzun Mükemmel İletken Silindirik Yapılar İçin 2-boyutlu Sınır Değer Problemi Modellemesi



Şekil 2.2 (a) Sonsuz Uzun Mükemmel İletken Silindirik Yapı

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \text{ve}$$

$$\nabla = \nabla_s + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \quad (2.8)$$

olmak üzere silindirik koordinatlara göre her iki polarizasyon için sınır değer probleminin çözümü şu şekilde tanımlanabilir.

a) TM Polarizasyonu Durumu ($H_z=0$):

$$\nabla_s \times (\vec{E}_s + \vec{E}_z) = -i\omega\mu\vec{H}_s \quad (2.9)$$

$$\nabla_s \times \vec{H}_s = i\omega\varepsilon(\vec{E}_s + \vec{E}_z) \quad (2.10)$$

(2.9) ve (2.10)'dan aşağıdaki denklem seti elde edilebilir:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_s \times \vec{E}_s &= 0 \\ \nabla_s \times \vec{E}_z &= -i\omega\mu\vec{H}_s \\ \nabla_s \times \vec{H}_s &= i\omega\varepsilon\vec{E}_z \\ i\omega\varepsilon\vec{E}_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

(2.11)'den şu sonuçlar çıkarılır:

$$\vec{H}_s = \frac{i}{\omega\mu} \nabla_s \times \vec{E}_z \quad (2.12)$$

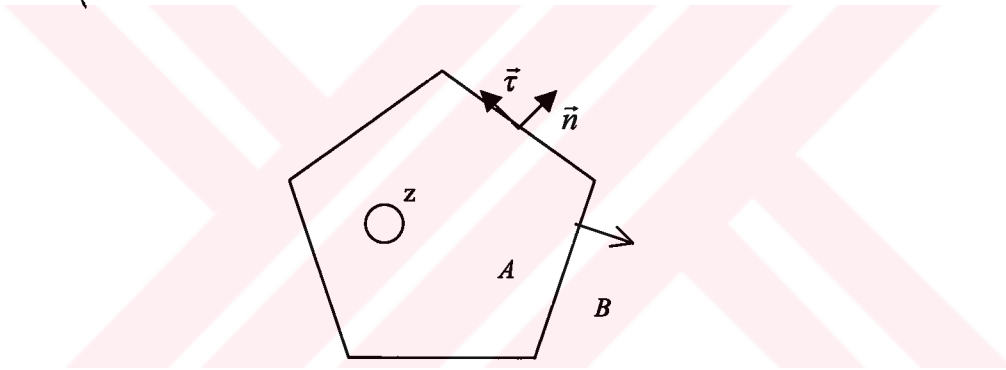
$$\vec{E}_s = \vec{H}_z = 0 \quad (2.13)$$

$$\Delta E_z + k^2 E_z = i\omega\mu J_{sz} \quad (2.14)$$

Burada; E_z : Elektrik alanın z-bileşeni

J_{sz} : Yüzey akımının z-bileşeni

Sınır koşulu gereği mükemmel iletken silindirik yüzey üzerindeki elektrik alanın teğetsel bileşeni sıfır olmalıdır:



Şekil 2.2 (b) Sonsuz Uzun Mükemmel İletken Silindirik Yapının Kesiti

$$E_z|_S = 0 \quad (2.15)$$

Silindirin dielektrik olması durumunda ise elektrik ve magnetik alanın teğetsel bileşenlerinin sürekliliği söz konusu olacağından sınır koşulları şu şekilde düzenlenir:

$$E_{zA} = E_{zB} \quad (\text{Elektrik alanın sürekliliği}) \quad (2.16)$$

$$\vec{H}_{sA} \cdot \vec{\tau} = \vec{H}_{sB} \cdot \vec{\tau} \Rightarrow \frac{1}{\mu_A} (\nabla_s \times \vec{E}_{zA}) \cdot \vec{\tau} = \frac{1}{\mu_B} (\nabla_s \times \vec{E}_{zB}) \cdot \vec{\tau} \text{ 'dan}$$

$$\frac{1}{\mu_A} \frac{\partial E_{zA}}{\partial n} = \frac{1}{\mu_B} \frac{\partial E_{zB}}{\partial n} \quad (\text{Magnetik alanın sürekliliği}) \quad (2.17)$$

b) TE Polarizasyonu Durumu ($E_z=0$):

TM durumu için yazılan (2.9) ve (2.10) denklem seti $E_z=0$ için benzer şekilde yazılıp toparlanırsa,

$$\vec{E}_s = \frac{i}{\omega\epsilon} \nabla_s \times \vec{H}_z \quad (2.18)$$

$$\vec{H}_s = \vec{E}_z = 0 \quad (2.19)$$

$$\Delta H_z + k^2 H_z = -(\nabla \times \vec{J}_s) \quad (2.20)$$

Yine sınır koşulu gereği mükemmel iletken silindirik yüzey üzerindeki elektrik alanın teğetsel bileşeni sıfır olmalıdır:

$$(\vec{E}_s \cdot \vec{\tau}) = 0 \Rightarrow (\nabla_s \times \vec{H}_z) \cdot \vec{\tau} = \nabla_s \cdot (H_z \vec{e}_z \times \vec{\tau}) = 0 \text{ 'den}$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad (2.21)$$

Silindirin dielektrik olması durumunda ise,

$$H_{zA} = H_{zB} \quad (\text{Magnetik alanın sürekliliği}) \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{\epsilon_A} \frac{\partial H_{zA}}{\partial n} = \frac{1}{\epsilon_B} \frac{\partial H_{zB}}{\partial n} \quad (\text{Elektrik alanın sürekliliği}) \quad (2.23)$$

2.2.2 Radyasyon Koşulu

Görüldüğü üzere her iki polarizasyon hali için dalga denklemi sınır koşullarıyla birlikte düzenlenmiştir. Ancak Helmholtz denklemini sağlayan saçılan alan çözümü sınır koşullarının uygulanmasına rağmen yine de tek çözüm vermeyebilir. Bunu için ek koşullar tanımlanmalıdır. Bunlar radyasyon ve ayrıt koşullarıdır.

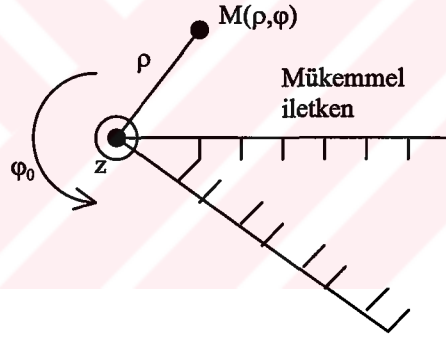
Skaler bir U alanı için radyasyon koşulu şu şekilde formulize edilebilir:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + ikU \right) = 0 \quad (2.24)$$

Buradan anlaşılacağı üzere, propagasyonun zamana bağımlılık değişkeni $e^{\pm i\omega t}$, nin seçimine göre belirlenen yayılma doğrultusu üzerinde, $r \rightarrow \infty$ için sadece giden dalga bileşeni varsayılmakta başka bir deyişle gelen dalga alan yok kabul edilmektedir.

2.2.3 Ayırıt Koşulu

Sınır değer probleminin çözümünün tekliğini sağlayan fiziki koşullardan ikincisi ayırıt koşuludur (edge condition). Prensipten olarak kama, sivri köşeler ve burunlar gibi süreksizliklerin civarında elektromagnetik enerjinin sonlu kalması gerektiği düşüncesine dayalıdır. Buna göre, Şekil 2.3'te verilen geometri dikkate alınırsa her iki polarizasyon durumu için şu sonuçlara ulaşılabilir.



Şekil 2.3 Mükemmel İletken Ayırıt

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.25)$$

TM Koşulu için:

$$(\Delta + k^2)E_z = 0 \quad (2.26)$$

$$\vec{H} = \frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\rho} \left(\vec{e}_\rho \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \vec{e}_\phi \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) = \vec{e}_\rho H_\rho + \vec{e}_\phi H_\phi \quad (2.27)$$

(2.26)'daki dalga denklemi silindirik koordinatlarda yazılır ve elde edilen diferansiyel denklem çözümlerse E_z için aşağıdaki genel çözüm ifadesi elde edilir:

$$E_z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_\nu(k\rho) \sin n\varphi, \quad \nu = \frac{n\pi}{\varphi_0}, n = \overline{1, \infty} \quad (2.28)$$

Buradaki $Z_\nu(k\rho)$ fonksiyonu ν sayısının tamsayı olduğu durumda Neumann, tersi durumda ise Bessel fonksiyonlarıyla ifade edilir.

$$Z_\nu(k\rho) = \begin{cases} N_{\pm\nu}(k\rho) & ; \nu \text{ tamsayı ise,} \\ J_{+\nu}(k\rho) \text{ veya } J_{-\nu}(k\rho)^{(*)} & ; \nu \text{ tamsayı değilse } \end{cases} \quad (2.29)$$

Bessel fonksiyonunun $\rho \rightarrow 0$ için asimptotik davranışları formülde yerine konularsa, alanın $\rho \rightarrow 0$ yaklaşıklık ifadesi elde edilebilir. Buna göre;

$$J_{+\nu}(k\rho) \approx c\rho^\nu, \quad J_{-\nu}(k\rho) \approx c\rho^{-\nu} \quad ; \rho \rightarrow 0 \text{ için} \quad (2.30)$$

$$E_z \approx (c_1\rho^\nu \sin n\varphi \text{ veya } c_2\rho^{-\nu} \sin n\varphi) \quad (2.31)$$

$$H_\rho \approx (c_3\rho^{\nu-1} \cos n\varphi \text{ veya } c_4\rho^{-\nu-1} \cos n\varphi) \quad ; \rho \rightarrow 0 \text{ için} \quad (2.32)$$

$$H_\varphi \approx (c_5\rho^{\nu-1} \sin n\varphi \text{ veya } c_6\rho^{-\nu-1} \sin n\varphi) \quad (2.33)$$

Burada c, c_1, \dots, c_6 birer keyfi reel sayıdır.

Şekil 2.3'teki geometri dikkate alınarak, ayrıt civarındaki yüzeyin sınırladığı bölgede elektromagnetik enerji akışı (2.34) formülünden hesaplanır.

$$P = \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} \quad (2.34)$$

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} (E_z \vec{e}_z \times (H_\rho \vec{e}_\rho + H_\varphi \vec{e}_\varphi)^*) \cdot (-\vec{e}_\rho) \rho_0 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} E_z H_\varphi^* \rho_0 d\varphi$$

Bu denklemde elektrik ve magnetik alan için (2.31) ve (2.33)'teki ifadeler kullanıldığı takdirde C keyfi bir sayı olmak üzere P için,

(*) $J_{+\nu}(k\rho)$ ve $J_{-\nu}(k\rho)$ fonksiyonları lineer bağımsız olmadığından biri seçilir.

$P \approx \{C\rho_0^{+2\nu}$ veya $C\rho_0^{-2\nu}\}$ sonucuna ulaşılır. ν değeri sıfırdan büyük reel bir sayı olduğuna göre, ρ_0 sıfıra giderken, ayrıt yakınındaki enerjinin sonlu kalması şartını $C\rho_0^{-2\nu}$ kısmı sağlamayacaktır. Bu durumda $\rho \rightarrow 0$ için $P \approx C\rho_0^{+2\nu}$ yazılır. Yani; genel çözümü sağlamasına rağmen, ayrıt koşulunu sağlamadığından, negatif indisli Bessel fonksiyonları çıkartılarak çözümde teklik elde edilir. Böylece alan ifadeleri,

$$E_z \approx c_1 \rho^\nu \sin \nu \varphi \quad (2.35)$$

$$H_\rho \approx c_2 \rho^{\nu-1} \cos \nu \varphi \quad (2.36)$$

$$H_\varphi \approx c_3 \rho^{\nu-1} \sin \nu \varphi \quad (2.37)$$

şeklinde yeniden düzenlenir. Ayrıt civarındaki akım yoğunluğu ise aşağıdaki formül yardımıyla belirlenir ve (2.38) ifadesine ulaşılır.

$$\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H} = \vec{e}_\varphi \times (H_\rho \vec{e}_\rho + H_\varphi \vec{e}_\varphi) \Rightarrow \vec{J} = -H_\rho \vec{e}_z = J_z \vec{e}_z$$

$$J_z \approx H_\rho \approx C\rho^{\nu-1} \quad (2.38)$$

Görüldüğü üzere TM polarizasyonu durumunda yüzey akımının sadece bir bileşeni (J_z) mevcuttur.

TE koşulu için de benzer işlemler yapılarak aşağıdaki ifadelere ulaşılır:

$$H_z \approx c_0 + c_1 \rho^\nu \cos \nu \varphi \quad (2.39)$$

$$E_\rho \approx c_2 \rho^{\nu-1} \sin \nu \varphi \quad (2.40)$$

$$E_\varphi \approx c_3 \rho^{\nu-1} \cos \nu \varphi \quad (2.41)$$

$$J_\rho \approx C_0 + C_1 \rho^\nu \quad (2.42)$$

(2.39) ve dolayısıyla (2.42)'de fazladan eklenmiş olarak görülen katsayıların sebebi TE polarizasyonu sağlanma koşuludur. Çünkü c_0 'ın olmaması durumunda, H_z 'deki $\cos \nu \varphi$ ifadesi $\varphi = \varphi_0/2$, ($n=1, \dots$) değerlerinde sıfır olduğundan, H_z alanı bölge içinde bazı noktalarda olmayacak, dolayısıyla TE koşulu sağlanmayacaktır.

2.3. Eliptik-Silindirik Koordinat Sistemi

Önceki bölümde bahsedildiği üzere, BÜT'de silindirik yapıların 2-boyutlu kesitleri her biri dejenere olmuş elipsler şeklinde ifade edilen parçalara ayrılırlar. Her bir segment için lokal eliptik koordinat sistemi tanımlanır. Bu yüzden dalga denklemi eliptik koordinatlarda çözülmeli ve sınır koşulları buna göre sağlanmalıdır. Bu bölümde koordinat sistemi temel elemanları (birim vektör, yol vektörü vs.) ve operatörlerin kartezyen koordinatlardaki ifadelerinin eliptik koordinatlardaki karşılıkları tespit edilecektir.



$$x = x(q_1, q_2, q_3), y = y(q_1, q_2, q_3), z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (2.43)$$

$$\vec{r} = \vec{e}_x x(q_1, q_2, q_3) + \vec{e}_y y(q_1, q_2, q_3) + \vec{e}_z z(q_1, q_2, q_3) \quad (2.44)$$

$$\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_v}, \quad v=1,2,3 \quad \text{olmak üzere;}$$

Burada en genel durumda birim vektörler,

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|}, \quad v=1,2,3 \quad (2.45)$$

biçiminde ve Lamé operatörü,

$$H_v = |\vec{r}_v|, \quad v=1,2,3 \quad (2.46)$$

şeklinde tanımlanır. Birim yol, yüzey ve hacim elemanları ise,

$$dl_v = |d\vec{r}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dq_v} \right| dq_v = H_v dq_v \quad (2.47)$$

$$dS_{\nu\mu} = dl_{\nu} dl_{\mu} = H_{\nu} H_{\mu} dq_{\nu} dq_{\mu} \quad (2.48)$$

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (2.49)$$

olarak ifade edilerek düzenlenebilir.

Aşağıdaki bağıntıyı kullanarak $(x,y,z) \rightarrow (\xi,\eta,z)$ koordinat dönüşümü gerçekleştirilebilir:

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= f \cosh(\xi + i\eta) \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + iy &= f [\cosh \xi \cosh i\eta + \sinh \xi \sinh i\eta] \\ &= f [\cosh \xi \cos \eta + i \sinh \xi \sin \eta] \end{aligned}$$

Buradan şu dönüşüm denklem setine ulaşılır:

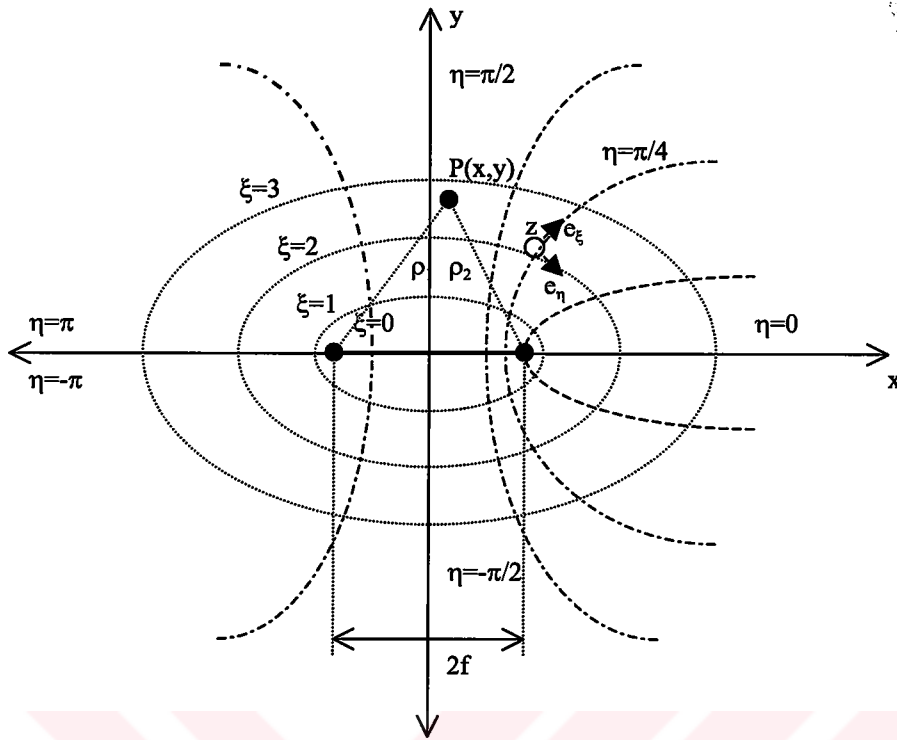
$$\left. \begin{aligned} x &= f \cosh \xi \cos \eta \\ y &= f \sinh \xi \sin \eta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

(2.51)'de ters dönüşümler yapılarak \cos , \cosh , \sin , \sinh ifadelerinin karşılıkları çıkarılırsa temel trigonometrik eşitliklerden (2.52) ve (2.53)'teki elips ve hiperbol denklemlerine ulaşılır:

$$\cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(f \cosh \xi)^2} + \frac{y^2}{(f \sinh \xi)^2} = 1 \quad (2.52)$$

$$\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(f \cos \eta)^2} - \frac{y^2}{(f \sin \eta)^2} = 1 \quad (2.53)$$

Görüldüğü üzere (2.52)'de ξ 'ye göre elipsoit, (2.53)'te ise η 'ya göre hiperbol şekilleri elde edilmektedir ($y=0$ için $x=\pm f$ olmak üzere). Buna göre, Şekil 2.4'te ξ ve η 'ya bağlı grafikler çizilmiştir:



Şekil 2.4 ξ ve η 'ya Bağlı Elipsoit ve Hiperbol Grafikleri

(2.51) ve (2.52)'yi kullanarak eliptik koordinatlarda düzenlenmiş Laplace katsayısı, birim yol ve alan değerleri, gradyent, diverjans, rotasyonel, Laplace ifadeleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$H_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{f^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \eta + f^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta} = \sqrt{f^2 (\cosh^2 \xi - 1) \cos^2 \eta + f^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} H_\xi &= f \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \\ H_\eta &= f \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \\ H_z &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

$$\left. \begin{aligned} dl_\xi &= H_\xi d\xi \\ dl_\eta &= H_\eta d\eta \\ dl_z &= dz \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

$$dS_{\xi\eta} = H_\xi H_\eta d\xi d\eta \quad (2.56)$$

$$\text{grad}U = \nabla U = \frac{1}{f\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \left[\bar{e}_\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{e}_\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + \bar{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.57)$$

$$\text{div} \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F} = \frac{1}{f\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \left[\frac{\partial(F_\xi H_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(F_\eta H_\eta)}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial(F_z H_z)}{\partial z} \quad (2.58)$$

$$\text{rot} \bar{F} = \nabla \times \bar{F} = \frac{1}{f\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \begin{vmatrix} \bar{e}_\xi H_\xi & \bar{e}_\eta H_\eta & \bar{e}_z H_z \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\xi F_\xi & H_\eta F_\eta & F_z \end{vmatrix} \quad (2.59)$$

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{1}{f^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.60)$$

Eliptik koordinatlardaki birim vektörler de benzer biçimde bulunabilir:

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_\xi &= \frac{\partial \bar{r} / \partial \xi}{H_\xi} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} (\bar{e}_x \sinh \xi \cos \eta + \bar{e}_y \cosh \xi \sin \eta) \\ \bar{e}_\eta &= \frac{\partial \bar{r} / \partial \eta}{H_\eta} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} (-\bar{e}_x \cosh \xi \sin \eta + \bar{e}_y \sinh \xi \cos \eta) \\ \bar{e}_z &= \bar{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Şekil 2.4'teki P(x,y) noktasının, y=0'da konuşlandırılmış $\xi=0$ dejenere elipsin kenarlarına uzaklığı olan, ρ_1 ve ρ_2 değerleri ise,

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x+f)^2 + y^2} = f(\cosh \xi + \cos \eta) \\ \rho_2 &= \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = f(\cosh \xi - \cos \eta) \\ \rho_1 \rho_2 &= f^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

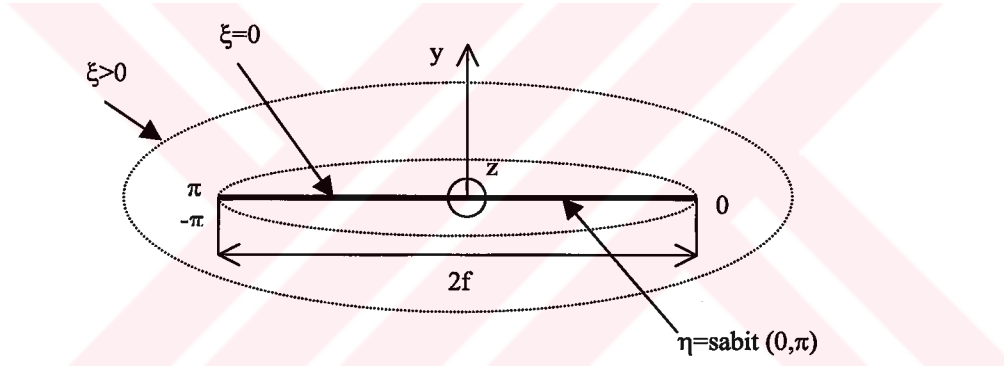
olarak verilir.



2.4. Sınır Değer Probleminin Eliptik Koordinatlarda

Çözümü

Bilindiği üzere elektromagnetik dalga saçılımı problemlerinde analitik çözümler elde edilirken öncelikle sınır koşullarına uygun koordinat sistemi seçilir ve Helmholtz denklemi buna göre çözülür. BÜT tekniğinde sınır yüzeyini oluşturan segmentleri modellerken eliptik koordinat sistemi kullanıldığından dalga denklemi de ona uygun biçimde düzenlenecek ve çözümü aşağıdaki gibi yapılacaktır. z-ekseni boyunca yatırılmış, sonsuz uzun, sonsuz ince ve $2f$ genişliğindeki şerit hattın sınır değer problemini dikkate alalım. Şekil 2.5'te bu yapının kesit geometrisi görülmektedir.



Şekil 2.5 Sonsuz Uzun Şerit Hat Kesiti

2.4.1. Helmholtz Denklemine Değişkenlere Ayrıştırılması

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (2.63)$$

Yukarıdaki Helmholtz denklemi, (2.60) ifadesi kullanılarak eliptik koordinatlarda açılır, (2.65)'teki biçimde değişkenlerine ayrılır ve (2.64)'te yerine konular ise (2.66) elde edilir:

$$\frac{1}{f^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0 \quad (2.64)$$

$$U(\zeta, \eta, z) = M(\zeta, \eta) \cdot N(z) \quad (2.65)$$



$$\left\{ \frac{1}{Mf^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} \right] + k^2 \right\} + \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} = 0 \quad (2.66)$$

Neticede $M(\xi, \eta)$ ve $N(z)$ 'e göre iki parçaya ayrılmış olan bu denklemin her (ξ, η, z) için geçerli olabilmesi için parantez içindeki ve dışındaki ifadelerin her birinin aynı sabite eşit olması gereklidir. Bu durumda (γ^2 bir sabit olmak üzere),

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Mf^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} \right] + k^2 &= -\gamma^2 \\ \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} &= \gamma^2 \end{aligned} \right\}$$

(2.67) kullanılarak düzenleme yapılırsa (2.68)'deki denklem setine ulaşılır.

$$\chi^2 = k^2 + \gamma^2 \quad (2.67)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} + \chi^2 f^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)M &= 0 \\ \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} - \gamma^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

Burada $M(\xi, \eta)$ fonksiyonu (2.69) özdeşliği vasıtasıyla toparlandıktan sonra tekrar ξ ve η 'ya göre değişkenlerine ayrılırsa nihayetinde (2.74) ve (2.75)'teki *Mathieu* ve *Modifiye Mathieu* fonksiyonlarının denklemleri elde edilir.

$$\frac{1}{2}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta) = (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} + \frac{\chi^2 f^2}{2}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)M = 0 \quad (2.70)$$

$$M(\xi, \eta) = T(\eta)R(\xi) \quad \text{ve} \quad (2.71)$$

$$q = \left(\frac{\chi f}{2} \right)^2 \quad \text{olmak üzere,} \quad (2.72)$$



$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + 2q(\cosh 2\xi - \cos 2\eta) = 0 \quad (2.73)$$

Yine aynı yöntemle, $-h$ 'in köşeli parantezin içine eşit bir sabit olması koşuluyla,

$$\underbrace{\left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + 2q \cosh 2\xi \right]}_h + \underbrace{\left[\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - 2q \cos 2\eta \right]}_{-h} = 0$$

Mathieu ve *Modifiye Mathieu* denklem setlerine ulaşılır.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + (h - 2q \cos 2\eta)T = 0 \quad \text{Mathieu Denklemi} \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} - (h - 2q \cosh 2\xi)R = 0 \quad \text{Modifiye Mathieu Denklemi} \quad (2.75)$$

2.4.2. Helmholtz Denkleminin Çözümü

Bölüm 2.4.1'deki ifadeler Ek 1'de verilmiş olan Mathieu fonksiyonu özellikleri de kullanılarak toparlanırsa 2-boyutlu dalga denkleminin eliptik koordinatlardaki çözümüne ulaşılır.

$$\Delta U + k^2 U = 0$$

$$\left. \begin{aligned} x &= f \cosh \xi \cos \eta \\ y &= f \sinh \xi \sin \eta \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

$$\frac{1}{f^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right] + k^2 U = 0 \quad (2.77)$$

$$U(\xi, \eta + 2\pi) = U(\xi, \eta) \quad (2.78)$$

$$U(\xi, \eta) = T(\eta) \cdot R(\xi)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + (h - 2q \cos 2\eta)T &= 0 \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} - (h - 2q \cosh 2\xi)R &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} h = a_n &\implies ce_n(\eta, q), Me_n^{(2)}(\xi, q) \\ h = b_n &\implies se_n(\eta, q), Ne_n^{(2)}(\xi, q) \end{aligned}$$



Radyasyon koşulunun uygulanması sonucu fonksiyonun radyal bileşenleri olan $Me_n^{1,2}(\xi, q)$ ve $Ne_n^{1,2}(\xi, q)$ ifadelerinde sadece (2) indisli parçalar çözüme dahil edilecektir [10].

$$U_n^{(1)} = Me_n^{(2)}(\xi, q).ce_n(\eta, q) \rightarrow \text{Çift Mathieu fonk.}$$

$$U_n^{(2)} = Ne_n^{(2)}(\xi, q).se_n(\eta, q) \rightarrow \text{Tek Mathieu fonk.}$$

Mathieu fonksiyonlarının tek ve çift çözümleri olduğundan, U_n 'in genel çözümünde her ikisinin de katkısı dikkate alınmalıdır. Böylece, (2.79)'da verilen öz fonksiyonların toplamına ulaşılır.

$$U(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{Ne_n^{(2)}(\xi, q)}{Ne_n^{(2)}(0, q)} se_n(\eta, q) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n \frac{Me_n^{(2)}(\xi, q)}{Me_n^{(2)}(0, q)} ce_n(\eta, q) \right] \quad (2.79)$$

Burada, toplamın her iki parçasının da paydasında görülen $Ne_n^{(2)}(0, q)$ ve $Me_n^{(2)}(0, q)$ değerleri ξ 'ye göre sabit olup nitelik olarak çözümde herhangi bir değişikliğe sebebiyet vermemektedir (ilerideki bazı işlemlerde kolaylık sağlaması amacıyla eşitliğe konulmuştur). Şerit üzerindeki sınır koşulunun,

$$U(0, \eta) = f(\eta) \quad (2.80)$$

olarak tanımlanması durumunda aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir.

a) $f(\eta)$ çift ise:

$$f(\eta) = U(0, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n se_n(\eta, q) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n ce_n(\eta, q) \quad ; \quad \eta \in (-\pi, \pi) \quad (2.81)$$

Denklemin her iki tarafı $se_m(\eta, q)$ fonksiyonu ile çarpılıp $(-\pi, \pi)$ aralığında entegrali alınırsa,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\eta) se_m(\eta, q) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} se_n(\eta, q) se_m(\eta, q) d\eta + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_{-\pi}^{\pi} ce_n(\eta, q) se_m(\eta, q) d\eta \quad (2.82)$$

Bilindiği üzere ce_n çift, se_n ise tek fonksiyondur ve ortogonalite özelliği uyarınca tek ve çift fonksiyonların birbirleriyle çarpımının entegrali sıfır olacaktır. Bu durumda,

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} se_n(\eta, q) se_m(\eta, q) d\eta = 0 \Rightarrow 2A_m \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \underline{A_n = 0} \quad (2.83)$$

Benzer biçimde Denklemin her iki tarafı $ce_m(\eta, q)$ fonksiyonu ile çarpılıp $(-\pi, \pi)$ aralığında entegrali alınırsa,

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^{\pi} \underbrace{ce_n(\eta, q) ce_m(\eta, q) d\eta}_{\substack{m \neq n \Rightarrow \text{sıfır} \\ m = n \Rightarrow \pi/2}} = 2 \int_0^{\pi} f(\eta) ce_m(\eta, q) d\eta$$

$$\Rightarrow B_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\eta) ce_m(\eta, q) d\eta \quad (2.84)$$

Görüldüğü üzere $f(\eta)$ çift olması durumunda $A_n = 0$ çıkar ve U fonksiyonu sadece ikinci parçasıyla temsil edilir:

$$U(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{Me_n^{(2)}(\xi, q)}{Me_n^{(2)}(0, q)} ce_n(\eta, q) \quad (2.85)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{Me_n^{(2)'}(0, q)}{Me_n^{(2)}(0, q)} ce_n(\eta, q) \quad (2.86)$$

(2.86)'da yine $ce_m(\eta, q)$ fonksiyonunun diklik özelliği kullanılır ve $(0, \pi)$ aralığında entegrali alınırsa B_n yeniden düzenlenebilir.

$$B_n = \frac{2}{\pi} \frac{Me_n^{(2)}(0, q)}{Me_n^{(2)'}(0, q)} \int_0^{\pi} \left. \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} ce_n(\eta, q) d\eta \quad (2.87)$$

$\frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}$ ifadesini $\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^+}$ ve $\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^-}$ cinsinden yazalım. Dejenere elipsoit şerit hat

üzerinde $y = \pm 0$ için $\vec{e}_y = \pm \vec{e}_\xi$ olacağından ($|x| < f$ durumunda),

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{\substack{y=0^+ \\ |x|<f}} &= \vec{e}_y \cdot \nabla U = \vec{e}_\xi \cdot \nabla U = \vec{e}_\xi \cdot \left\{ \frac{1}{f \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \vec{e}_\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} \vec{e}_\eta \right) \right\} \Big|_{\xi=0} \\ \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{\substack{y=0^+ \\ |x|<f}} &= \frac{1}{f |\sin \eta|} \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta \in (0, \pi)}} = \frac{1}{f \sin \eta} \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta \in (0, \pi)}} \end{aligned} \quad (2.88)$$

ve,

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{\substack{y=0^- \\ |x|<f}} = -\vec{e}_\xi \cdot \nabla U = -\frac{1}{f |\sin \eta|} \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta \in (-\pi, 0)}} = \frac{1}{f \sin \eta} \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta \in (-\pi, 0)}} \quad (2.89)$$

ifadeleri elde edilir. Yani,

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^-} = \frac{1}{f \sin \eta} \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta \in (-\pi, 0)}} = -\frac{1}{f \sin \eta} \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta \in (0, \pi)}} = \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^-} \quad (2.91)$$

biçimindedir. Şerit hat geçişi boyunca ki $\frac{\partial U}{\partial y}$ atlaması hesaplanırsa,

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y} \right] = \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^+} - \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^-} = 2 \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^+} \quad (2.92)$$

Bu durumda B_n aşağıdaki gibi olacaktır:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \frac{Me_n^{(2)}(0, q)}{Me_n^{(2)'(0, q)} \int_0^\pi \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^+} ce_n(\eta, q) f \sin \eta d\eta \quad (2.93)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \frac{Me_n^{(2)}(0, q)}{Me_n^{(2)'(0, q)} \int_0^\pi \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right] ce_n(\eta, q) f \sin \eta d\eta \quad (2.94)$$

b) $f(\eta)$ tek ise:

$f(\eta)$ 'in tek fonksiyonun kabul edilmesi durumunda ise, yukarıdakine benzer işlemler yapılması neticesinde (2.81)'de bu sefer $B_n=0$ olacağı sonucu çıkacaktır.

Buna göre,

$$U(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{Ne_n^{(2)}(\xi, q)}{Ne_n^{(2)}(0, q)} se_n(\eta, q) \quad (2.95)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_{y=0^+} se_n(\eta, q) d\eta \quad (2.96)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [U] se_n(\eta, q) d\eta \quad (2.97)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \frac{Ne_n^{(2)}(0, q)}{Ne_n^{(2)'}(0, q)} \int_0^{\pi} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^+} se_n(\eta, q) f \sin \eta d\eta \quad (2.98)$$

eşitlikleri elde edilecektir. (2.94) ve (2.97) eşitlikleri A_n ve B_n 'in fiziksel karşılıklarını anlamamıza imkan vermektedir. Açık sınırlarda ("open boundary", bkz. şekil 2.6), $f(\eta)$ 'nin tek yada çift olması TE veya TM polarizasyonu ile ilgilidir. Örneğin, TM polarizasyonu durumu ($H_z=0$) seçilmiş olsun. Bu durumda $U=E_z$ elektrik alanının teğetsel bileşenini temsil eder ve sınır koşulları özelliklerinden iyi bilindiği üzere mükemmel iletken şerit üzerinde $U^T=0$ olur. Öyleyse saçılan alan ifadesi olan $U(\xi, \eta)$ şerit üzerinde gelen alanın tersine eşit olacaktır. Bu takdirde $\xi=0; \eta \in (-\pi, \pi)$ üzerinde tanımlı şerit hattın üst $\eta \in (0, \pi)$ ve alt $\eta \in (-\pi, 0)$ çizgileri boyunca U değerleri eşit çıkacağından $f(\eta)$ çift fonksiyon karakteristiği gösterecektir. (2.12)'den,

$$H_x = \frac{i}{\omega \mu} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.99)$$

elde edilir. Yani $\left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]$, ince şerit hat üzerindeki elektrik akımının yatay bileşeniyle

(J_x^m) ilişkili çıkar. Diğer akım bileşeni (J_z) ise $[U]$ ile orantılıdır.

TE durumu dikkate alındığında ise ($U=H_z$, $E_z=0$ hali),

$$E_x = -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.100)$$

$\left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]$ ince şerit hat üzerindeki elektrik akımının yatay bileşeniyle (J_z), diğer akım bileşeni (J_x^m) ise $[U]$ ile orantılı olacaktır.

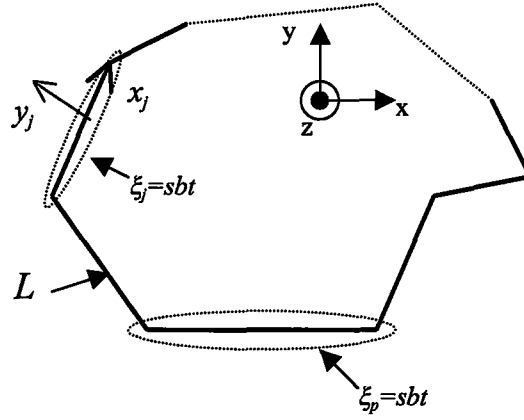
Kapalı sınırlarda ise, sınır koşulu konturun sadece dış yüzeyinde tanımlı olduğundan durum biraz farklıdır. Burada her iki polarizasyon durumu için de, hem çift hem de tek fonksiyonlar kullanılabilir. Ancak Mathieu fonksiyonlarının yakınsaklık özellikleri dolayısıyla genelde çift kısım $Me_n^{(2)}(\xi, q)$ tercih edilmektedir [10]. Yalnız kapalı sınırlar aynı zamanda boşluk rezonatörü olduklarından, çözüm yapılırken dikkat edilmesi gereken en önemli nokta saçıcının rezonans frekanslarında çalışmamaktır. Aksi takdirde çözümler teklik ve kararlılık özelliklerini kaybedebilirler.

2.5. Çok açılı Mükemmel İletken Yüzeylerden 2-boyutlu TM-polarize Dalga Saçılımı BÜT Modeli

Bir iletken cisim serbest uzayda konuşlandırıldığında, ona doğru gelen alan cismin iletken yüzeyi üzerinde elektriksel akım ve yük indükler. Bu akım ve yükler etrafa saçılan elektrik ve magnetik alanları oluştururlar. Serbest uzayda toplam alan, gelen alan ile bu saçılan alanın toplamına eşittir. Bununla birlikte, uzaydaki tüm elektrik ve magnetik alan dağılımları da aynı elektromagnetik sınır koşullarını sağlamaktadır. Sınır koşulları gereği mükemmel iletken yüzey üzerinde toplam elektrik alanın teğetsel bileşeni sıfırdır ve magnetik alanın teğetsel bileşeni de indüklenen elektriksel akımı verir.

Mükemmel iletken saçıcının kapalı yada açık bir silindirik sınıra sahip olduğu farz edilsin. Böyle bir cismin kesiti Şekil 2.6'da görülmektedir. Saçıcı sınır yüzeyi N parçadan oluşan bir L konturundan ibarettir.

$$L = \bigcup_{j=1}^N L_j$$



Şekil 2.6 Çok Açılı Mükemmel İletken bir Saçıcının Kesiti

Önceki bölümde bahsedildiği üzere temel (x, y, z) koordinat sistemine ek olarak her L_j ($j=1, \dots, N$) parçası için lokal bir (x_j, y_j) kartezyen koordinat sistemi devreye sokulacaktır. Bu lokal sistemler için, segmentin ortası orijin noktası olarak seçilecektir ve Oy_j eksenini L_j segmentinin normal yönünde olacaktır. j . parçanın uzunluğu $2f_j$ ye eşittir.

Gelen alanın TM-polarize olduğu durumda, $H_z=0$ olarak ele alındığından, elektrik alanın z-bileşeni mevcut olacaktır. $U=E_z$ ifadesi, saçıcının dışındaki tüm noktalarda kaynaklar tarafından üretilen elektrik alan z-bileşeni (U_0) ile saçılan elektrik alan z-bileşeninin (U^s) toplamından ibarettir.

$$U = U^s + U_0 \quad (2.102)$$

Saçılan alan da bir dalga olduğundan, Helmholtz denklemini ve (2.15)'ten Dirichlet sınır koşulunu sağlar:

$$\Delta U^s + k^2 U^s = 0 \quad (2.103)$$

$$U|_L = 0 \Rightarrow U^s|_L = -U_0|_L \quad (2.104)$$

Ayrıca, bunlara ek olarak ayırık ve radyasyon koşulları da sağlanmalıdır.

(2.51) vasıtasıyla, (ξ_j, η_j) lokal eliptik koordinat sistemini kartezyen koordinatlara bağlayan eşitlik yazılsın:

$$\begin{aligned} x_j &= f_j \cosh \xi_j \cos \eta_j \\ y_j &= f_j \sinh \xi_j \sin \eta_j \end{aligned} \quad ; j=1, \dots, N \quad (2.105)$$

Burada ξ_j, η_j ; sırasıyla eliptik radyal ve açıl koordinatlarıdır. Dolayısıyla sınırın her bir segmenti dejenere elips olarak ele alınabilir $\{(\xi_j, \eta_j) |_{\xi=0}; \eta_j \in (-\pi, \pi)\}$. Sonraki bölümlerde, hem açık hem de kapalı yüzeyler için, U 'nun bölgesi sonsuz basit domenlerin ($\xi_j > 0; j=1, \dots, N$) ortak parçası olarak hesaba katılacaktır.

Helmholtz denklemi lineer olduğuna göre, bu bölgedeki saçılan alan değeri tüm parçalardan saçılan alanların bileşimi olarak yazılabilir:

$$U^s = \sum_{j=1}^N U_j \quad (2.106)$$

$\xi_j > 0$ bölgesi U_j fonksiyonunun tanım domeni olsun ve U_j 'nin radyasyon koşulunu sağladığı varsayılınsın. Eliptik koordinatlarda yazılan Helmholtz denklemi bu bölgede değişkenlere ayrıştırma yöntemiyle çözülebilir. Bu durumda U_j fonksiyonu, (2.79)'dan Mathieu fonksiyonları cinsinden ifade edilir.

Öncelikle açık saçıcı durumu ele alınsın. (2.104)'teki sınır koşulu lokal eliptik koordinat sisteminde şöyle yazılır:

$$\left. \begin{aligned} U^s |_{y_j=0^+} &= -U_0 |_{y_j=0^+} \\ U^s |_{y_j=0^-} &= -U_0 |_{y_j=0^-} \end{aligned} \right\}; j = \overline{1, N} \quad (2.107)$$

ya da (2.106) kullanılarak başka bir deyişle:

$$\left. \begin{aligned} U_j |_{y_j=0^+} &= \left[-\sum_{p \neq j} U_p - U_0 \right]_{y_j=0^+} \\ U_j |_{y_j=0^-} &= \left[-\sum_{p \neq j} U_p - U_0 \right]_{y_j=0^-} \end{aligned} \right\} \rightarrow |x_j| < f_j; j, p = \overline{1, N} \quad (2.108)$$

Burada, dalga denkleminin çözümü olan U_0 ve U_p ($p \neq j$) fonksiyonları süreklidir ve L_j boyunca atlama yapmazlar. Yani;

$$\left. \begin{aligned} U_j \Big|_{y_j=0^+} &= U_j \Big|_{y_j=0^-} \\ U_j(0, \eta_j) &= U_j(0, -\eta_j) \end{aligned} \right\} \quad (2.109)$$

'dur. Öyleyse $U_j(0, \eta_j)$ fonksiyonu η_j değişkenine göre çift fonksiyondur ve (2.85) kullanılarak şu şekilde düzenlenebilir:

$$U_j = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j \frac{Me_n^{(2)}(\xi_j, q_j)}{Me_n^{(2)}(0, q_j)} ce_n(\eta_j, q_j) \quad ; \quad q_j = \left(\frac{kf_j}{2} \right)^2 \quad (2.110)$$

Şimdi de, L konturunun kapalı olduğu saçıcı durumu ele alınsın. Bu takdirde (2.107) ve (2.108)'deki sınır koşullarının sadece ilk parçaları geçerli olacaktır ama yine de U_j fonksiyonu L_j segmentinin dışındaki her yerde tanımlıdır. U_j fonksiyonunun tekliği, sınır koşulları segmentin öbür yüzüne genişletilmek suretiyle sağlanacaktır. η_j değişkenine göre çift fonksiyon olan U_j , genişletilmiş sınır değerleri kullanılmak suretiyle, yine (2.110) şeklinde ifade edilebilir. Böylece (2.110) formülü kapalı konturlar için de geçerli olur. Sınır değerlerin çift yönlü genişletilmesindeki temel düşünce mükemmel iletken saçıcının kapalı iletken ekrandan oluşan bir kavite olarak ele alınmasıdır.

Bilinmeyen $\{D_n^j\}; (j = \overline{1, N})$ katsayılarını belirlemek için verilen sınır koşullarının uyarlanması gereklidir. (2.110) ve (2.106) denklemleri (2.108)'de yerine konulursa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n^j ce_n(\eta_j, q_j) = \left[- \sum_{p \neq j} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^p \frac{Me_n^{(2)}(\xi_p, q_p)}{Me_n^{(2)}(0, q_p)} ce_n(\eta_p, q_p) - U_0 \right]_{\xi_j=0} \quad (2.111)$$

Eşitliğin her iki tarafı $\frac{2}{\pi} ce_m(\eta_j, q_j)$ ile çarpılıp, $(0, \pi)$ aralığında entegre edildiğinde elde edilecek sonuç,

$$D_m^j = -\sum_{p \neq j} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^p \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_p, q_p)}{Me_n^{(2)}(0, q_p)} ce_n(\eta_p, q_p) \right]_{\xi_j=0} ce_m(\eta_j, q_j) d\eta_j \right\} \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_0|_{\xi_j=0} ce_m(\eta_j, q_j) d\eta_j \quad (2.112)$$

ya da başka bir deyişle,

$$D_m^j + \sum_{p \neq j} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^{jp} D_n^p = C_m^j \quad ; \quad j = \overline{1, N}, m = \overline{0, \infty} \quad (2.113)$$

olacaktır. Burada;

$$a_{mn}^{jp} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_p, q_p)}{Me_n^{(2)}(0, q_p)} ce_n(\eta_p, q_p) \right]_{\xi_j=0} ce_m(\eta_j, q_j) d\eta_j \quad (2.114)$$

$$C_m^j = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_0|_{\xi_j=0} ce_m(\eta_j, q_j) d\eta_j \quad (2.115)$$

'dir. (2.112)'de Mathieu fonksiyonlarının diklik (ortogonalite) özellikleri kullanılmıştır [bkz. Ekler].

(2.113) ifadesi, bilinmeyen $\{D_n^j\}; (j = \overline{1, N})$ katsayılarına bağlı, sonsuz lineer cebrik denklem sistemi (SLAE) şeklindedir. Bu sistem kesme (truncation) prosedürü uygulamak suretiyle çözülebilir. (2.114) ve (2.115) entegralleri de sayısal yollarla belirlenebilir.

Bir kez $\{D_n^j\}; (j = \overline{1, N})$ katsayıları tespit edildikten sonra, saçıcının tüm karakteristikleri (yakın ve uzak alan diyagramları, akım dağılımı grafikleri ve RKA değerleri) kolayca bulunabilecektir.

Burada, nümerik analiz açısından dikkat edilmesi gereken en önemli husus çözümün güvenilirliği ve kararlılığının sağlanmasıdır. Cebrik denklem setinin 2. türden sistem olması dolayısıyla kararlılığı mevcuttur [Türk, 1998]. Bununla birlikte, söz konusu kapalı bölge içindeki elektromagnetik enerjinin sonlu kalması koşulu da incelenerek metoda güven artırılabilir.



(2.110) denkleminin temsil ettiği sınır değer problemi çözümünün yakınsaklığına bakıldığında,

$$D_n^j = O\left(\frac{1}{n^{2+\chi}}\right) \quad ; \chi > 0, n \rightarrow \infty \quad (2.116)$$

sonucuna ulaşılır¹[12]. Buradan anlaşılacağı üzere, çözüm denklem sisteminin yakınsaması oldukça hızlı olacak ve nümerik uygulamalarda çok büyük kesim sayısı kullanmaya gerek kalmayacaktır. Böylece çözülebilir işlem boyutu genişleyecek, çözüm hızı artacaktır.

(2.110) eşitliğindeki açılımla tanımlanan saçılan alanın ayırıt koşulunu sağlayıp sağlamadığının incelemesini yapalım. Bunun için, bölüm 2.2.3'te açıklandığı üzere, enerjinin kapalı bir S bölgesinde sınırlı kaldığının gösterimi gerekmektedir. $\{D_n^j\}; (j = \overline{1, N})$ içinde konuşlandırılmış, herhangi bir kapalı bölgedeki enerjinin sınırlı olacağını garantilemeye yetecek bir koşulun olduğu kabul edilsin. Yani,

$$\iint_S (|U|^2 + |\text{grad}U|^2) ds < \infty \quad (2.117)$$

şartı sağlanmalıdır. Parça sayısının (N) sınırlı olduğu dikkate alınırsa, (2.117) aşağıdaki eşitsizliğe dönüştürülebilir:

$$\iint_S (|U_j|^2 + |\text{grad}U_j|^2) ds < \infty \quad ; j = \overline{1, N} \quad (2.118)$$

Bu ifadede, (2.119) ve (2.120)'daki Minkowski eşitsizlikleri kullanılırsa, entegralin içindeki parçalar negatif değer olamayacağından (2.121) entegrallerinin her birinin sınırlı olması gerektiği neticesine varılır.

$$\iint_S |U|^2 ds = \iint_S \left| \sum_{j=0}^N U_j \right|^2 ds \leq \left(\sum_{j=0}^N \left(\iint_S |U_j|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (2.119)$$

¹ Bu kriter tek Mathieu fonksiyonları gösterimi kullanıldığında $D_n^j = O(1/n)$ şeklindedir. Yakınsama daha yavaş olmakla birlikte yine de (2.122) koşulunu sağlamaktadır [10].

$$\iint_S |\text{grad}U|^2 ds \leq \left(\sum_{j=0}^N \left(\iint_S |\text{grad}U_j|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$



$$\iint_S |U_j|^2 ds < \infty \quad , \quad \iint_S |\text{grad}U_j|^2 ds < \infty \quad (2.121)$$

(2.121)'de verilen eşitsizlikler (2.56) ve (2.110) yardımıyla toparlanırsa, enerjinin sınırlı kalması için katsayılar matrisinin aşağıdaki şartı gerçekleşmesi gerektiği sonucu elde edilir [10].

$$\sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} |D_n^j|^2 (n+1) < \infty \quad (2.122)$$

Görüldüğü üzere (2.116)'da verilen yakınsaklık kriteri (2.122) koşulunu kolayca yerine getirmektedir. Bu durumda (2.110) eşitliğiyle verilen saçılan alan ifadesinin ayrıt koşulunu sağladığı görülmektedir.

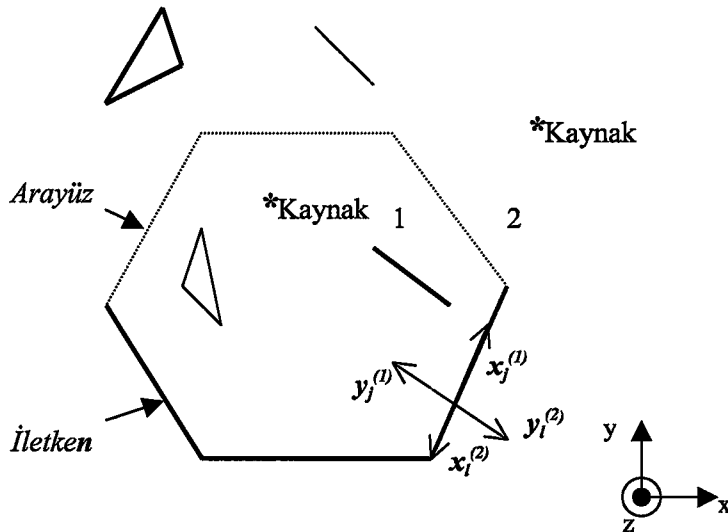


3. DIELEKTRİK YÜKLÜ HORN ANTEN ANALİZİ

Bu kısımda, bölüm 2’de verilen BÜT formülasyonunun 2-boyutlu dielektrik yüklü horn anten yapısına uygulanmasının analizi yapılacaktır. Öncelikle incelenecek yapıya temel teşkil eden çok açılı metal-dielektrik silindir için TM-polarize dalga saçılımı modellenecek, daha sonra horn geometrisine uyarlanarak sayısal sonuçlar elde edilecektir. Bu neticelerin ışığı altında, anten karakteristiğini iyileştirici konfigürasyonlar araştırılacak ve analiz sonuçları bölüm 4’te geniş biçimde ele alınacaktır.

3.1. Çok açılı Metal-Dielektrik Silindirden Dalga Saçılımı Modeli

Burada ele alınacak yapı genel itibarla, elektromagnetik kaynakları içeren ve çok açılı sınırlardan oluşan iki parça bölgeden oluşmaktadır. Sınır konturları mükemmel iletken parçalar ve arayüzlerden teşkil edilmiştir. Böylece uygulamada ilgilenilen çok sayıda nesnenin analizi mümkün olabilmektedir. Bu genel yapının geometrik kesiti Şekil 3.1’de görülmektedir.



Şekil 3.1 Çok Açılı Metal-Dielektrik Yapı Konturu



Öncelikle TE ve TM polarizasyonu durumu birlikte ele alınsın. Bölge 1 ve 2'nin doldurulduğu homojen, izotropik ve kayıpsız ortamın bünye parametreleri sırasıyla ϵ_{r1} , μ_{r1} ve ϵ_{r2} , μ_{r2} olsun. Her iki bölge de kaynakları ve açık yada kapalı mükemmel iletken eklemeleri içerebilir. TE sürümünde, yakınsama problemi dolayısıyla [12], açık eklemeler sadece ayrık şeritler biçiminde olmalıdır. $(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})$ lokal koordinat sisteminde k 'nci bölgenin j 'inci sınır parçasındaki $Oy_j^{(k)}$ ekseninin yönü k bölgesine doğru alınmıştır. $(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})$ sisteminin vektörel doğrultusu $\hat{x}_j^{(k)} \times \hat{y}_j^{(k)} = \hat{z}$ bazında belirlenmiştir.

$U^{(k)}$ fonksiyonu toplam elektrik (TM durumu) yada magnetik (TE durumu) alanın z-bileşenini temsil etsin ve $N^{(k)}$ ifadesi k bölgesinin sınır parçalarının seti olsun. Öyleyse,

$$U^{(k)} = \sum_{j \in N^{(k)}} U_j^{(k)} + U_0^{(k)} \quad ; k=1,2 \quad (3.1)$$

olacaktır. Burada $U_j^{(k)}$; lokal $(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})$ koordinat sistemindeki alan çözümleri, $U_0^{(k)}$ ise k bölgesindeki kaynağın ürettiği gelen alan ifadesidir.

$N_D^{(k)}$; TM için iletkenlere veya TE için magnetik duvarlara,
 $N_N^{(k)}$; TE için iletkenlere yada TM için magnetik duvarlara,

karşılık gelen parçaların setleri olsunlar. I da ara yüze tekabül eden parçaların seti olsun. Ayrıca varsayalım ki;

$$I = \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.2)$$

$$N^{(k)} = I \cup N_D^{(k)} \cup N_N^{(k)} \quad ; k=1,2 \quad (3.3)$$

Burada, N ara yüzdeki parça sayısına eşittir. Sınır koşulları $|x_j^{(k)}| < f_j^{(k)}$ için aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$U^{(k)} \Big|_{y_j^{(k)}=0^+} = 0 \quad ; j \in N_D^{(k)}, k=1,2 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial y_j^{(k)}} \Big|_{y_j^{(k)}=0^+} = 0 \quad ; j \in N_N^{(k)}, k=1,2 \quad (3.5)$$

$$U^{(1)} \Big|_{y_j^{(1)}=0^+} = U^{(2)} \Big|_{y_j^{(2)}=0^+} \quad ; j \in I \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial y_j^{(1)}} \Big|_{y_j^{(1)}=0^+} = -\rho \frac{\partial U^{(2)}}{\partial y_j^{(2)}} \Big|_{y_j^{(2)}=0^+} \quad ; j \in I \quad (3.7)$$

Burada;

$$\rho = \begin{cases} \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \rightarrow TM - polarizasyonu \\ \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \rightarrow TE - polarizasyonu \end{cases} \quad (3.8)$$

ve $f_j^{(k)}$, k^{inci} bölgedeki j^{inci} sınır parçasının uzunluğudur. (3.4) ve (3.5) sınır koşulları sınırdaki açık parçalarının her iki yüzüne de uygulanmalıdır. Ancak bilinmeyen fonksiyon için aşağıda önerilen tanımlama kullanılırsa bu koşulların sadece $y = 0^+$ için uygulanması yeterli olacaktır. (3.4)-(3.8)'a ek olarak, 2. bölgedeki saçılan alana ayırıt ve radyasyon koşulları da sağlanmalıdır.

(3.1) eşitliğindeki $U_j^{(k)}$ terimleri, TE sürümlü açık sınır parçaların analizi durumu haricinde, çift Mathieu fonksiyonlarının açılımı şeklinde ifade edilmektedir. Bu özel durum için ise tek Mathieu fonksiyonlarının açılım serisi kullanılmak zorundadır. Ancak yakınsaklık problemi dolayısıyla sadece ayrık şerit sınırlar için verimli çözüm bulunabilmektedir. İlerideki adımları basitleştirmek amacıyla aşağıda verilen genel tanımlama kullanılabilir:

$$M_n(\xi_j^{(k)}, q_j^{(k)}) = \begin{cases} \frac{Me_{n-1}^{(2)}(\xi_j^{(k)}, q_j^{(k)})}{Me_{n-1}^{(2)}(0, q_j^{(k)})} \Rightarrow Genel - durum \\ \frac{Ne_n^{(2)}(\xi_j^{(k)}, q_j^{(k)})}{Ne_n^{(2)}(0, q_j^{(k)})} \Rightarrow Özel - durum \end{cases} \quad (3.9)$$

$$ma_n(\eta_j^{(k)}, q_j^{(k)}) = \begin{cases} ce_{n-1}(\eta_j^{(k)}, q_j^{(k)}) \Rightarrow Genel - durum \\ se_n(\eta_j^{(k)}, q_j^{(k)}) \Rightarrow Özel - durum \end{cases} \quad (3.10)$$

Burada, lokal eliptik koordinat sistemi $(\xi_j^{(k)}, \eta_j^{(k)})$ kartezyen sisteme $(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})$ aşağıda verilen dönüşüm formülüyle çevrilebilir:

$$x_j^{(k)} = f_j^{(k)} \cosh \xi_j^{(k)} \cos \eta_j^{(k)}, \quad y_j^{(k)} = f_j^{(k)} \sinh \xi_j^{(k)} \sin \eta_j^{(k)} \quad (3.11)$$

$q_j^{(k)}$ ise şu şekilde tanımlanır:

$$q_j = \left(\frac{k f_j}{2} \right)^2 \quad \text{ve,} \quad (3.12)$$

$$k^{(k)} = \omega \sqrt{\varepsilon_{rk} \varepsilon_0 \mu_{rk} \mu_0} \quad (3.13)$$

$U_j^{(k)}$ fonksiyonu (3.9) ve (3.10) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki formda yazılabilir:

$$U_j^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} {}^k D_n^j M_n(\xi_j^{(k)}, q_j^{(k)}) m a_n(\eta_j^{(k)}, q_j^{(k)}); j \in N^{(k)}, k=1,2 \quad (3.14)$$

Bilinmeyen $\{ {}^k D_n^j \}$ açılım katsayılarının tespiti için önceden tanımlanan sınır koşulları kullanılmalıdır. (3.1) ve (3.14) eşitlikleri (3.4)'te yerine konulursa aşağıdaki denklem seti elde edilir:

$${}^k D_m^j + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(k)}}} \sum_{n=1}^{\infty} {}^{kk} a_{mn}^{jp} {}^k D_n^p = {}^k C_m^j; m=1, \dots, \infty; j \in N_D^{(k)}, k=1,2 \quad (3.15)$$

Burada;

$${}^{kk} a_{mn}^{jp} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [M_n(\xi_p^{(k)}, q_p^{(k)}) m a_n(\eta_p^{(k)}, q_p^{(k)})]_{\xi_j^{(k)}=0} m a_m(\eta_j^{(k)}, q_j^{(k)}) d\eta_j^{(k)} \quad (3.16)$$

$${}^k C_m^j = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_0^{(k)} \Big|_{\xi_j^{(k)}=0} m a_m(\eta_j^{(k)}, q_j^{(k)}) d\eta_j^{(k)} \quad (3.17)$$

(3.1) ve (3.14) eşitlikleri (3.5)'te yerine konulursa;

$${}^k D_m^j + \sum_{p \neq j} \sum_{n=1}^{\infty} {}^{kk} a_{mn}^{jp} {}^k D_n^p = {}^k C_m^j \quad ; m = 1, \dots, \infty; j \in N_N^{(k)}, k = 1, 2 \quad (3.18)$$

Burada;

$${}^{kk} a_{mn}^{jp} = \frac{2}{\pi M'_m(0, q_j^{(k)})} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(k)}} \left[M_n(\xi_p^{(k)}, q_p^{(k)}) ma_n(\eta_p^{(k)}, q_p^{(k)}) \right]_{\xi_j^{(k)}=0} ma_m(\eta_j^{(k)}, q_j^{(k)}) d\eta_j^{(k)} \quad (3.19)$$

$${}^k C_m^j = -\frac{2}{\pi M'_m(0, q_j^{(k)})} \int_0^{\pi} \frac{\partial U_0^{(k)}}{\partial \xi_j^{(k)}} \Big|_{\xi_j^{(k)}=0} ma_m(\eta_j^{(k)}, q_j^{(k)}) d\eta_j^{(k)} \quad (3.20)$$

Son olarak ise (3.1) ve (3.14) ifadelerinin (3.6)'a uygulanması neticesinde (3.21) denklem setine ulaşılır:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} {}^1 D_n^j ma_n(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(1)}}} \sum_{n=1}^{\infty} {}^1 D_n^p \left[M_n(\xi_p^{(1)}, q_p^{(1)}) ma_n(\eta_p^{(1)}, q_p^{(1)}) \right]_{\xi_j^{(1)}=0} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} {}^2 D_n^j ma_n(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) - \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(2)}}} \sum_{n=1}^{\infty} {}^2 D_n^p \left[M_n(\xi_p^{(2)}, q_p^{(2)}) ma_n(\eta_p^{(2)}, q_p^{(2)}) \right]_{\xi_j^{(2)}=0} \\ & = U_0^{(2)} \Big|_{\xi_j^{(2)}=0} - U_0^{(1)} \Big|_{\xi_j^{(1)}=0} \quad ; j = \overline{1, N} \quad (3.21) \end{aligned}$$

Burada dikkate alınması gereken bir özellik;

$$x_j^{(2)} = -x_j^{(1)} \quad \text{ve} \quad \eta_j^{(2)} = \pi - \eta_j^{(1)} \quad (3.22)$$

'dir. (3.21)'in her iki tarafı $\frac{2}{\pi} ma_n(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)})$ ile çarpılarak $(0, \pi)$ aralığında entegre edilirse;

$$\begin{aligned} & {}^1 D_m^j + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(1)}}} \sum_{n=1}^{\infty} {}^{11} a_{mn}^{jp} {}^1 D_n^p + \sum_{n=1}^{\infty} {}^{12} a_{mn}^{jj} {}^2 D_n^j + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(2)}}} \sum_{n=1}^{\infty} {}^{12} a_{mn}^{jp} {}^2 D_n^p = C_m^j \\ & m = \overline{1, \infty} \quad , j = \overline{1, N} \quad (3.23) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada, ${}^{11}a_{mn}^{jp}$ terimi (3.16)'da verilmiştir. Diğer matris katsayıları aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$${}^{12}a_{mn}^{jj} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi ma_n(\pi - \eta_j^{(1)}, q_j^{(2)}) ma_m(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) d\eta_j^{(1)} \quad (3.24)$$

$${}^{12}a_{mn}^{jp} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi [M_n(\xi_p^{(2)}, q_p^{(2)}) ma_n(\eta_p^{(2)}, q_p^{(2)})]_{\xi_j^{(1)}=0} ma_m(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) d\eta_j^{(1)} \quad (3.25)$$

$$C_m^j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [U_0^{(2)} - U_0^{(1)}]_{\xi_j^{(1)}=0} ma_m(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) d\eta_j^{(1)} \quad (3.26)$$

(3.1) ve (3.14) ifadeleri (3.7) sınır koşulunda yerine konulduğunda;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f_j^{(1)} |\sin \eta_j^{(1)}|} \sum_{n=1}^{\infty} {}^1 D_n^j M_n'(0, q_j^{(1)}) ma_n(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(1)}}} \sum_{n=1}^{\infty} {}^1 D_n^p \frac{\partial}{\partial y_j^{(1)}} [M_n(\xi_p^{(1)}, q_p^{(1)}) ma_n(\eta_p^{(1)}, q_p^{(1)})]_{\xi_j^{(1)}} \\ & + \frac{1}{f_j^{(2)} |\sin \eta_j^{(2)}|} \sum_{n=1}^{\infty} {}^2 D_n^j M_n'(0, q_j^{(2)}) ma_n(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) \\ & + \rho \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(2)}}} \sum_{n=1}^{\infty} {}^2 D_n^p \frac{\partial}{\partial y_j^{(2)}} [M_n(\xi_p^{(2)}, q_p^{(2)}) ma_n(\eta_p^{(2)}, q_p^{(2)})]_{\xi_j^{(2)}=0} = \left[-\frac{\partial U_0^{(1)}}{\partial y_j^{(1)}} - \rho \frac{\partial U_0^{(2)}}{\partial y_j^{(2)}} \right]_{\xi_j^{(2)}=0} \\ & ; j = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (3.27)$$

eşitliği elde edilir. Burada;

$$f_j^{(1)} = f_j^{(2)} \quad \text{ve} \quad y_j^{(1)} = -y_j^{(2)} \quad (3.28)$$

'dir. (3.22) ve (3.28) özellikleriyle birlikte, (3.27) ifadesi $\frac{2}{\pi M_m'(0, q_j^{(2)})}$ ile çarpılarak

$(0, \pi)$ aralığında entegre edildiğinde;

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} {}^1 D_m^j {}^{21} a_{mn}^{jj} + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(1)}}} {}^1 D_m^p {}^{21} a_{mn}^{jp} + {}^2 D_m^j + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(2)}}} {}^2 D_m^p {}^{22} a_{mn}^{jp} = C_m^j \\ & m = \overline{1, \infty} \quad , j = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (3.29)$$

denklem setine ulaşılır. Burada ${}^{22}a_{mn}^{jp}$ katsayısı (3.19)'da $k=2$ alınması suretiyle verilmiştir. Diğer matris katsayıları ise aşağıdaki entegral formda yazılabilir:

$${}^{21}a_{mn}^{jj} = \frac{M'_n(0, q_j^{(1)})}{\rho M'_m(0, q_j^{(2)})} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi ma_n(\pi - \eta_j^{(2)}, q_j^{(1)}) ma_m(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \quad (3.30)$$

$${}^{21}a_{mn}^{jp} = -\frac{2}{\pi \rho M'_m(0, q_j^{(2)})} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(2)}} \left[M_n(\xi_p^{(1)}, q_p^{(1)}) ma_n(\eta_p^{(1)}, q_p^{(1)}) \right]_{\xi_j^{(1)}=0} ma_m(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \quad (3.31)$$

$$C_m^j = \frac{2}{\pi \rho M'_m(0, q_j^{(2)})} \int_0^\pi \left[\frac{\partial U_0^{(1)}}{\partial \xi_j^{(2)}} - \rho \frac{\partial U_0^{(2)}}{\partial \xi_j^{(2)}} \right]_{\xi_j^{(2)}=0} ma_m(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \quad (3.32)$$

(3.24) ve (3.30) ifadelerindeki katsayı entegralleri, (3.10) ve (3.22) vasıtasıyla aşağıdaki şekle dönüştürülerek düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi ma_n(\pi - \eta_j^{(1)}, q_j^{(2)}) ma_m(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) d\eta_j^{(1)} &= \int_0^\pi ce_r(\pi - \eta_j^{(1)}, q_j^{(2)}) ce_p(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) d\eta_j^{(1)} \\ &= (-1)^r \int_0^\pi ce_r(\eta_j^{(1)}, q_j^{(2)}) ce_p(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) d\eta_j^{(1)} \quad ; r = n-1, p = m-1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi ma_n(\pi - \eta_j^{(2)}, q_j^{(1)}) ma_m(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \\ &= (-1)^r \int_0^\pi ce_r(\eta_j^{(2)}, q_j^{(1)}) ce_p(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \quad ; r = n-1, p = m-1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

(3.33) ve (3.34) entegralleri, açılmalı Mathieu fonksiyonlarının diklik özellikleri dolayısıyla, r ve p 'nin farklı olması durumunda sıfır olur. (3.34)'ün sağ tarafında bulunan entegrallerden teşkil olan matris, (3.33)'ün sağ tarafının tranzpozisini almak suretiyle elde edilebilir.

(3.15), (3.18), (3.23) ve (3.29) sonsuz matris denklemleri, bilinmeyen $\{ {}^k D_n^j \}$ açılım katsayılarına bağlı tam bir denklem seti oluştururlar.

(3.16), (3.19), (3.25) ve (3.31) ifadelerindeki matris katsayıları uygun yakınsaklık kriterlerini sağlarlar [12]. (7.6), (7.11)...(7.13), (7.19) ve (3.33), (3.34) eşitliklerinin ışığı altında, ${}^{12}a_{mn}^{jj}$ ve ${}^{21}a_{mn}^{jj}$ değerleri aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} {}^1 a_{mn}^j &= (-1)^n \delta_{mn} + \alpha_{mn}^j \\ {}^2 a_{mn}^j &= \frac{(-1)^{n-1}}{p} \delta_{mn} + \beta_{mn}^j \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Burada, δ_{mn} Kronecker delta fonksiyonu ve $\alpha_{mn}^j, \beta_{mn}^j$ sonsuzsal dizilerdir. α_{mn}^j ve β_{mn}^j 'nin $m, n \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsama hızlarının yukarıdaki katsayılardan daha yüksektir [12].

${}^1 D_m^j$ ve ${}^2 D_m^j$, $j = \overline{1, N}$ bilinmeyen katsayıları aşağıdaki yeni formda tanımlansın:

$$\left. \begin{aligned} {}^1 \tilde{D}_m^j &= {}^1 D_m^j + (-1)^m {}^2 D_m^j \\ {}^2 \tilde{D}_m^j &= {}^2 D_m^j - \frac{(-1)^m}{p} {}^1 D_m^j \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

(3.36)'dan;

$${}^1 D_m^j = \frac{p}{p+1} {}^1 \tilde{D}_m^j - \frac{(-1)^m p}{p+1} {}^2 \tilde{D}_m^j, \quad j = \overline{1, N} \quad (3.37)$$

$${}^2 D_m^j = \frac{(-1)^m}{p+1} {}^1 \tilde{D}_m^j + \frac{p}{p+1} {}^2 \tilde{D}_m^j, \quad j = \overline{1, N} \quad (3.38)$$

(3.37) ve (3.38) eşitlikleri (3.15), (3.18), (3.23) ve (3.29) ifadelerinde yerine konulursa ikinci türden BÜT denklem seti elde edilir. Bilindiği üzere 2. tür cebrik sistemler iyi ve düzgün bir yakınsama karakteri göstererek, yeteri derecede büyük kesim sayısı verilmek suretiyle sağlıklı biçimde çözülebilirler [Türk 1998]. Bu yüzden BÜT prosedürü her ne kadar (3.15), (3.18), (3.23) ve (3.29)'a doğrudan uygulanabilse de, sayısal çözüm mekanizmasının hızlı ve güvenilir çalışması amacıyla böyle bir 2. türe dönüşüm algoritması uygulanmaktadır.

(3.33) ve (3.34) eşitliklerinde sıkça adı geçen aşağıdaki entegral formu,

$$I_{mn}(q_1, q_2) = \int_0^\pi ce_n(\eta, q_2) ce_n(\eta, q_1) d\eta \quad (3.39)$$

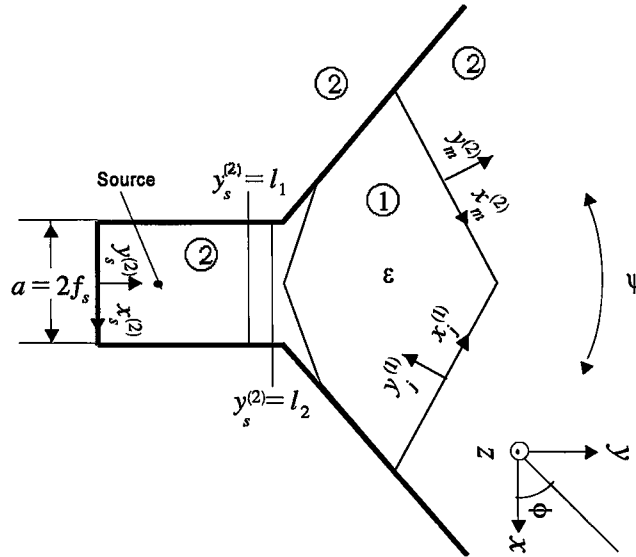
hızlı çevrim serilerinin toplamları şeklinde basitleştirilirse,

$$I_{mn}(q_1, q_2) = \begin{cases} 2A_0^m \cdot A_0^n + \sum_{t=1}^{\infty} 2A_{2t}^m \cdot A_{2t}^n & ; e=0 \text{ için} \\ \sum_{t=0}^{\infty} A_{2t+1}^m \cdot A_{2t+1}^n & ; e=1 \text{ için} \\ 0 & ; m \text{ ve } n \text{ farklı için} \end{cases} \quad (3.40)$$

elde edilir. Burada; $m = 2r + e, n = 2s + e$ 'dir. A_p^m ve A_p^n ise, (6.14)- (6.15)'deki $ce_m(\eta, q_1)$ ve $ce_n(\eta, q_2)$ fonksiyonlarının bilinen Fourier katsayılarıdır.

3.2. Dielektrik Yüklü Horn Anten Yapısının Analizi

Bölüm 1'de özetle değinildiği üzere, tez süresince ağırlıklı olarak düzlemsel horn yapılarına değişik bünye ve geometride dielektrik yüklemeler uygulanmak suretiyle anten karakteristiğini iyileştirici sonuçlar elde edilmesine yönelik çalışmalar yapılmıştır. Buna göre seçilen prototip geometrilerin şekilleri bölüm 4'te verilmektedir. Genelde horn içinde boğaz yada açıklığa yakın yerleştirilmiş tek parçalı çokgen dielektrik yapısı incelenmiş olmakla birlikte, bazı özel çok parçalı konfigürasyonlar için de analizler gerçekleştirilmiştir. İlgili numerik uygulamalar ve sonuçları bölüm 4'de grafikler halinde sunulmakta, sonuç bölümünde de anten teknolojisine yönelik katkıları yorumlanmaktadır.



Şekil 3.2 Dielektrik Yüklü H-düzlem Horn Geometrisi ve İlgili Koordinat Sistemleri

Şekil 3.2’de kesiti verilen, düzlemsel horn anten geometrisinden 2-boyutlu dalga saçılması problemini BÜT ile inceleyelim. Hornun girişinde bir dalga kılavuzu bulunur ve dominant modda sürüm sağlamak amacıyla boğazdan yeteri kadar uzakta bir çizgisel kaynak konulmuştur. Kılavuzdan sürülen dominant modun geometrideki karşılığı olan TM-polarizasyonu durumu için analiz gerçekleştirilecektir.

Bölüm 3.1’deki eşitlikler düzenlenmek suretiyle çözüm elde edilebilir. Buradaki yapı iki bölgeden oluşmaktadır. Birincisi , hornun içinde yer alan dielektrik yüklü bölge; ikincisi ise, hornun mükemmel iletken parçalarını ve kaynağı içeren bölgedir. Birinci bölgenin bünye parametreleri (ε_1, μ_1) , ikinci bölgenin (ε_2, μ_2) olsun. Kullanılan $(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})$ lokal koordinat sisteminde k ’inci bölgenin j ’inci sınır parçasındaki $Oy_j^{(k)}$ ekseninin yönü k bölgesine doğru alınmıştır. $U^{(k)}$ toplam elektrik alanın z -bileşenini temsil etmek üzere (3.1) eşitliği aynı şekilde yazılır:

$$U^{(k)} = \sum_{j \in N^{(k)}} U_j^{(k)} + U_0^{(k)} \quad ; k=1,2 \quad (3.41)$$

Birinci bölge mükemmel iletken duvarlara ve ara yüze, ikinci bölgeyse sadece ara yüze sahiptir. N ; ara yüzdeki toplam parça sayısına eşit olmak üzere,

$$I = \{1,2,\dots, N\} \quad (3.42)$$

$$N^{(k)} = I \cup N_D^{(2)} \quad ; k=1,2 \quad (3.43)$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ ve $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ olduğuna göre, sınır koşulları $|x_j^{(k)}| < f_j^{(k)}$ için aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$U^{(2)} \Big|_{y_j^{(2)}=0^+} = 0 \quad ; j \in N_D^{(2)} \quad (3.44)$$

$$U^{(1)} \Big|_{y_j^{(1)}=0^+} = U^{(2)} \Big|_{y_j^{(2)}=0^+} \quad ; j \in I \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial y_j^{(1)}} \Big|_{y_j^{(1)}=0^+} = - \frac{\partial U^{(2)}}{\partial y_j^{(2)}} \Big|_{y_j^{(2)}=0^+} \quad ; j \in I \quad (3.46)$$

TM-polarize açık sınır yapısı analizi yapılacağından genel durumdaki çift Mathieu fonksiyonları açılımı kullanılır. Lokal eliptik koordinat sistemini kartezyen koordinatlara çeviren (3.11) eşitlikleriyle birlikte, (3.9) ve (3.10) ifadeleri kullanılarak $U_j^{(k)}$ fonksiyonu aşağıdaki formda yazılabilir:

$$U_j^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} {}^k D_n^j \frac{Me_n^{(2)}(\xi_j^{(k)}, q_j^{(k)})}{Me_n^{(2)}(0, q_j^{(k)})} ce_n(\eta_j^{(k)}, q_j^{(k)}); j \in N^k, k=1,2 \quad (3.47)$$

Burada,

$$q_j^{(k)} = \left(\frac{k^{(k)} f_j}{2} \right)^2; k=1,2^* \quad (3.48)$$

$$k^{(k)} = \omega \sqrt{\varepsilon_{rk} \varepsilon_0 \mu_{rk} \mu_0}; k=1,2 \quad (3.49)$$

'dir. Bilinmeyen $\{ {}^k D_n^j \}$ açılım katsayılarının tespiti için sınır ve süreklilik koşulları kullanılır. (3.41) ve (3.47) eşitlikleri (3.44)'te yerine konulursa (3.50) denklem setine ulaşılır:

$${}^2 D_m^j + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(2)}}} \sum_{n=0}^{\infty} {}^{22} a_{mn}^{jp} {}^2 D_n^p = {}^2 C_m^j; m=0, \dots, \infty; j \in N_D^{(2)} \quad (3.50)$$

Burada;

$${}^{22} a_{mn}^{jp} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_p^{(2)}, q_p^{(2)})}{Me_n^{(2)}(0, q_p^{(2)})} ce_n(\eta_p^{(2)}, q_p^{(2)}) \right]_{\xi_j^{(2)}=0} ce_m(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \quad (3.51)$$

$${}^2 C_m^j = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_0^{(2)} \Big|_{\xi_j^{(2)}=0} ce_m(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \quad (3.52)$$

(3.41) ve (3.47) ifadeleri süreklilik koşullarını temsil eden eşitliklerinden (3.45)'te yerine konulursa,

* Buradaki k=1,2 değerleri bölge indisleridir, dalga sayısını ifade eden k ile karıştırmayınız.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 D_n^j ce_n(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(1)}}} \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 D_n^p \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_p^{(1)}, q_p^{(1)})}{Me_n^{(2)}(0, q_p^{(1)})} ce_n(\eta_p^{(1)}, q_p^{(1)}) \right]_{\xi_j^{(1)}=0} \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} {}^2 D_n^j ce_n(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) - \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(2)}}} \sum_{n=0}^{\infty} {}^2 D_n^p \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_p^{(2)}, q_p^{(2)})}{Me_n^{(2)}(0, q_p^{(2)})} ce_n(\eta_p^{(2)}, q_p^{(2)}) \right]_{\xi_j^{(2)}=0} \\
& = U_0^{(2)} \Big|_{\xi_j^{(2)}=0} - U_0^{(1)} \Big|_{\xi_j^{(1)}=0} \quad ; j = \overline{1, N} \in I \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Burada, $x_j^{(2)} = -x_j^{(1)}$ ve $\eta_j^{(2)} = \pi - \eta_j^{(1)}$ olduğu dikkate alınır, (3.53)'in her iki tarafı

$\frac{2}{\pi} ce_n(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)})$ ile çarpılarak $(0, \pi)$ aralığında entegre edilirse,

$$\begin{aligned}
& {}^1 D_m^j + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(1)}}} \sum_{n=0}^{\infty} {}^{11} a_{mn}^{jp} {}^1 D_n^p + \sum_{n=0}^{\infty} {}^{12} a_{mn}^{jj} {}^2 D_n^j + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(2)}}} \sum_{n=0}^{\infty} {}^{12} a_{mn}^{jp} {}^2 D_n^p = C_m^j \\
& \quad \quad \quad m = \overline{0, \infty} \quad , j = \overline{1, N} \in I \quad (3.54)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada ${}^{11} a_{mn}^{jp}$ terimi, (3.51) ifadesinde sol üst indisin 1 olarak değiştirilmesiyle bulunur. Diğer matris katsayıları ise,

$${}^{12} a_{mn}^{jj} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} ce_n(\pi - \eta_j^{(1)}, q_j^{(2)}) ce_m(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) d\eta_j^{(1)} \quad (3.55)$$

$${}^{12} a_{mn}^{jp} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_p^{(2)}, q_p^{(2)})}{Me_n^{(2)}(0, q_p^{(2)})} ce_n(\eta_p^{(2)}, q_p^{(2)}) \right]_{\xi_j^{(1)}=0} ce_m(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) d\eta_j^{(1)} \quad (3.56)$$

$$C_m^j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [U_0^{(2)} - U_0^{(1)}]_{\xi_j^{(1)}=0} ce_m(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) d\eta_j^{(1)} \quad (3.57)$$

biçiminde yazılabilir. (3.41) ve (3.47) süreklilik koşulu ifadelerinin ikincisi olan (3.46)'te yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{f_j^{(1)} |\sin \eta_j^{(1)}|} \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 D_n^j \frac{Me_n^{(2)}(0, q_j^{(1)})}{Me_n^{(2)}(0, q_j^{(1)})} ce_n(\eta_j^{(1)}, q_j^{(1)}) + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(1)}}} \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 D_n^p \frac{\partial}{\partial y_j^{(1)}} \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_p^{(1)}, q_p^{(1)})}{Me_n^{(2)}(0, q_p^{(1)})} ce_n(\eta_p^{(1)}, q_p^{(1)}) \right]_{\xi_j^{(1)}=0} \\
& + \frac{1}{f_j^{(2)} |\sin \eta_j^{(2)}|} \sum_{n=0}^{\infty} {}^2 D_n^j \frac{Me_n^{(2)}(0, q_j^{(2)})}{Me_n^{(2)}(0, q_j^{(2)})} ce_n(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(2)}}} \sum_{n=0}^{\infty} {}^2 D_n^p \frac{\partial}{\partial y_j^{(2)}} \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_p^{(2)}, q_p^{(2)})}{Me_n^{(2)}(0, q_p^{(2)})} ce_n(\eta_p^{(2)}, q_p^{(2)}) \right]_{\xi_j^{(2)}=0} \\
& = \left[-\frac{\partial U_0^{(1)}}{\partial y_j^{(1)}} - \frac{\partial U_0^{(2)}}{\partial y_j^{(2)}} \right]_{\xi_j^{(2)}=0} \quad ; j = \overline{1, N} \in I \quad (3.58)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada, (3.22) ve (3.28) özellikleri de kullanılarak, (3.58) ifadesi

$\frac{2Me_m^{(2)}(0, q_j^{(2)})}{\pi Me_m^{(2)'}(0, q_j^{(2)})}$ ile çarpılarak $(0, \pi)$ aralığında entegrali alınır;

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 D_m^{j \ 21} a_{mn}^{jj} + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(1)}}} {}^1 D_n^{p \ 21} a_{mn}^{jp} + {}^2 D_m^j + \sum_{\substack{p \neq j \\ p \in N^{(2)}}} {}^2 D_n^p {}^22 a_{mn}^{jp} = C_m^j \\
& m = \overline{0, \infty} \quad , j = \overline{1, N} \in I \quad (3.59)
\end{aligned}$$

denklem seti elde edilir. Burada ${}^{22} a_{mn}^{jp}$ katsayısı (3.19)'da $k=2$ alınması suretiyle bulunabilir. Diğer katsayılar ise aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$${}^{21} a_{mn}^{jj} = \frac{2}{\pi} \frac{Me_n^{(2)'}(0, q_j^{(1)}) Me_m^{(2)}(0, q_j^{(2)})}{Me_m^{(2)'}(0, q_j^{(2)}) Me_n^{(2)}(0, q_j^{(2)})} \int_0^{\pi} ce_n(\pi - \eta_j^{(2)}, q_j^{(1)}) ce_m(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \quad (3.60)$$

$${}^{21} a_{mn}^{jp} = -\frac{2}{\pi} \frac{Me_m^{(2)}(0, q_j^{(2)})}{Me_m^{(2)'}(0, q_j^{(2)})} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(2)}} \left[\frac{Me_n^{(2)}(\xi_p^{(1)}, q_p^{(1)})}{Me_n^{(2)}(0, q_p^{(1)})} ce_n(\eta_p^{(1)}, q_p^{(1)}) \right]_{\xi_j^{(1)}=0} ce_m(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \quad (3.61)$$

$$C_m^j = \frac{2}{\pi} \frac{Me_m^{(2)}(0, q_j^{(2)})}{Me_m^{(2)'}(0, q_j^{(2)})} \int_0^{\pi} \left[\frac{\partial U_0^{(1)}}{\partial \xi_j^{(2)}} - \rho \frac{\partial U_0^{(2)}}{\partial \xi_j^{(2)}} \right]_{\xi_j^{(2)}=0} ce_m(\eta_j^{(2)}, q_j^{(2)}) d\eta_j^{(2)} \quad (3.62)$$

(3.54) ve (3.59) denklem setlerinin katsayıları, bir önceki bölümde verilen (3.33)-(3.34) benzeri işlemlerle düzenlenebilir.

Sonuç olarak, (3.50), (3.54) ve (3.59) matris denklemleri $\{ {}^k D_n^j \}$ katsayılarına bağlı tam bir set oluştururlar. Daha sonra (3.35)...(3.38) dönüşümleriyle geleneksel ikinci türden BÜT sonsuz cebrik denklem setine ulaşılır. Matrisler kesme işlemine

tabi tutulmak suretiyle bilgisayar yardımıyla bilinmeyen $\{^k D_n^j\}$ katsayıları tespit edilir. Daha sonra yukarıda verilen integral işlemleri vasıtasıyla saçılan alan ifadesi bulunur ve buradan cismin tüm saçılma karakteristikleri hesaplanır.

Hornun uzak alan ışın diyagramı ve RCS değeri, (3.47)'de Mathieu fonksiyonlarının asimptotik yaklaşıklıkları kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$F(\phi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} U^{(2)} \sqrt{\frac{\pi k_0 \rho}{2}} e^{ik_0 \rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \phi = \frac{y}{x} \quad (3.63a)$$

$$RCS = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho |U^s|^2 \quad (3.63b)$$

Burada; $Me_n^{(2)}(\xi, q)ce_n(\eta, q)$ ifadesinin silindirik dalga terimleri cinsinden açılımında [bkz. Bateman and Erdelyi, 1955], Hankel fonksiyonları yerine asimptotik gösterimlerini yerleştirmek yeterlidir.

Bu çalışmadaki BÜT analizinde, [P'yankov and Chumachenko, 1990]'da kullanılan metodolojinin aksine, dalga kılavuzunun beslemesindeki alanın yazılımında öz değer (eigen mode) serileri kullanılmamıştır. Bu yüzden, yansıma katsayısı ve VSWR hesabına yönelik mod genlik bilgileri çözümden ayırt edilemez. Yansıma katsayısının tespitinde aşağıdaki yöntem kullanılır:

$U^{(2)}$ biliniyor ve $(x_s^{(2)}, y_s^{(2)})$ şekil 3.2'deki kılavuz profilinin sonlandırma parçasının koordinat sistemi olsun. Hornun yakın civarında şu açılım geçerlidir:

$$U^{(2)} = A_1 \varphi_1(x_s^{(2)}) e^{-i\beta_1 y_s^{(2)}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n(x_s^{(2)}) e^{i\beta_n y_s^{(2)}} \quad (3.64)$$

burada,

$$\varphi_n(x_s^{(2)}) = \sqrt{\frac{1}{f_s}} \sin \frac{n\pi(x_s^{(2)} + f_s)}{2f_s}, \quad \beta_n = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{2f_s}\right)^2} \quad (3.65)$$

'dir. (3.64) eşitliği $\varphi_1(x_s^{(2)})$ ile çarpılır, kılavuzun iki kesiti $y_s^{(2)} = l_1$ ve $y_s^{(2)} = l_2$ boyunca entegre edilirse; $\{\varphi_n(x_s^{(2)})\}$ fonksiyonunun diklik özelliği gereği aşağıdaki denklemlere ulaşılır:

$$\left. \begin{aligned} A_1 e^{-i\beta_1 l_1} + B_1 e^{i\beta_1 l_1} &= \int_{-f_s}^{f_s} u^{(2)} \Big|_{y_s^{(2)}=l_1} \varphi_1(x_s^{(2)}) dx_s^{(2)} \\ A_1 e^{-i\beta_1 l_2} + B_1 e^{i\beta_1 l_2} &= \int_{-f_s}^{f_s} u^{(2)} \Big|_{y_s^{(2)}=l_2} \varphi_1(x_s^{(2)}) dx_s^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

(3.66) denklem sisteminden hem gelen dalganın genliği A_1 , hem de yansıyan dalganın genliği B_1 kolayca bulunabilir ve yansıma katsayısı ile VSWR hesaplanır:

$$R = R \Big|_{y_s^{(2)}=l_2} = (B_1 / A_1) e^{2i\beta_1 l_2} \quad (3.67)$$

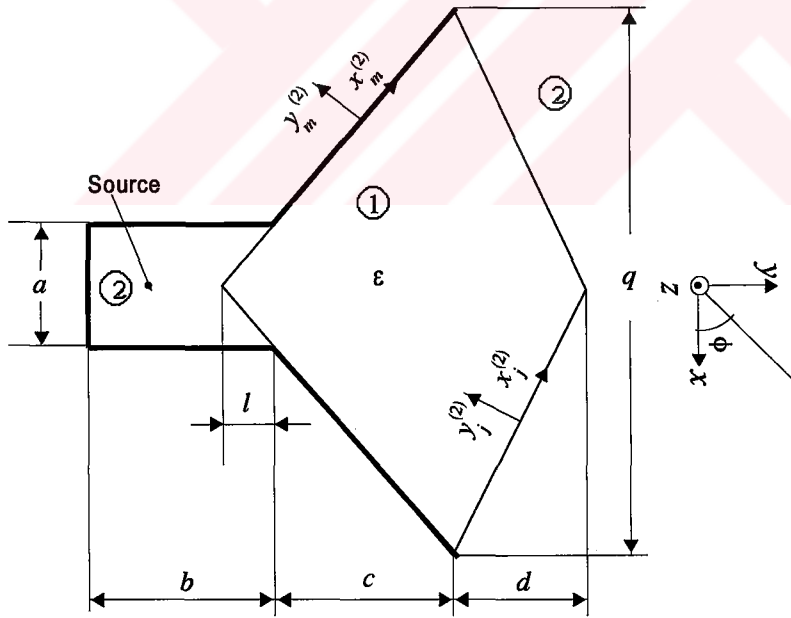
$$VSWR = \frac{1 + |R|}{1 - |R|} \quad (3.68)$$

Bundan sonraki bölümde, Şekil 3.2'deki horn anten geometrisi ve benzer yapılar için sayısal tekniklerle hesaplanan ışın karakteristiği grafikleri verilmektedir. Sonuç bölümünde ise, grafiklerden yola çıkarak hem BÜT tekniği hem de dielektrik yüklü horn tasarımına yönelik yorum ve değerlendirmeler sunulacaktır.

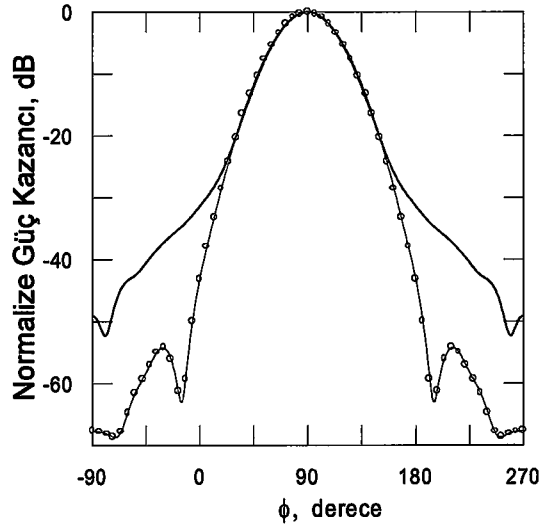
4. NÜMERİK VE DENEYSEL ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, tez süresince BÜT tekniği kullanılmak suretiyle analizi yapılan çok sayıda horn yapısına ait anten karakteristik sonuçları verilmiştir. Bununla birlikte, özellikle sonuçların karşılaştırılması ve doğrulanması amacıyla bazı deneysel çalışmalarda da bulunulmuştur ve neticeler grafiksel olarak sunulmuştur.

Şekil 4.1.(a)'da, lens biçiminde davranan dielektrik yüklemeli horn antenin geometrisi verilmektedir. Bu yapıya ait analiz sonuçları şekil 4.1.(b)'de görülmektedir.

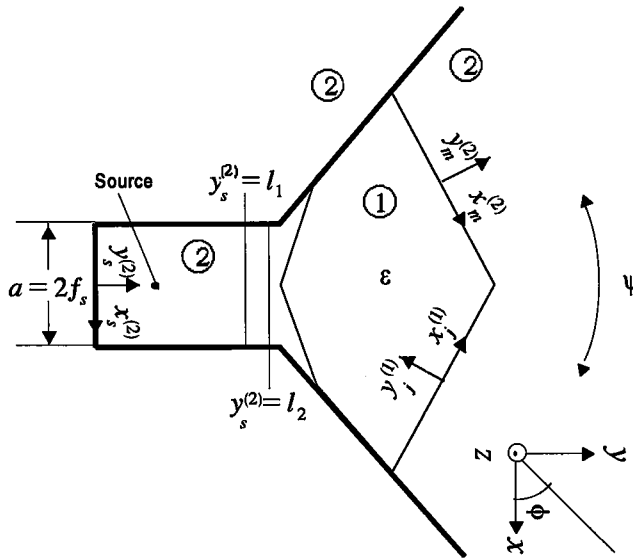


Şekil 4.1 (a) Dielektrik Lens Yüklemeli H-düzlem Horn Anten Geometrisi

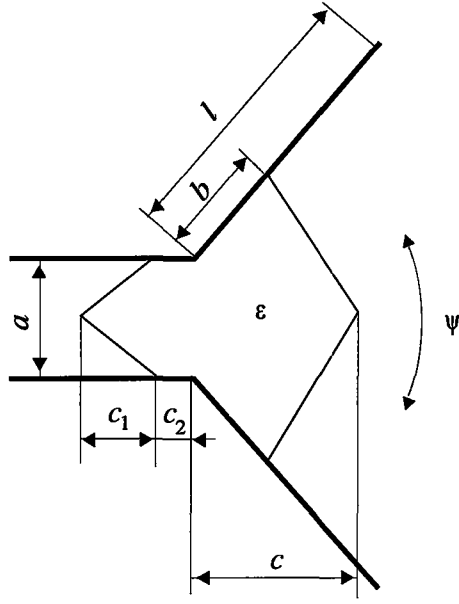


Şekil 4.1 (b) Dielektrik Yüklü ve Yüksüz Hornun $a=0.75\lambda$, $l=0.5a$, $q=2a$, $c=1.5a$, $b=1.5a$ ve $d=0.16a$ için Radyasyon Paternlerinin BÜT Analizi
 (—) Boş (oooo) Yüklü ($\epsilon_r=4$)

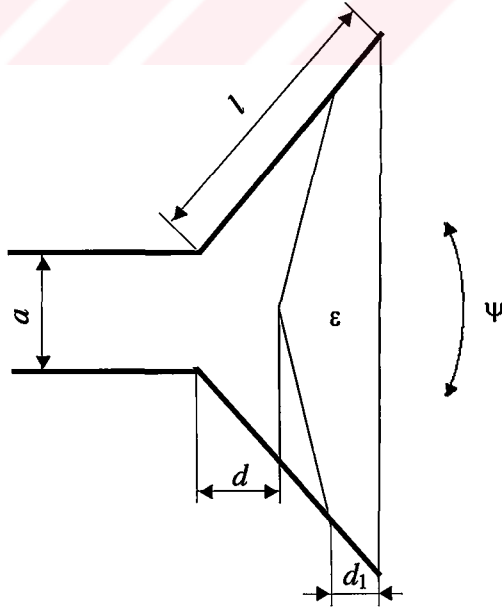
Şekil 4.2’de, keyfi dielektrik yüklemeli H-düzlem hornun en genel durumdaki geometrik parametrizasyonu ve ilgili koordinat sistemleri verilmiştir. Buna bağlı olarak, şekil 4.3’te görülen iki temel prototip çıkarılmış ve hesaplanan ışınma diyagramları ile yansımaya katsayısı sonuçları şekil 4.4-4.8’de sunulmuştur.



Şekil 4.2 Dielektrik Yüklü H-düzlem Horn Geometrisi

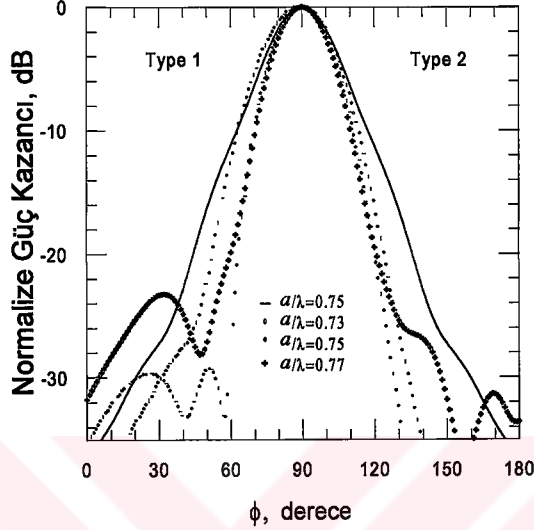


Şekil 4.3 Dielektrik Lens Yüklü H-düzlem Horn Konfigürasyonları
(a) Prototip 1

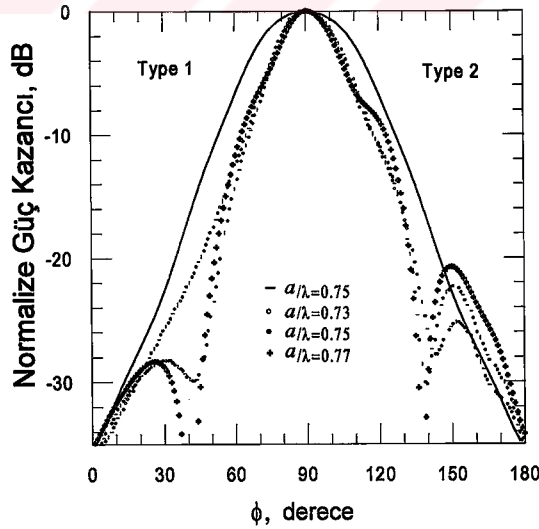


(b) Prototip 2

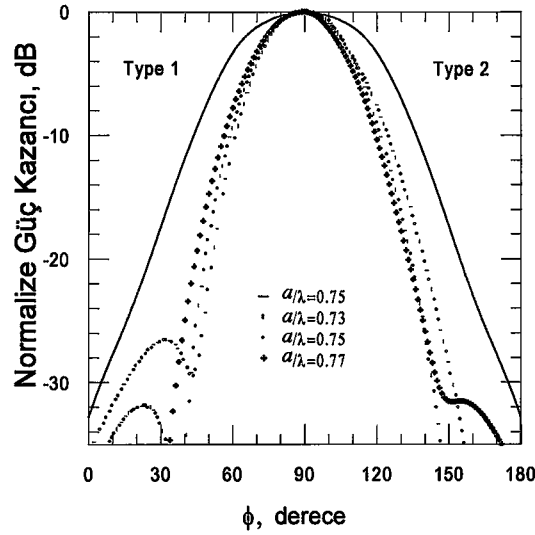
Şekil 4.4-4.7’de, her iki prototip için değişik geometrik boyutlar verilmesi sonucu elde edilen radyasyon paternleri çizilmiştir. Kılavuz genişliğinden açıklık açısına, dielektrik parametresinden horn boyuna kadar birçok parametre değiştirilerek ışın diyagramına etkileri incelenmiştir.



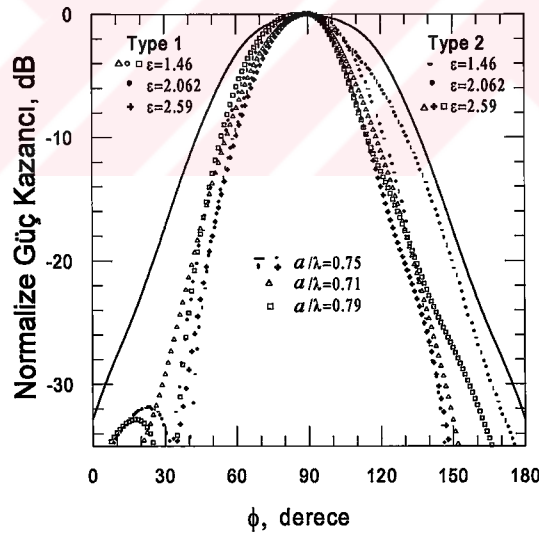
Şekil 4.4 Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=60^\circ$, $l=3a$ ve $\epsilon_r=2.062$ için Radyasyon Paterni
 (a) Grafiğin sol tarafı , Prototip 1, $b=1.7a$, $c=2.4a$, $c_1=a$ ve $c_2=0.3a$
 (b) Grafiğin sağ tarafı , Prototip 2, $d=2.2a$ ve $d_1=0.2a$
 (—) Boş (xoxox) Yüklü



Şekil 4.5 Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=90^\circ$, $l=3a$ ve $\epsilon_r=2.062$ için Radyasyon Paterni
 (a) Grafiğin sol tarafı , Prototip 1, $b=1.05a$, $c=1.45a$, $c_1=1.1a$ ve $c_2=0.3a$
 (b) Grafiğin sağ tarafı , Prototip 2, $d=1.65a$ ve $d_1=0.25a$
 (—) Boş (xoxox) Yüklü

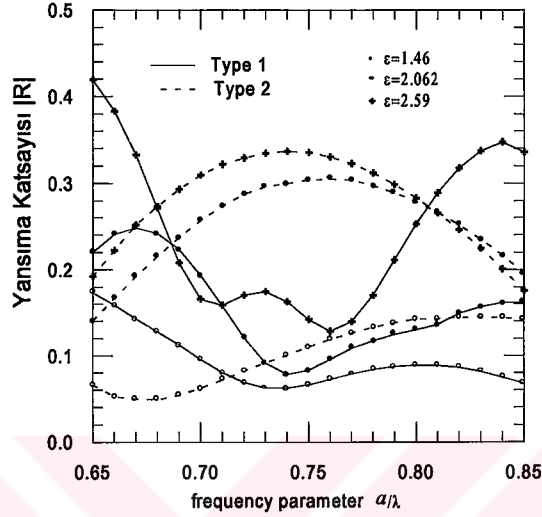


Şekil 4.6 Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=120^\circ, l=3a$ ve $\epsilon_r=2.062$ için Radyasyon Paterni
 (a) Grafiğin sol tarafı , Prototip 1, $b=0.35a, c=1.1a, c_1=0.9a$ ve $c_2=0.3a$
 (b) Grafiğin sağ tarafı ,Prototip 2, $d=0.8a$ ve $d_1=0.25a$
 (—) Boş (xoxox) Yüklü



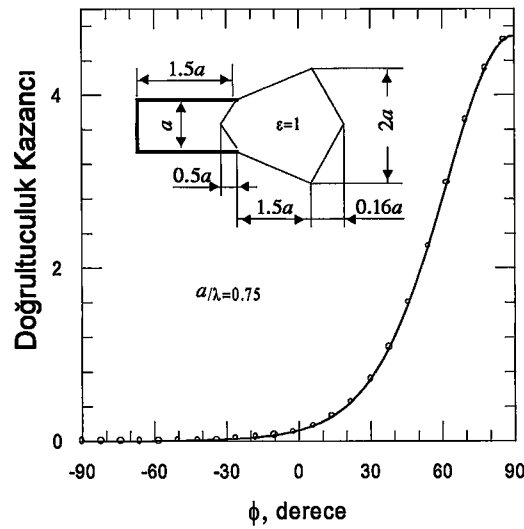
Şekil 4.7 Dielektrik Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=120^\circ, l=3a$ ve Değişik Dielektrik Malzemelerin Yüklendiği Durum için Işıma Diyagramları
 (a) Grafiğin sol tarafı , Prototip 1
 $\epsilon_r=1.46, b=0.4a, c=1.3a, c_1=0.62a$ ve $c_2=0.3a$ (Δ, o ve işaretliler)
 $\epsilon_r=2.062, b=0.35a, c=1.1a, c_1=0.9a$ ve $c_2=0.3a$ (—)
 $\epsilon_r=2.59, b=0.34a, c=0.77a, c_1=0.55a$ ve $c_2=0.31a$ (xxxx)
 (b) Grafiğin sağ tarafı ,Prototip 2
 $\epsilon_r=1.46, d=0.76a, d_1=0.25a$ (ooooo)
 $\epsilon_r=2.062, d=0.8a, d_1=0.25a$ (—)
 $\epsilon_r=2.59, d=0.9a, d_1=0.1a$ ($\Delta, o,$)

Şekil 4.8’de ise, geniş bantlı anten tasarımına yönelik bir çalışma yapılarak, her iki prototip için değişik dielektrik bünye parametrelili yüklemeler sonucu yansımaya katsayısının frekansa bağlı değişimi irdelenmiştir.

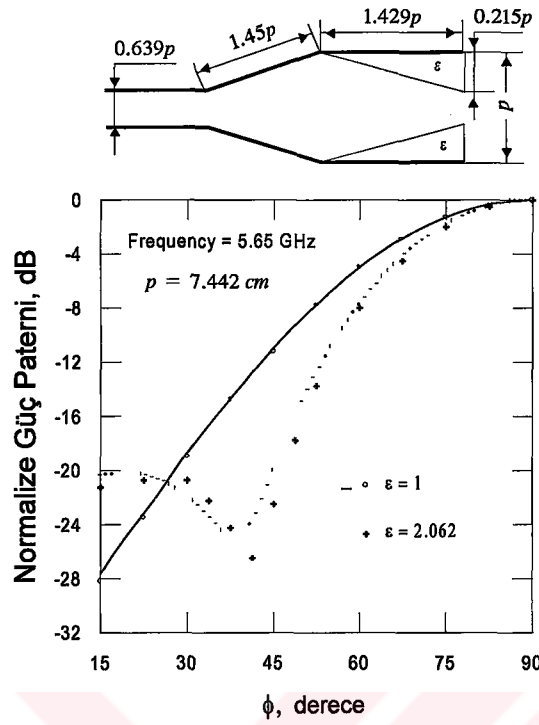


Şekil 4.8 Şekil 4.7’deki a/λ Frekans Parametresine İlişkin Yansımaya Katsayısı, $|R|$

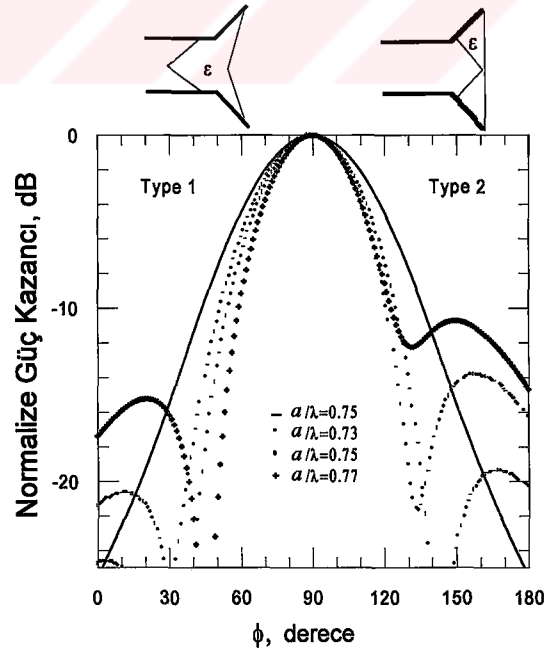
Şekil 4.9 ve 4.10’da, BÜT sonuçları ile konuyla ilgili önemli otoritelerin analitik ve deneysel sonuçları karşılaştırılmaktadır. İncelenen geometrik yapılar, grafik üzerinde verilmektedir.



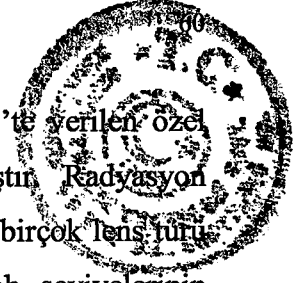
Şekil 4.9 Açık Sonlandırmalı Sonsuz Uzun Paralel Plaka Dalga Kılavuzunun Analitik ve Sayısal Yöntemlerle Elde Edilmiş Işıma Diyagramlarının Karşılaştırması
 (-----) Analitik Sonuç [Weinstein, 1969]
 (o-o-o) BÜT Analizi (Dielektrik yüklemeye $\epsilon_r=1$ alınarak hesaplanmıştır)



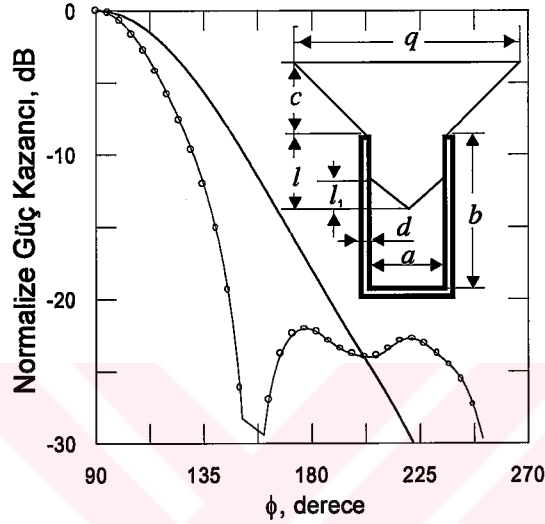
Şekil 4.10 WR 187 Beslemeli C-band Hornun Yüklü ve Yüksüz Durumda Uzak Alan Paternleri (Her iki Anten Aynı H-düzlem Kesitine Sahiptir)
 (-.-.-.-) H-düzlem Işıması , 2-boyutlu BÜT Analizi
 (oxoxo) C-band Hornun Deneysel Sonuçları [Tsadoulas and Fitzgerald, 1972]



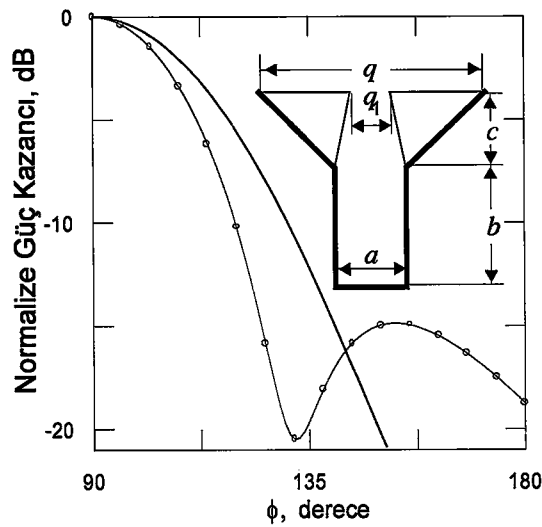
Şekil 4.11 Üstteki Tiplerde Dielektrik Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=60^\circ$, $l=0.8a$ ve $\epsilon_r=2.586$ için Işıma Diyagramları
 (a) Grafiğin sol tarafı , Prototip 1, $b=0.79a$, $c=0.4a$, $c_1=0.6a$ ve $c_2=0.3a$
 (b) Grafiğin sağ tarafı ,Prototip 2, $d=0.69a$ ve $d_1=0.685a$
 (—) Yüksüz (oxoxo) Yüklü



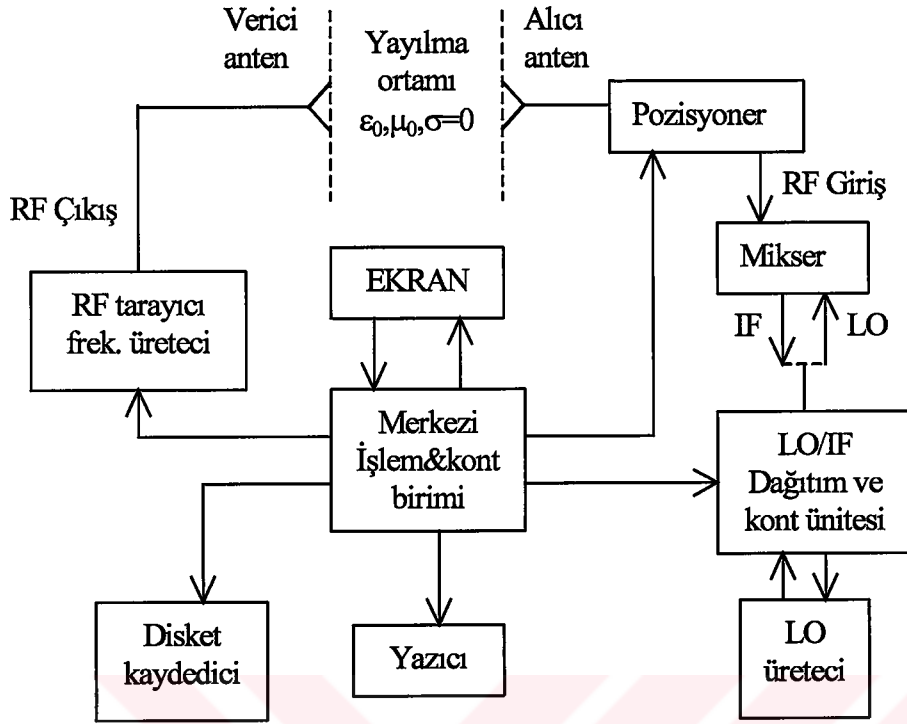
Yukarıdaki prototiplere ek olarak, Şekil 4.11, 4.12 ve 4.13'te verilen özel geometriler incelenerek ilgi çekici sonuçlar edilmeye çalışılmıştır. Radyasyon paternlerinin verildiği bu grafiklerden çıkan en dikkat çekici sonuç; birçok lens türü yükleme yapısında ana huzmenin daraldığı, buna karşın yan lob seviyelerinin yükseldiğidir.



Şekil 4.12 Grafikte Verilen Açık Sonlandırılmı Dalgı Kılavuzı Yapısının $a=0.75\lambda$, $l=0.5a$, $q=1.35a$, $b=1.5a$, $l_1=0.1a$ $d=0.2a$ için Radyasyon Paternleri
(—) Boş (oooo) Yüklü ($\epsilon_r=4$)

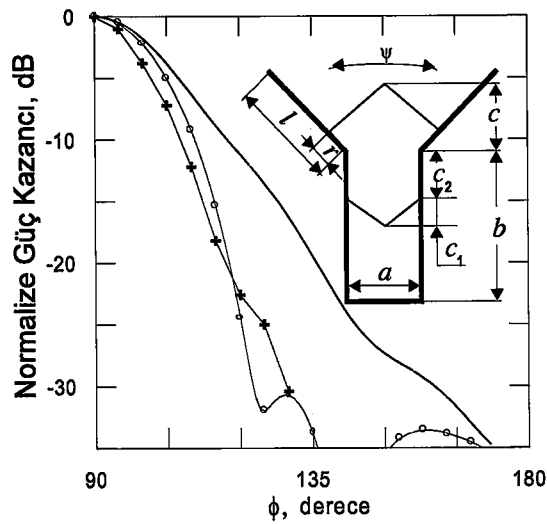


Şekil 4.13 Grafikte Gösterilen Horn Yapısının $a=0.75\lambda$, $q=2a$, $q_1=0.23a$, $b=1.0a$ ve $c=1.5a$ için Işıma Diyagramları
(—) Boş (oooo) Yüklü ($\epsilon_r=2$)



Şekil 4.14 Açık Alan Anten Ölçüm Düzeneği

Şekil 4.15'te verilen geometri pratik olarak gerçekleştirilmiş ve şekil 4.14'te blok şeması gösterilen GYTE Anten&mikrodalga laboratuvarındaki HP85301B anten ölçüm düzeneği ile uzak alan ışınma diyagramı ölçülmüştür.



Şekil 4.15 Dielektrik Yüklü ve Yüksüz Hornun $\psi=60^\circ$, $a=0.75\lambda$, $l=2.95a$, $r=1.45a$, $c=2.1a$, $c_1=0.87a$, $c_2=0.3a$ ve $b=2.97a$ için Işınma Diyagramları
 (—) Boş Durumda BÜT Analizi
 (oooo) Yüklü Durumda BÜT Analizi ($\epsilon_r=2.586$)
 (xxxx) Deneysel Sonuçlar ($\epsilon_r=2.586$)

5. SONUÇ VE YORUMLAR

Bölge ürün tekniği kullanılmak suretiyle dielektrik yüklü horn anten analizinin yapıldığı bu tez çalışmasında, hem BÜT hem de anten tasarımı açısından oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçları iki grupta toplayarak değerlendirmek mümkündür.

Birincisi, analiz tekniği üzerine odaklanan yorumlardan oluşmaktadır. Lokal-eliptik koordinat sistemine dayalı çözümler üreten BÜT yönteminin uygulanabilirliği konusunda aşağıdaki sonuçlara varılmıştır:

1. Bölge ürün tekniği çok açılı ve köşeli metal-dielektrik yapılar için hızlı, kararlı ve doğruluk kalitesi yüksek sayısal analiz sonuçları vermektedir (bkz. Şekil 4.9- 4.10). Örneğin, 20λ uzunluğundaki bir hornun hesabı PII-266MHz CPU kullanılarak yaklaşık 5sn. gibi kısa bir sürede gerçekleştirilebilmektedir.
2. Buna karşın, MoM metoduna benzer prensipte çalıştığından uygulama sahası rezonans frekans bölgesi ile sınırlıdır. Optik ve optiğe yakın (quasi-optik) bölgelerde (yani saçıcının boyutu $>$ birkaç 10λ) uygulanmasında çözümün güvenilirliği açısından sıkıntılar yaşanmaktadır.
3. Pratik açıdan köşeli ve parçalı geometrilere adaptasyonu kolay olmakla birlikte, özellikle dairesel saçıcıların analizinde kontur modellemesi açısından, zorluklar yaşanabilmektedir. Bu tür yapılar için, modelleme kolaylığı açısından, BÜT'e benzer metodolojide çalışan ARM (Analitik Regularizasyon Tekniği) önerilebilir [bkz. Turk 1998].
4. Şimdiye kadar bahsi geçmemesine karşın, BÜT yöntemi 3-boyutlu yapılara uygulanabilir ve kayıplı dielektrikler için geliştirilebilir. Bu sayede birçok fiziksel anten karakteristiği hızlı ve güvenilir biçimde elde edilebilir.

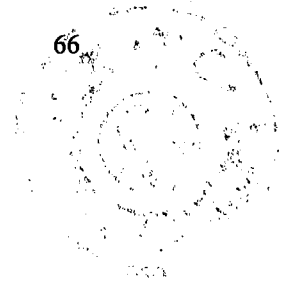
İkinci grupta ise, dielektrik yüklemenin horn anten teknolojisine yönelik katkı sağlayacak sonuçları ve bunların değerlendirmeleri ele alınabilir. Buna göre:

1. Uygun dielektrik yüklemeler sayesinde geniş bantlı, yüksek doğrultuculuklu dar huzmeli düzlemsel hornlar elde edilebilir.
2. Bununla birlikte antenin yan/arka lob sevipleri de makul seviyeye ($\approx 30-40\text{dB}$) düşürülebilir. Hornun açıklık ve boğaz kısımlarına uygun dielektrikler konulduğunda giriş geri yansıması düşürülebilir ve açıklık verimi artırılabilir.
3. Çok düşük sabitli dielektrikler ($\epsilon_r < 1.5$) doğrultuculuk kazancı başta olmak üzere birçok parametreye önemli katkılar getirmemektedir. Buna karşın, yüksek bünye parametrelili dielektriklerin ($\epsilon_r > 4$) kullanılması durumunda da uygun sonuçlar elde edilememiştir. Bu durumda ana huzme bir miktar daraltılmış olsa bile karşılığında anten çalışma bandı düşmekte, geri yansıma artmakta ve verimlilik ciddi derecede düşmektedir. Konuyla ilgili kesin bir yargı verilmiş olmamasına rağmen, genelde 1.5-2.5 arası bünyelerde daha uygun sonuçlar vermektedir [20].

KAYNAKLAR

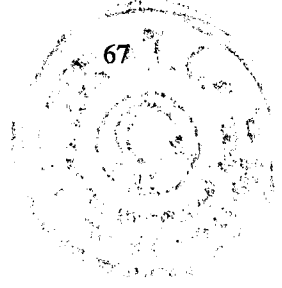
- [1] Hamid M. and Mohsen A., "Diffraction by dielectric-loaded horns and corner reflectors", IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. AP-17, 660-662, 1969
- [2] Oh L.L., Peng S.Y. and Lunden C.D., "Effects of dielectrics on the radiation patterns of an electromagnetic horn", IEEE Trans. Antennas Propagation., vol. AP-18, 553-556, 1970
- [3] Tsandoulas G.N. and Fitzgerald W.D., "Aperture efficiency enhancement in dielectrically loaded horns", IEEE Trans. Antennas Propagation, vol.AP-20, 69-74, 1972
- [4] Baldwin R. and McInnes P.A., "Radiation patterns of dielectric loaded rectangular horns", IEEE Trans. Antennas Propagation., vol. AP-21, 375-376, 1973
- [5] Hamid M. and Al-Sulaiman A., "New types of dielectric-loaded horn antennas" Int. Journal of Electron., vol. 55, 729-750, 1983
- [6] Ratajczak P., Bracht P. and Guiraud J.-L., "Rigorous analysis of three-dimensional structures incorporating dielectrics", IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 42, 1077-1085, 1994
- [7] Cruz J.L., Gimeno B., Navarro E.A. and Such V., "The phase center position of a microstrip horn radiating in an infinite parallel-plate waveguide", IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 42, 1185-1188, 1994
- [8] Parker E.A., Philips B. and Langley R.J., "Experimental variable beamwidth horn", Electronic Letters, vol. 31, 1539-1540, 1995
- [9] Reig C., Navarro E.A., and Such V., "FDTD Analysis of E-sectoral horn antennas for broad-band applications", IEEE Trans. Antennas Propagation., vol. 45, 1484-1487, 1997
- [10] Chumachenko V.P., "Grounding of the method for solution of two-dimensional problems of electromagnetic wave diffraction on polygonal structures having perfect conductivity", Radiotekhnika i Elektronika, vol. 33, 1600-1609 (in Russian), 1998

- [11] Kotsur A.M. and Chumachenko V.P., "Solution of the problem of electromagnetic wave diffraction by a multiangular dielectric cylinder using domain product technique", *Izvestiya VUZ Radiofizika*, vol. 34, 798-805 (in Russian), 1991
- [12] Chumachenko V.P., Karacuha E. and Dumanlı M., "An analysis of TE-scattering from a multiangular groove in a ground plane", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 13, 381-396, 1999
- [13] P'yankov V.P. and Chumachenko V.P., "Solution of H-plane radiation problem for two-dimensional horn with complex piecewise linear contour", *Izvestiya VUZ Radiofizika*, vol. 33, 604-610 (in Russian), 1990
- [14] Bateman H. and Erdelyi A., "Higher transcendental functions", vol. 3 (New York: McGraw-Hill), 1955
- [15] Weinstein L.A., "The theory of diffraction and the factorization method", (Boulder, Colorado: Golem Press), 1969
- [16] Turk A.S., "Sonlu kalınlıklı sonsuz uzun mükemmel iletken silindirik cisimlerden skaler dalga saçılması", Y.Lisans Tezi, GYTE, 1998
- [17] Delecki Z.A., Hamid M. and Elsherbeni A.Z., "Scattering by a dielectric discontinuity in a H-plane sectoral horn", *Journal of Institution of Electronics and Radio Engineers*, vol. 58, No. 5, pp. 235-243, July/August 1988.
- [18] Ancona C., "Wide angle sectoral horns using leaky-wave wall structures", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, vol. May, 475-477, 1974.
- [19] Abramowitz M. and Stegun I.A., "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York, 1972.
- [20] Chumachenko V.P. and Turk A.S., "Radiation characteristics of wide-angle H-plane sectoral horn loaded with dielectric of multiangular shape", *Int. Journal of Electronics*, vol. 88, No.1, pp. 91-101, 2001.



ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Serdar Türk, 1977 yılında Sinop'un Boyabat ilçesinde doğdu. İlköğrenimi Durağan İlköğretim Okulu, ortaöğrenimini ise Diyarbakır Cumhuriyet Fen Lisesi'nde tamamladı. 1996 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 1998 senesinde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde yüksek lisans eğitimini bitirdi ve aynı bölümde doktora eğitimine başladı. 1996-1999 yılları arasında GYTE Elektronik Müh. bölümünde araştırma görevliliği yapan Ahmet Serdar Türk, 1998-1999 döneminde yarı zamanlı olarak da çalıştığı TÜBİTAK Marmara Araştırma Merkezi Bilişim Teknolojileri Araştırma Enstitüsü'nde 1999'dan beri, RF&mikrodalga anten tasarımı, yüksek frekans radar sistemleri, elektromagnetik saçılma problemleri, RCS&EMC analiz ve ölçümleri konularında araştırmacı olarak görevini sürdürmektedir.



EKLER

Ek 1. Mathieu Fonksiyonları

(2.74)'teki Mathieu denklemini ele alalım:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + (h - 2q \cos 2\eta)T = 0$$

Bu denklemin periyodik çözümleri ile ilgilenilecektir. Eğer q sabit alınırsa h 'a bağlı bulunan periyodik çözümler öz değerler (eigen values) olarak isimlendirilir. Bu şekilde denklemin karşılık geldiği çözümlere *Mathieu fonksiyonları* yada *1.türden Mathieu fonksiyonları* adı verilir.

$T(\eta)$ bir Mathieu fonksiyonu ise, o takdirde $T(-\eta)$ ve $T(\eta) \pm T(-\eta)$ da bir Mathieu fonksiyonudur. Yani sadece çift ve tek Mathieu fonksiyonları ile çalışılacak biçimde sınırlama konulmalıdır. $0 \leq \eta < \pi$ yarı-açık aralığında n adet sıfırı bulunan çift Mathieu fonksiyonu $ce_n(\eta, q)$, tek Mathieu fonksiyonu da $se_n(\eta, q)$ olarak tanımlanır. h için karşılık gelen öz değerler ise sırasıyla a_n ve b_n 'dir. (2.74) diferansiyel denkleminin öz fonksiyon çözümü olan $T(\eta)$ 'nın sınır koşulları da şöyle olacaktır:

$$T(0) = T(\pi) = 0 \quad \text{ise} \quad ; se_n(\eta, q) \text{ elde edilir}$$

$$\left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=\pi} = 0 \quad \text{ise} \quad ; ce_n(\eta, q) \quad \text{“} \quad \text{“}$$

Sturm-Liouville problemi teoreminden çıkan sonuç itibarıyla; $se_n(\eta, q)$ öz fonksiyonu her $n=1,2,\dots$ için, $ce_n(\eta, q)$ ise her $n=0,1,2,\dots$ için sabit bir faktöre kadar tanımlıdır ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

$$ce_n(0, q) > 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} [ce_n(\eta, q)]^2 d\eta = \pi$$
$$\left. \frac{dse_n(\eta, q)}{d\eta} \right|_{\eta=0} > 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} [se_n(\eta, q)]^2 d\eta = \pi \quad (7.1)$$



Ayrıca değişik konfigürasyonlar için de sınır koşulları düzenlenebilir:

$$T(0) = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow T = se_{2m+2}(\eta, q) \quad \text{fonksiyonu } \pi\text{-periyotludur}$$

$$T(0) = \left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow T = se_{2m+1}(\eta, q) \quad \text{fonksiyonu } 2\pi\text{-periyotludur}$$

$$\left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=0} = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow T = ce_{2m+1}(\eta, q) \quad \text{fonksiyonu } 2\pi\text{-periyotludur}$$

$$\left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow T = ce_{2m}(\eta, q) \quad \text{fonksiyonu } \pi\text{-periyotludur}$$

Bu düzenlemeler neticesinde aşağıdaki eşitliklere ulaşılır:

$$T\left(-\frac{\pi}{2}\right) = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad ce_{2m+1}(\eta, q) \text{ ve } se_{2m+2}(\eta, q) \text{ için} \quad (7.2)$$

$$\left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=-\frac{\pi}{2}} = \left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad ce_{2m}(\eta, q) \text{ ve } se_{2m+1}(\eta, q) \text{ için} \quad (7.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} T(-\pi) = T(\pi) = 0 \\ \left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=-\pi} = \left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=\pi} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Tüm Mathieu fonksiyonları için} \quad (7.4)$$

Ayrıca $q \rightarrow 0$ için,

$$\left. \begin{array}{l} ce_n(\eta, q) \rightarrow \cos n\eta \\ se_n(\eta, q) \rightarrow \sin n\eta \end{array} \right\} \text{ değerlerine ve}$$

$$ce_0(\eta, q) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 'ye yakınsamaktadır.}$$

Mathieu fonksiyonlarının simetri bağlantıları Tablo 7.1'de verilmektedir.

| $T(\eta)$ | $T(-\eta)$ | $T(\pi-\eta)$ | $T(\pi+\eta)$ |
|-------------|--------------|---------------|---------------|
| ce_{2m} | ce_{2m} | ce_{2m} | ce_{2m} |
| ce_{2m+1} | ce_{2m+1} | $-ce_{2m+1}$ | $-ce_{2m+1}$ |
| se_{2m+1} | $-se_{2m+1}$ | se_{2m+1} | $-se_{2m+1}$ |
| se_{2m+2} | $-se_{2m+2}$ | $-se_{2m+2}$ | se_{2m+2} |

Tablo 7.1 Mathieu Fonksiyonlarının Simetri Özellikleri

Öz değer setleri şu şekilde düzenlenebilir:

$$a_0 < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < \dots; (q > 0)$$

$$a_n, b_n \rightarrow \infty \quad ; n \rightarrow \infty \text{ için} \quad (7.5)$$

Sturm-Liouville problemindeki öz fonksiyonların özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} se_n(\eta, q) &\approx \sin n\eta \\ ce_n(\eta, q) &\approx \cos n\eta \end{aligned} \quad ; n \rightarrow \infty \text{ için} \quad (7.6)$$

yaklaşıklık ifadelerine ulaşılır. Mathieu fonksiyonları periyodik olduğuna göre aşağıdaki gibi Fourier serilerine açılabilir [19]:

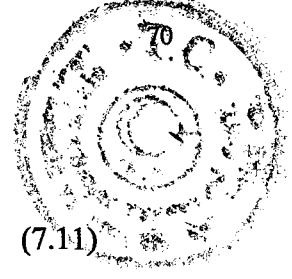
$$ce_{2m}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2m} \cos(2r\eta) \quad (7.7)$$

$$ce_{2m+1}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2m+1} \cos[(2r+1)\eta] \quad (7.8)$$

$$se_{2m+1}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{2m+1} \sin[(2r+1)\eta] \quad (7.9)$$

$$se_{2m+2}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{2m+2} \sin[(2r+2)\eta] \quad (7.10)$$

Buradaki açılım katsayıları ters Fourier dönüşüm tekniğiyle bulunabilir. Sturm-Liouville probleminin öz fonksiyonları olan Mathieu fonksiyonları aşağıdaki ortogonalite özelliklerine sahiptirler:



$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ce_{2m}(\eta, q).ce_{2k}(\eta, q)d\eta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ce_{2m+1}(\eta, q).ce_{2k+1}(\eta, q)d\eta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} se_{2m}(\eta, q).se_{2k}(\eta, q)d\eta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} se_{2m+1}(\eta, q).se_{2k+1}(\eta, q)d\eta = 0 \end{aligned} \right\} ; k \neq m \text{ için (7.11)}$$

$$\int_0^{\pi} ce_m(\eta, q).ce_k(\eta, q)d\eta = \int_0^{\pi} se_{2m+1}(\eta, q).se_{2k+1}(\eta, q)d\eta = 0 \quad ; k \neq m \text{ için (7.12)}$$

$$\int_0^{2\pi} ce_{2m}(\eta, q).se_{2k+1}(\eta, q)d\eta = 0 \quad ; k \neq m \text{ için (7.13)}$$

Aşağıda verilen (2.75) denkleminde, $h=a_n$ veya $h=b_n$ alınırsa Radyal (modifiye) Mathieu fonksiyonları elde edilir.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} - (h - 2q \cosh 2\xi)R = 0$$

Birinci türden modifiye Mathieu fonksiyonları şöyle tanımlanır:

$$\left. \begin{aligned} Ce_n(\xi, q) &= ce_n(i\xi, q) & , h = a_n \\ Se_n(\xi, q) &= -ise_n(i\xi, q) & , h = b_n \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

(7.14)'teki radyal bileşenler doğrudan tek veya çift olarak adlandırılmamakla birlikte, tek/çift özellikler taşıyan se ve ce fonksiyonlarıyla ilişkili olarak yazılmıştır. Ayrıca, Bessel fonksiyonlarının seri açılımları türünden de ifade edilebilirler [19]:

$$Ce_{2m}(\xi, q) = \frac{P_{2m}}{A_0^{2m}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2m} J_r(q^{1/2} e^{-\xi}) J_r(q^{1/2} e^{\xi}) \quad ; h = a_{2m} \quad (7.15a)$$

$$Ce_{2m+1}(\xi, q) = \frac{P_{2m+1}}{A_1^{2m+1}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{2m+1} \cdot [J_r(q^{1/2} e^{-\xi}) J_{r+1}(q^{1/2} e^{\xi}) + J_{r+1}(q^{1/2} e^{-\xi}) J_r(q^{1/2} e^{\xi})] \quad ; h = a_{2m+1} \quad (7.15b)$$

$$Se_{2m+1}(\xi, q) = \frac{S_{2m+1}}{B_1^{2m+1}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{2m+1} \cdot [J_r(q^{1/2} e^{-\xi}) J_{r+1}(q^{1/2} e^{\xi}) - J_{r+1}(q^{1/2} e^{-\xi}) J_r(q^{1/2} e^{\xi})] \quad ; h = b_{2m+1} \quad (7.15c)$$

$$Se_{2m+2}(\xi, q) = -\frac{S_{2m+2}}{B_2^{2m+2}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{2m+2} [J_r(q^{1/2} e^{-\xi}) J_{r+2}(q^{1/2} e^{\xi}) - J_{r+2}(q^{1/2} e^{-\xi}) J_r(q^{1/2} e^{\xi})] ; h = b_{2m+2} \quad (7.15d)$$



Burada,

$$\left. \begin{aligned} P_{2m} &= \frac{ce_{2m}(0, q) ce_{2m}(\frac{\pi}{2}, q)}{A_0^{2m}} \\ P_{2m+1} &= -\frac{ce_{2m+1}(0, q) ce'_{2m}(\frac{\pi}{2}, q)}{q^{1/2} A_1^{2m+1}} \\ S_{2m+1} &= \frac{se'_{2m+1}(0, q) se_{2m+1}(\frac{\pi}{2}, q)}{q^{1/2} B_1^{2m+1}} \\ S_{2m+2} &= \frac{se'_{2m+2}(0, q) se'_{2m+2}(\frac{\pi}{2}, q)}{q B_2^{2m+2}} \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

İkinci türden Mathieu fonksiyonları ise, $h=a_n$ için $Fey_n(\xi, q)$ ve $h=b_n$ için $Gey_n(\xi, q)$ şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonlar (2.a-d)'de, $J_r(q^{1/2} e^{\xi})$ yerine $N_r(q^{1/2} e^{\xi})$ konulmasıyla elde edilirler. Ayrıca Mathieu fonksiyonlarını, tıpkı Hankel fonksiyonlarında olduğu gibi, birinci ve ikinci tür yazılımlarının kombinasyonu şeklinde yazmak da mümkündür (üçüncü tür Mathieu fonksiyonu):

$$\left. \begin{aligned} Me_n^{(1)}(\xi, q) &= Ce_n(\xi, q) + iFey_n(\xi, q) \\ Ne_n^{(1)}(\xi, q) &= Se_n(\xi, q) + iGey_n(\xi, q) \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

$$\left. \begin{aligned} Me_n^{(2)}(\xi, q) &= Ce_n(\xi, q) - iFey_n(\xi, q) \\ Ne_n^{(2)}(\xi, q) &= Se_n(\xi, q) - iGey_n(\xi, q) \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Bu fonksiyonların açılımları, Bessel yerine Hankel fonksiyonları konulmak suretiyle, (7.15)'dekilerle aynı şekilde yazılabilir. Seri açılımlar tüm $\xi \geq 0$ değerleri için yeterince yakınsak karakteristik çizmektedir. ξ sabit ve $n \rightarrow \infty$ için asimptotik yaklaşımı şu şekildedir:



$$\frac{Me_n^{(2)}(\xi, q)}{Me_n^{(1)}(0, q)} \approx \frac{Ne_n^{(2)}(\xi, q)}{Ne_n^{(1)}(0, q)} \approx e^{-n\xi} \quad ; n \rightarrow \infty \text{ için}$$

Açısal ve radyal Mathieu fonksiyonları çok büyük ξ değerleri için Hankel fonksiyonları cinsinden aşağıdaki biçimde açılabilir [19]:

$$\left. \begin{aligned} Me_{2m}^{(j)}(\xi, q) ce_{2m}(\eta, q) &= P_{2m} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2m} H_{2r}^{(j)}(x\rho) \cos(2r\varphi) \\ Me_{2m+1}^{(j)}(\xi, q) ce_{2m+1}(\eta, q) &= P_{2m+1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{2m+1} H_{2r+1}^{(j)}(x\rho) \cos[(2r+1)\varphi] \\ Ne_{2m+1}^{(j)}(\xi, q) se_{2m+1}(\eta, q) &= s_{2m+1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{2m+1} H_{2r+1}^{(j)}(x\rho) \sin[(2r+1)\varphi] \\ Ne_{2m+2}^{(j)}(\xi, q) se_{2m+2}(\eta, q) &= -s_{2m+2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{2m+2} H_{2r+2}^{(j)}(x\rho) \sin[(2r+2)\varphi] \end{aligned} \right\} (7.20)$$

Burada;

$$\begin{aligned} x &= f \cosh \xi \cos \eta = \rho \cos \varphi \\ y &= f \sinh \xi \sin \eta = \rho \sin \varphi \end{aligned} \quad (7.21)$$