

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN UZAYINDA RWG FONKSİYONLARI
İLE UYARILMIŞ MANYETİK ALANIN
ANALİTİK İFADESİ

HÜSEYİN ARDA ÜLKÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE
2008

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN UZAYINDA RWG FONKSİYONLARI
İLE UYARILMIŞ MANYETİK ALANIN
ANALİTİK İFADESİ

HÜSEYİN ARDA ÜLKÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. GÖKHAN ÇINAR

GEBZE
2008



**GEBZE YÜKSEK
TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ**

**MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
JÜRİ ONAY FORMU**

JÜRİ

ÜYE (BAŞKAN) : Yrd. Doç. Dr. Gökhan Çınar

ÜYE : Yrd. Doç Dr. Erdal Korkmaz

ÜYE : Doç. Dr. A. Arif Ergin

Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı ile yukarıdaki öğretim elemanlarından oluşmuş jüri tarafından düzenlenen/...../..... tarihli Tez Savunma Tutanağı neticesinde Yüksek Lisans öğrencisi Hüseyin Arda ÜLKÜ 'nün çalışması GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Yönetim Kurulu/...../..... tarih ve/..../..... sayılı kararıyla Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak onaylanmıştır.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI : Zaman Uzayında RWG Fonksiyonları ile Uyarılmış Manyetik Alanın Analitik İfadesi

YAZAR ADI : Hüseyin Arda ÜLKÜ

Bu çalışmada darbesel olarak uyarılmış Rao-Wilton-Glisson (RWG) temel fonksiyonundan dolayı oluşan manyetik alan yoğunluğunun zaman uzayı örneklerinin elde edilmesi için yeni bir yöntem sunulmaktadır. Yaklaşımın formülasyonu doğrudan zaman uzayında gerçekleştirilmiştir. Manyetik alanın, RWG temel fonksiyonun üçgensel bölgesi ve merkezi gözlemci noktası olan ve $R = ct$ yarıçaplı kürenin kesişimi sonucu oluşan yay parçaları ile alakalı olduğu gösterilmiştir. Detaylı olarak, manyetik alan, yay uzunluğu ve açığortay vektörünün R 'ye göre değişimi ile gösterilebilir. Ayrıca bu tezde yay uzunluğu ve açığortay vektörünün analitik ifadeleri sunulmuştur. Önceki çalışmaların aksine, sunulan ifadelerde üçgen kenarları ile kürenin kesişim noktalarının belirlenmesi gerekmemektedir. Türetilen zaman uzayı formüllerinin doğruluğu, nümerik integrasyon ile frekans uzayında elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak gösterilmiştir. Son olarak, türetilen formüllerin parçalı tanımlı zamana göre temel fonksiyonlar ile konvolüsyonunun analitik ifadelerinin mevcut olduğu ve geliştirilen yöntemin ZAY algoritmasına adaptasyonu gösterilmiştir.

SUMMARY

TITLE OF THESIS : Analytical Evaluation Of Transient Magnetic Fields Due To
RWG Current Bases

AUTHOR : Hüseyin Arda ÜLKÜ

A new analytical approach for obtaining the time samples of the magnetic field intensity due to an impulsively excited Rao-Wilton-Glisson (RWG) basis function is presented. The approach is formulated directly in the time domain. It is shown that the magnetic field is related to the arc segments formed by the intersection of the triangular patch of the RWG basis with the sphere that is centered at the observation point and that has a radius of $R = ct$, where c is the speed of light. In particular, the magnetic field can be expressed as the variations of two quantities with respect to R . The first quantity is the arc segment length and the second quantity is the bisecting vector of the arc segment. Analytical representations of these quantities are presented. Contrary to previous studies, these representations do not require the calculation of the intersection points of the sphere with the boundaries of the bases. The validity of the obtained time domain formulae is demonstrated through comparison of the results with those obtained in the frequency domain by using numerical quadrature. Finally, it is demonstrated that the derived formulae yield closed-form expressions when convolved with piecewise polynomial temporal basis functions and how the proposed formulae can be adopted to the MOT algorithm is shown.

TEŞEKKÜR

Eğitim hayatım boyunca, bana destek olan aileme,

Bu çalışma süresince bana ayırdığı kısa zaman için Doç. Dr. A.Arif Ergin'e,

Maddi desteğinden ve birçok öğrenciye sağladığı fırsattan dolayı TÜBİTAK-BİDEB'e,

Teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. RWG FONKSİYONU İLE UYARILMIŞ MANYETİK ALANIN ANALİTİK İFADESİ	5
2.1. Manyetik Alanın Analitik İfadesi	5
2.1.1. $V_1(t)$ 'nin Analitik İfadesinin Elde Edilmesi	9
2.1.2. $\alpha(\zeta)$ ve $\partial_R \alpha(\zeta)$ 'nin Analitik Olarak Belirlenmesi	11
2.1.3. $V_2(t)$ 'nin Analitik İfadesinin Elde Edilmesi	14
2.1.4. $\mathbf{e}(\zeta)$ ve $\partial_R \mathbf{e}(\zeta)$ 'nin Analitik Olarak Belirlenmesi	16
2.1.5. Formüllerin Yorumlanması	19
2.2. Nümerik Sonuçlar	20
3. MANYETİK ALAN İNTEGRAL DENKLEMİNİN ZAMANDA ADIMLAMA YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ	27
3.1. Manyetik Alan İntegral Denklemi	27
3.2. MAİD'in ZAY'a Uyarlanması	28
3.3. Empedans Matrisinin Yeni Yöntemle Belirlenmesi	30
4. NÜMERİK SONUÇLAR	34
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	45
EK A47	
EK B48	
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER DİZİNİ

SİMGELER:

$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$	: Manyetik alan yoğunluğu
$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$	: Yüzey akım yoğunluğu
μ	: Manyetik geçirgenlik
c	: Işık hızı
$*$	: Konvolüsyon işlemi
$\mathbf{b}_n(\mathbf{r})$	: uzaya göre n . temel fonksiyon
$I_n(t)$	: uzaya göre n . temel fonksiyona ilişkin zamana bağlı katsayı
$T_i(t)$	: zamana göre i . temel fonksiyon
$I_{n,i}$	: uzaya göre n . ve zamana göre i . temel fonksiyona ilişkin katsayı
$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$	: Darbesel olarak uyarılmış manyetik alan yoğunluğu
$\delta(t)$	: Dirac delta fonksiyonu
$\mathbf{r}$	: Gözlem noktasının konum vektörü
$\boldsymbol{\rho}$	: Gözlem noktasının iz düşümünün konum vektörü
$\mathbf{r}'$	: Kaynak noktasının konum vektörü
$\boldsymbol{\rho}'$	: Kaynak noktasının iz düşümünün konum vektörü
R	: Gözlem noktası ile kaynak arasındaki uzaklık
$\mathbf{R}$	: Kaynak noktasından gözlem noktasına doğru olan vektör
l_n	: n . RWG temel fonksiyonunun ortak kenarı
$S_n^\pm$	: n . RWG fonksiyonun $(\pm)$ üçgen yüzeyi
$A_n^\pm$	: n . RWG fonksiyonun $(\pm)$ üçgen alanı
(u, v, n)	: Yerel kartezyen koordinat sistemi
(ζ, ϕ, n)	: Yerel silindirik koordinat sistemi
$\mathbf{r}_i$	: Üçgen köşesinin konum vektörü $i = 1, 2, 3$
$(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{n}})$	: Yerel koordinat sistemi için birim vektörler
$V_1(t)$	: Manyetik alana olan skaler katkı
$\mathbf{V}_2(t)$	: Manyetik alana olan vektör katkı

$\alpha(\zeta)$	: Yay uzunluğu fonksiyonu
$\partial_R \alpha(\zeta)$	: $\alpha(\zeta)$ 'nın R 'ye göre değişimi
$\mathbf{e}(\zeta)$	: Açıortay fonksiyonu
$\partial_R \mathbf{e}(\zeta)$	: $\mathbf{e}(\zeta)$ 'nın R 'ye göre değişimi
$e_u(\zeta)$	: $\mathbf{e}(\zeta)$ 'nın u yönündeki bileşeni
$e_v(\zeta)$	: $\mathbf{e}(\zeta)$ 'nın v yönündeki bileşeni
$\partial_\zeta e_u(\zeta)$	: $\mathbf{e}(\zeta)$ 'nın u yönündeki bileşenin ζ 'ya göre değişimi
$\partial_\zeta e_v(\zeta)$	: $\mathbf{e}(\zeta)$ 'nın v yönündeki bileşenin ζ 'ya göre değişimi
$V_{1,i}(t)$	: i . kenarın $V_1(t)$ 'ye katkısı
$V_{2,i}(t)$	: i . kenarın $V_2(t)$ 'ye katkısı
$\alpha_i(\zeta)$	: i . kenarın dolaylı oluşan yay uzunluğu fonksiyonu
$\partial_\zeta \alpha_i(\zeta)$	: $\alpha_i(\zeta)$ 'nın ζ 'ya göre değişimi
$e_{u,i}(\zeta)$	: i . kenardan $e_u(\zeta)$ 'ya olan katkı
$e_{v,i}(\zeta)$	: i . kenardan $e_v(\zeta)$ 'ya olan katkı
$\partial_\zeta e_{u,i}(\zeta)$	: $e_{u,i}(\zeta)$ 'nın ζ 'ya göre değişimi
$\partial_\zeta e_{v,i}(\zeta)$	: $e_{v,i}(\zeta)$ 'nın ζ 'ya göre değişimi

KISALTMALAR DİZİNİ

KISALTMALAR:

RKA	: Radar Kesit Alanı
ZUSF	: Zaman Uzayı Sonlu Farklar
SEM	: Sonlu Elemanlar Metodu
MM	: Moment Metodu
EAİD	: Elektrik Alan İntegral Denklemi
MAİD	: Manyetik Alan İntegral Denklemi
ZAY	: Zamanda Adımlama Yöntemi
RWG	: Rao-Wilton-Glisson
s	: Saniye
ns	: Nanosaniye
m	: Metre

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil:</u>	<u>Sayfa:</u>
2.1. RWG temel fonksiyonu.	7
2.2. Üçgen yüzeyi için vektör tanımları.	8
2.3. Herhangi bir üçgen için integrasyon sınırları	10
2.4. $\mathbf{e}(\zeta)$ ve $\alpha(\zeta)$ 'nin hesaplanması için parametreler.	15
2.5. $\mathbf{r} = (16, -7, 1)$ için $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin z bileşeni.	22
2.6. Üçgen düzleminin yukarısındaki $\mathbf{r} = (16, -7, 3)$ için $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$.	24
2.7. S_n üzerindeki $\mathbf{r} = (9.064, -0.705, -5.423)$ için $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$.	25
2.8. S_n 'nin yukarısındaki $\mathbf{r} = (7.9326, -2.1192, -4.5745)$ için $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$.	26
4.1. Küre üzerinde gözlenen akımın karşılaştırılması.	36
4.2. Kürenin 140 MHz'deki RKA değeri.	37
4.3. Kürenin 160 MHz'deki RKA değeri.	38
4.4. Kürenin 200 MHz'deki RKA değeri.	39
4.5. Kürenin 260 MHz'deki RKA değeri.	40
4.6. Kürenin 131 MHz'deki RKA değeri.	41
4.7. Kürenin 275 MHz'deki RKA değeri.	42
4.8. Küp üzerinde gözlenen akımın karşılaştırılması.	43
4.9. Küpün 100 MHz'deki RKA değeri.	44
4.10. Küpün 120 MHz'deki RKA değeri.	44

1. GİRİŞ

Elektromanyetik dalgalar, günümüzde, haberleşmeden tıba, askeri uygulamalardan sivil uygulamalara birçok alanda kullanılmaktadır. Elektromanyetik teori ise dalga olayını açıklayan bir dizi denklem sistemi üzerine kurulmuş sağlam bir teoridir. Nitekim Mithat İdemen'in 1973'te sınır koşullarının bu denklemler içerisinde gömülü olduğunu göstermesi [1] ve denklemlerin doğası gereği Einstein'nın özel görelelik kuramını sağlaması [2], elektromanyetik teorinin ve bu denklemler dizisinin oluşturduğu yapının ne kadar sağlam temeller üzerine kurulu olduğunu kanıtlar niteliktedir.

Elektromanyetik dalgaların muhtemelen en yaygın kullanım alanlarından biri radarlardır. Radar sistemleri sadece askeri değil, hava alanı kontrolü, hız ölçümü, hava tahmini gibi alanlarda da kullanılmaktadır. Bir cismin radar tarafından saptanabilirliğinin ölçütü radar kesit alanı (RKA: *radar cross section - RCS*) olduğundan dolayı bir cisim için RKA değerinin belirlenmesi çok büyük önem taşımaktadır. RKA, nesnenin geometrik şekline, yönelimine, nesneyi oluşturan parametrelere ve gelen dalganın frekansına ve polarizasyonuna bağlı, karmaşık bir ölçüdür [3], [4]. Hızlı bilgisayarların gelişiminden ve nümerik yöntemlerdeki ilerlemelerden önce karmaşık yapılı nesnelerin RKA değerleri sadece doğrudan ölçüm ile belirlenebiliyordu. Bu ölçümler önemli derecede zaman kaybına yol açan ve aşırı maliyetli ölçümlerdir [5]. Bundan dolayı saçılma ve benzeri problemlerin çözümü önem kazanmıştır.

Bilgisayar teknolojisinin gelişimi ile birlikte RKA gibi saçılma ve ışıınım problemleri nümerik olarak çözülmeye başlandı. Bu gelişime paralel olarak nümerik yöntemler de geliştirildi. En çok bilinen yöntemler zaman uzayı sonlu farklar yöntemi (ZUSF: *finite difference time domain - FDTD*), sonlu elemanlar metodu (SEM: *finite elements method - FEM*) ve moment metodu (MM: *method of moments - MoM*)'dur. Bunlardan ZUSF, diferansiyel denklemlere dayanırken, MM integro-diferansiyel denklem çözümünü üzerine kuruludur.

İntegral denklemler, (radyasyon koşulunu sağlaması gibi) ışıınım ve saçılma problemlerinde bazı üstünlüklere sahiptir. MM'nin amacı, saçıcı yüzeyinde

indüklenen bilinmeyen akım yoğunluğunu belirlemektir. İntegral denklemler saçıcı özelliğine ve sınır koşullarına göre çeşitlendirilebilir. Bunlardan mükemmel iletken cisimler için olan Elektrik Alan İntegral Denklemi (EAİD: *Electric Field Integral Equation - EFIE*) ve Manyetik Alan İntegral Denklemi (MAİD: *Magnetic Field Integral Equation - MFIE*) en yaygın olarak kullanılanlardır. EAİD hem kapalı hem de açık yüzeyler için geçerli olurken, MAİD'in sadece kapalı yüzeyler için geçerli olduğu unutulmamalıdır [6].

Moment metodu, R. F. Harrington'un [7], metodun çok yönlü ve kullanışlı bir yöntem olduğunu göstermesinden sonra MM'nun elektromanyetikteki integral denklem çözümlerinde kullanımı artmıştır. Fakat karmaşık şekillere sahip nesnelerden geniş bantlı sinyallerin saçıldığı durumlarda frekans uzayı analizi uzun süre ve donanım gereksinimine ihtiyaç duyar. Bu tip problemler için integral denklemlerin zaman uzayı çözümleri daha hızlı, güvenilir ve az donanımsal gereksinim gerektiren çözümler üretir [8]. MM'nun zaman uzayı karşılığı olan Zamanda Adımlama Yöntemi (ZAY: *Marching-on-in-Time - MOT*), [9]'da anlatılmaktadır. İster zaman ister frekans uzayında olsun bu yöntemlerde akımı doğru modelleyebilecek temel ve test fonksiyonlarının seçimi önemlidir. Bu amaçla literatürde birçok test ve temel fonksiyonlar kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları [10]'da anlatılmaktadır.

En çok kullanılan temel ve test fonksiyonlarından biri RWG fonksiyonlarıdır [11]. RWG fonksiyonları, 1982 yılında M. Rao, D. R. Wilton ve A. W. Glisson tarafından tanımlanan üçgensel yüzeyler üzerinden akan akımlar olarak ifade edilen fonksiyonlardır. 1984 yılında ise RWG fonksiyonlarının oluşturduğu vektör ve skaler potansiyellerin tekilite probleminin giderilmesi için bir yöntem geliştirilmiştir [12]. RWG fonksiyonları uygulanabilirliği ve verimli sonuç vermesinden dolayı birçok problemin çözümünde kullanılmış ve araştırmalar bu fonksiyonlar üzerinden gerçekleştirilmiştir [13]-[20].

RWG fonksiyonunun aksine Radon transformunun saçılma problemlerine uygulanması veya saçılma problemlerindeki integral denklemlerin aslında bir tür Radon transformu olduğu fikri oldukça yenidir. Bunun ilk örneğini D. Bölükbaş ve A. A. Ergin, 2005'te yüksek frekans tekniği olan fiziksel optik yöntemine

uygulamışlardır [21]. Fiziksel optik yönteminde Radon transformu, düzlemsel dalga ile bir üçgen üzerinden doğrudan uzak alanın analitik ifadesinin elde edilmesi için kullanılmıştır. Diğer bir deyişle, fiziksel optik yöntemindeki ışınma integrali düzlemsel Radon transformu olarak değerlendirilmiştir. Bu çalışma sonrasında 2006'da benzer bir teknik ile A.C. Yücel ve A. A. Ergin, vektör ve skaler potansiyel ifadelerini analitik olarak hesapladılar ve potansiyellerin aslında bir küre ile RWG temel fonksiyonunu oluşturan üçgenin kesişimi sonucu oluşan yay uzunluğu ve açığortay vektörü gibi basit geometrik değişkenler ile belirlenebileceğini gösterdiler [13]. Buradaki çalışmanın temelinde küresel Radon transformu yatmaktadır. Ayrıca aynı çalışmada potansiyel içerisindeki tekilliklerin verilen analitik formüllerde görülmediğini, analitik ifade ile tekilliğin ortadan kalktığını da göstermişlerdir. Ancak bu değişkenleri belirlerken sundukları algoritma küre ile üçgenin kesişim noktalarını sayısal hesaplama ile belirlediğinden dolayı bu yöntem sadece EAİD'e uygulanabilir haldedir. Aksine bu değişkenlerin MAİD'de uygulanabilmesi için analitik olarak türev ifadeleri gerektiğinden bu değişkenler için analitik ifadelerin belirlenmesi büyük önem taşımaktadır.

Bu tezde RWG temel fonksiyonu tarafından uyarılmış akımlardan dolayı oluşacak manyetik alanın analitik ifadesinin, zamana göre temel fonksiyonlardan bağımsız olarak türetilmesi amaçlanmaktadır. Diğer bir yenilik ise [13]'te nümerik olarak hesaplanan üçgen ve kürenin kesişimi sonucu oluşan değişkenler (yay uzunluğu ve açığortay vektörü) için analitik formüller sunulacaktır. Elde edilen formüllerin zamana göre temel fonksiyonlardan bağımsız olması nedeniyle algoritma içerisinde zamana göre temel fonksiyonların seçiminde serbestlik sağlanmaktadır. Ayrıca zamana göre temel fonksiyonlar özel olarak parçalı tanımlı polinom fonksiyonlar seçilirse konvolüsyon ifadesinin analitik olarak belirlenebileceği de gösterilecek ve türetilen formülasyon MAİD'in ZAY ile çözümüne uygulanacaktır.

Bu bilgiler ışığında, bu tez aşağıdaki formda düzenlenmiştir: Bölüm 2'de RWG fonksiyonundan dolayı oluşan manyetik alanın analitik ifadesi türetilecek ve doğruluğu test edilecektir. Bölüm 2'nin alt bölümlerinde manyetik alanın, merkezi gözlem noktası olan ve c ışık hızı olmak üzere $R = ct$ yarıçaplı küre ile RWG fonksiyonunu oluşturan üçgenin kesişimi sonucu ortaya çıkan yay uzunluğunun ve açığortay vektörünün R 'ye göre değişimi ile alakalı olduğu gösterilecektir. Ayrıca

oluşacak açıortay vektörü, yay uzunluğu ve bunların değişimlerinin analitik olarak belirlenmesi için formüller sunulacaktır ve bulunan formüllerin tekillikleri incelenecektir. Bölüm 2.2’de bulunan formüllerin doğruluğu test edilecektir. Bölüm 3’te ise MAİD’in ZAY’a uyarlanması ve önceki bölümde türetilen formüllerin ZAY ile birleştirilmesi anlatılacaktır. Bölüm 3.1’de hem zaman hem de frekans uzayı MAİD verilecek, Bölüm 3.2’de ise standart ZAY algoritması sunulacak ve zaman uzayı MAİD’in çözümü anlatılacaktır. Bölüm 3.3’te ise Bölüm 2’de türetilen formüller basitleştirilecek ve ZAY algoritması içerisinde kullanımı anlatılacaktır. Bölüm 4’te Bölüm 3.3’te anlatılan yöntemin doğruluğu, akımların standart ZAY yöntemi ile ve RKA değerlerinin standart ZAY yöntemi ve frekans uzayı MAİD’in MM aracılığıyla çözümü ile karşılaştırılarak gösterilecektir. Bölüm 5’te tezin sonuçları ve öneriler sunulacaktır. Ek A’da formüllerin türetiminde kullanılan Dirac delta fonksiyonun bazı özellikleri ve Ek B’de ise zamana göre konvolüsyon için gerekli integral ifadeleri verilecektir.

2. RWG FONKSİYONU İLE UYARILMIŞ MANYETİK ALANIN ANALİTİK İFADESİ

Bu bölümde darbesel olarak uyarılmış RWG fonksiyonu ile ifade edilen akımdan dolayı oluşacak manyetik alanın analitik ifadesi türetilecektir. Bunun için ilk olarak vektör potansiyelden manyetik alan türetilecek ve manyetik alan için gerekli integral ifadeleri belirlenecektir. Daha sonra bu integral ifadelerinin analitik olarak belirlenmesi için gerekli geometrik ifadeler türetilecektir. Son olarak türetilen analitik ifadenin doğruluğu, frekans uzayı örneklerinin ters ayırık Fourier transformu alınarak elde edilen zaman uzayı sonuçları ile karşılaştırılarak gösterilecektir.

2.1. Manyetik Alanın Analitik İfadesi

Manyetik alan $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \left[\mu \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} dS' \right] \quad (2.1)$$

olarak yazılabilir. Burada, μ ortamın manyetik geçirgenliği, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ manyetik alanın oluşmasına neden olan akım yoğunluğunu, S akımın bulunduğu yüzeyi, c ışık hızını ve $*$ zamana göre konvolüsyonu belirtmektedir. Köşeli parantez içerisindeki ifade gecikmeli manyetik vektör potansiyeldir. ZAY'da bilinmeyen akım yoğunluğu uzaya göre temel fonksiyonlar ile aşağıdaki gibi ayrıklaştırılabilir:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_n I_n(t) \mathbf{b}_n(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Burada $\mathbf{b}_n(\mathbf{r})$, uzaya göre n . temel fonksiyon ve $I_n(t)$ ise bu temel fonksiyona ilişkin zamana bağlı katsayıdır. Daha sonraki bölümlerde $I_n(t)$, zamana göre temel fonksiyonlar ve katsayılar olarak bileşenlerine ayrıştırılacaktır. Ancak bu bölümdeki formülasyon $I_n(t)$ 'nin davranışından bağımsızdır. Denklem (2.2), (2.1) eşitliğinde yerine yazıldığında, manyetik alan

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_n I_n(t) * \underbrace{\int_{S_n} \nabla \times \left[\mathbf{b}_n(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} \right] dS'}_{\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)} \quad (2.3)$$

olarak bulunabilir. Burada $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$, darbesel olarak uyarılmış uzaya göre n . temel fonksiyondan dolayı oluşan manyetik alanın ifadesidir ve S_n alanın oluşmasına neden olan akımı içeren yüzeydir. Denklem (2.3)'te verilen $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$, $\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = (\nabla \psi) \times \mathbf{A} + \psi (\nabla \times \mathbf{A})$ vektör özdeşliği kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

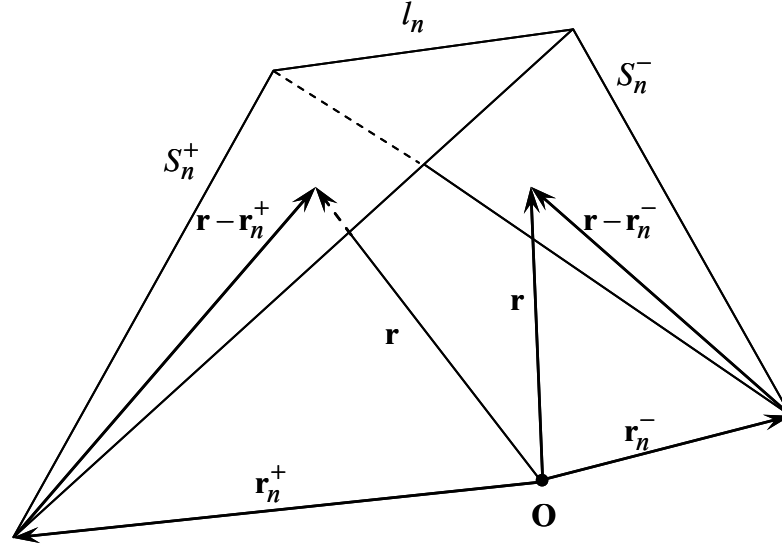
$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = \int_{S_n} \underbrace{[\nabla \times \mathbf{b}_n(\mathbf{r}')]_0}_{0} \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} dS' + \int_{S_n} \nabla \left[\frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} \right] \times \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') dS'. \quad (2.4)$$

Denklem (2.4)'teki ilk integralde, üssüz koordinatlara göre rotasyonel işlemi üslü koordinatlara göre olan bir fonksiyona etki etmektedir. Bundan dolayı bu işlemin sonucu sıfırdır. İkinci integralde ise Ek A'da denklem (A.1) ile verilen Dirac delta fonksiyonun özelliği kullanılır ve (2.4) eşitliği

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = \int_{S_n} \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') \times \nabla' \left[\frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} \right] dS' \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir.

ZAY'da, RWG fonksiyonları [11] sıklıkla kullanılan uzaya göre temel fonksiyonlardır. RWG temel fonksiyonu, Şekil 2.1'de görüldüğü gibi, uzunluğu l_n olan ortak bir kenara sahip, iki üçgensel yüzey ile tanımlanır, S_n^+ ve S_n^- . A_n^+ ve A_n^- , sırasıyla, bu üçgenlerin yüzey alanlarını belirtsin. Buna göre ilgili vektörlerin gösterildiği Şekil 2.1'e uygun olarak RWG fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:



Şekil 2.1. RWG temel fonksiyonu.

$$\mathbf{b}_n^\pm(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\pm l_n}{2A_n^\pm} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^\pm) & ; \mathbf{r} \in S_n^\pm \\ 0 & ; \mathbf{r} \notin S_n^\pm \end{cases} \quad (2.6)$$

Denklem (2.6), (2.5) eşitliğinde yerine yazılırsa, S_n üzerinden olan yüzey integrali, S_n^+ ve S_n^- üçgen çifti üzerinden bir integrale dönüşür. Kolaylık açısından S_n^+ üzerinden olan integral ile çalışalım. Sonuçlar, S_n^- üzerinden olan integralin sonucuna kolayca dönüştürülebilir. Bu durumda, kısalık için “+” indisini ihmal ederek, denklem (2.5)

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = \frac{l_n}{2A_n} \int_{S_n} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) \times \nabla' \left[\frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} \right] dS' \quad (2.7)$$

olarak yazılabilir.

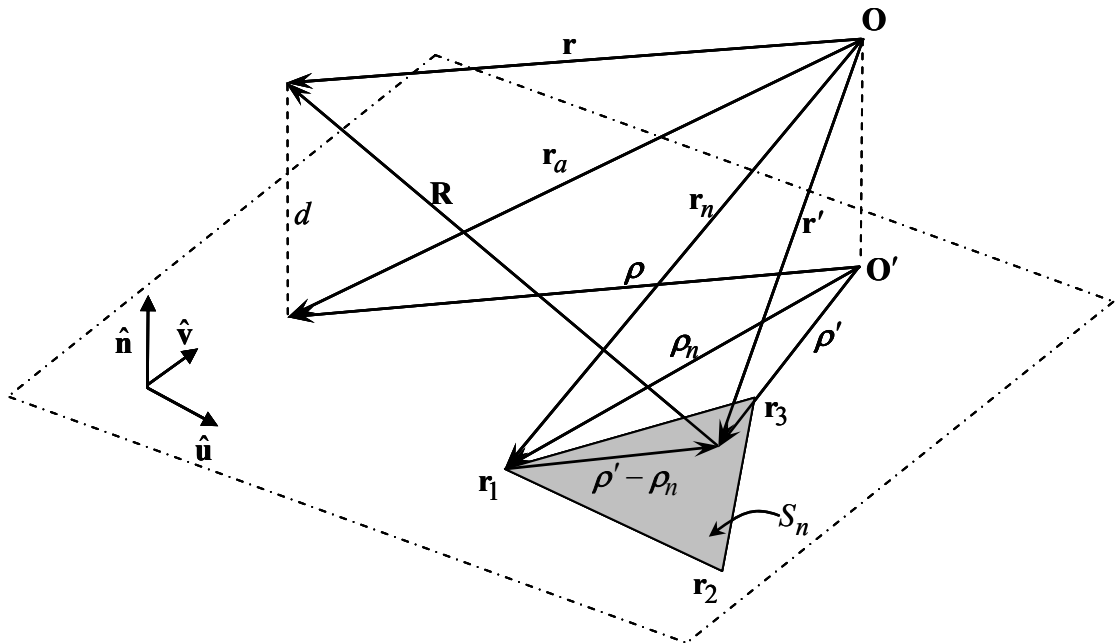
Denklem (2.7)’nin çözümlenmesi için, ilk adım olarak, gradyant operatörü küresel koordinatlarda yazılabilir. Bu durumda denklem (2.7) aşağıdaki hali alır:

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = -\frac{l_n}{8\pi A_n} \int_{S_n} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) \times \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta(t - R/c)}{R} \right] dS'. \quad (2.8)$$

Denklem (2.8)'de, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, aynı zamanda $\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + \hat{\mathbf{n}}d - \boldsymbol{\rho}'$ olarak yazılabilir. Şekil 2.2'de gösterildiği gibi, burada $\hat{\mathbf{n}}$, S_n yüzeyine dik olan birim normal vektörü ve d gözlem noktası $\mathbf{r}'$ den S_n yüzeyini içeren düzleme olan uzaklığı belirtmektedir. Aynı zamanda, $\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n = \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}_n$ eşitliği, $\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n = (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n)$ olarak yazılabilir. Yukarıda verilen vektör ilişkileri kullanılarak (2.8) eşitliğindeki integral iki parçaya ayrılabilir. Son olarak, (A.2) eşitliği ile verilen Dirac delta fonksiyonunun özelliği kullanılarak, denklem (2.8),

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) &= -\frac{l_n c}{8\pi A_n} \int_{S_n} [(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n)] \times [(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') + \hat{\mathbf{n}}d] \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta(ct - R)}{R} \right] dS' \\ &= -\frac{l_n c}{8\pi A_n} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \times (\hat{\mathbf{n}}d) \underbrace{\int_{S_n} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta(ct - R)}{R} \right] dS'}_{V_1(t)} \\ &\quad + \frac{l_n c}{8\pi A_n} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n + \hat{\mathbf{n}}d) \times \underbrace{\int_{S_n} (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta(ct - R)}{R} \right] dS'}_{\mathbf{V}_2(t)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

olarak yazılabilir.



Şekil 2.2. Üçgen yüzeyi için vektör tanımları.

$V_1(t)$ ve $V_2(t)$ için analitik ifadeler bulunduğunda, $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ kolayca hesaplanabilir. Görüldüğü gibi $V_1(t)$ skaler ve $V_2(t)$ ise vektör fonksiyonu belirtmektedir. Bir sonraki alt bölümde bu fonksiyonlar için analitik ifadeler türetilcektir.

2.1.1. $V_1(t)$ 'nin Analitik İfadesinin Elde Edilmesi

$V_1(t)$ 'nin analitik ifadesini bulmak için, ilk olarak, Şekil 2.2'de gösterildiği gibi orijini ρ ile çakışık yerel bir koordinat sistemi tanımlanmalıdır. Bu yerel sistemdeki kartezyen koordinatlar (u, v, n) ile belirtilsin ve ilgili birim vektörler

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} &= \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)|} \\ \hat{\mathbf{u}} &= \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \\ \hat{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad (2.10)$$

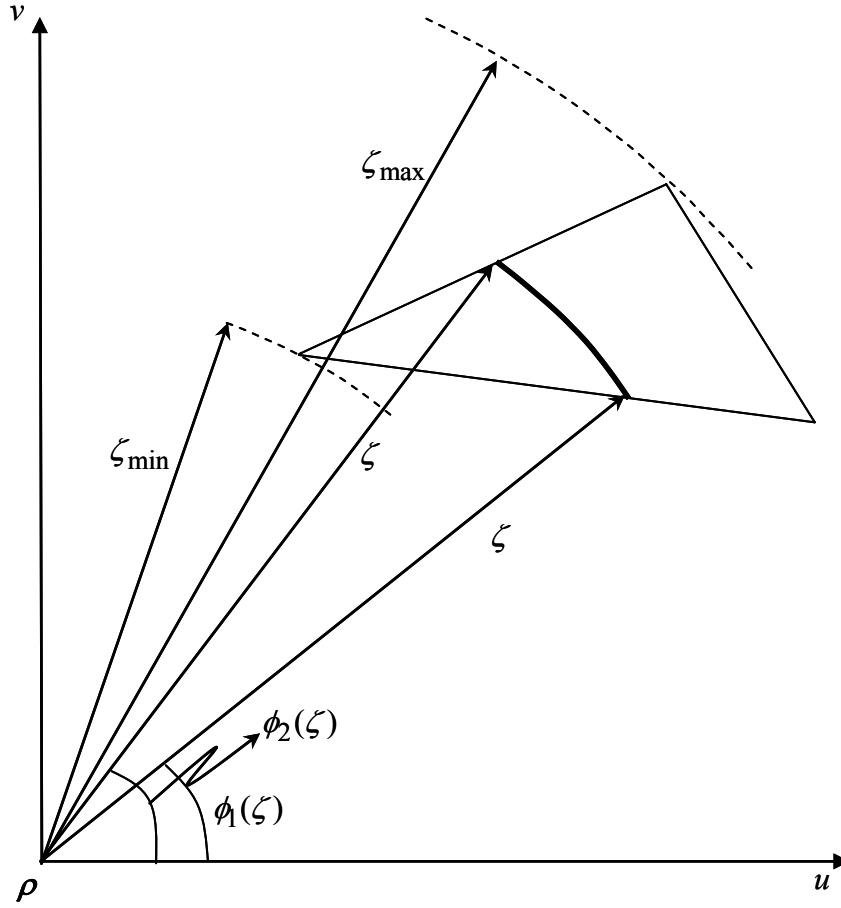
olarak tanımlansın. Burada $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ ve $\mathbf{r}_3$, S_n üçgeninin köşelerini belirtmektedir. (ζ, ϕ, n) , bu sistemin yerel silindirik koordinat sistemini belirtsin. $V_1(t)$ integrali, yeni tanımlanan yerel silindirik koordinat sisteminde

$$V_1(t) = \int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \int_{\phi_1(\zeta)}^{\phi_2(\zeta)} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta(ct - R)}{R} \right] \zeta d\phi d\zeta \quad (2.11)$$

olarak yazılabilir. İntegrasyon sınırları Şekil 2.3'te görüldüğü gibidir. Görüldüğü gibi integrand ϕ 'den bağımsızdır. Bu durumda iç integral $\alpha(\zeta) = \phi_2(\zeta) - \phi_1(\zeta)$ olarak bulunabilir. Dış integrali hesaplamak için, R 'ye göre türev işlemi hesaplanmalı ve integral değişkeni ζ 'dan $R = \sqrt{\zeta^2 + d^2}$ 'ye değiştirilmelidir.

$$V_1(t) = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \alpha\left(\sqrt{R^2 - d^2}\right) \left[\frac{R \partial_R \delta(ct - R) - \delta(ct - R)}{R^2} \right] dR. \quad (2.12)$$

Burada ∂_R , R 'ye göre türev işlemi belirtmektedir. (A.3) özelliği kullanılarak, denklem (2.12) aşağıdaki şekilde yazılabilir:



Şekil 2.3. Herhangi bir üçgen için integrasyon sınırları

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \left\{ -\partial_R \left[\frac{\alpha(\sqrt{R^2 - d^2})}{R} \right] - \frac{\alpha(\sqrt{R^2 - d^2})}{R^2} \right\} \delta(ct - R) dR \\
 &= - \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{\partial_R \alpha(\sqrt{R^2 - d^2})}{R} \delta(ct - R) dR.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

(A.4) özelliği kullanılarak, $V_1(t)$ 'nin analitik ifadesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$V_1(t) = \begin{cases} -R^{-1} \partial_R \alpha(\sqrt{R^2 - d^2}) \Big|_{R=ct} & ; \quad R_{\min} < ct < R_{\max} \\ 0 & ; \quad \text{diğer } t \end{cases} \tag{2.14}$$

Bundan sonra $\alpha\left(\sqrt{(ct)^2 - d^2}\right)$ 'yi belirtmek için, $\zeta = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{(ct)^2 - d^2}$ olduğundan dolayı $\alpha(\zeta)$ kullanılacaktır.

Burada $\alpha(\zeta)$, merkezi $\mathbf{r}$ ve yarı çapı $R = ct$ olan küre ile S_n üçgeninin kesişimi sonucu oluşan yay uzunluğudur (radyan olarak). Eğer $R < d$ ise küre ve üçgenin bulunduğu düzlem kesişmeyecektir.

$$\alpha(\zeta) = 0 ; ct < d \quad (2.15)$$

2.1.2. $\alpha(\zeta)$ ve $\partial_R \alpha(\zeta)$ 'nın Analitik Olarak Belirlenmesi

$\alpha(\zeta)$ 'nin nasıl belirlenebileceğinin detaylı açıklaması [13]'te mevcuttur. Bu alt bölümde $\alpha(\zeta)$ 'nin daha verimli olarak belirlenebileceği alternatif bir yöntem sunulacaktır. Bu amaçla bazı değişkenleri şu şekilde tanımlayalım: ξ_i , $i = 1, 2, 3$, S_n üçgensel yüzeyi için ρ 'nun barisentrik (alan) koordinatlarını belirtsin. Ayrıca C_i , $i = 1, 2, 3$, S_n 'nin i . kenarını ve l_i bu kenarın uzunluğunu belirtsin. Bu tanımlamalar ile, $\alpha(\zeta)$

$$\alpha(\zeta) = \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \alpha_i(\zeta) ; ct > d \quad (2.16)$$

ile belirlenebilir. Burada $\text{sgn}(\cdot)$ fonksiyonu

$$\text{sgn}(\xi) = \begin{cases} -1 & \xi < 0 \\ 1 & \xi \geq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

olarak tanımlanır ve $\alpha_i(\zeta)$, ρ noktası ve üçgenin i . kenarı için yay uzunluğu fonksiyonudur. $\alpha_i(\zeta)$ 'nin değerini belirlemek için, $l_{i,\min}$ ve $l_{i,\max}$, sırasıyla, Şekil 2.4'te gösterildiği gibi, ρ noktasından C_i doğru parçasının uçlarına olan küçük ve büyük uzaklıkları belirtsin. Benzer olarak, $\phi_{i,\min}$ ve $\phi_{i,\max}$, u eksenini ile, sırasıyla, $l_{i,\min}$ ve $l_{i,\max}$ arasında kalan açılarını belirtsin. Aynı zamanda, a_i , ρ 'dan C_i doğru

parçası doğrultusuna olan dik uzunluğu belirtsin. Eğer $l_{i,\max}^2 > l_{i,\min}^2 + l_i^2$ ise, Şekil 2.4(a)'da gösterildiği gibi ρ 'nun iz düşümü C_i doğru parçasının dışarısındadır ve

$$\alpha_i(\zeta) = \begin{cases} \cos^{-1}(a_i / l_{i,\max}) - \cos^{-1}(a_i / l_{i,\min}) & ; \zeta < l_{i,\min} \\ \cos^{-1}(a_i / l_{i,\max}) - \cos^{-1}(a_i / \zeta) & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; l_{i,\max} < \zeta \end{cases} \quad (2.18)$$

olarak belirlenir. Eğer $l_{i,\max}^2 \leq l_{i,\min}^2 + l_i^2$ ise, Şekil 2.4(b)'de görüldüğü gibi, iki yay parçası oluşur. Bundan dolayı $\alpha_i(\zeta)$ iki yay uzunluğunun toplamı ile belirlenebilir.

$$\alpha_i(\zeta) = \alpha_{i,\min}(\zeta) + \alpha_{i,\max}(\zeta) \quad (2.19)$$

$\alpha_{i,\min}(\zeta)$ ve $\alpha_{i,\max}(\zeta)$, $m \in \{\max, \min\}$ olmak üzere aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\alpha_{i,m}(\zeta) = \begin{cases} \cos^{-1}(a_i / l_{i,m}) & ; \zeta < a_i \\ \cos^{-1}(a_i / l_{i,m}) - \cos^{-1}(a_i / \zeta) & ; a_i \leq \zeta < l_{i,m} \\ 0 & ; l_{i,m} < \zeta \end{cases} \quad (2.20)$$

(2.16)-(2.20) eşitliklerinin, S_n üçgeninin kenarları ve $R = ct$ yarıçaplı kürenin kesişim noktalarını hesaplanmadan belirlendiğine dikkat edilmelidir. Kesişim noktalarını hesaplamadan geometrik değerlerin belirlenmesi türetilen formülasyonun hesaplamasal olarak [13]'te sunulan algorithmadan daha verimli olmasını sağlamaktadır.

$\alpha(\zeta)$ 'nin R 'ye göre türevi, denklem (2.16)'ya zincir kuralı uygulanarak,

$$\partial_R \alpha(\zeta) = \frac{\sqrt{\zeta^2 + d^2}}{\zeta} \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \partial_\zeta \alpha_i(\zeta) \quad (2.21)$$

olarak belirlenebilir. Burada $\partial_\zeta \alpha_i(\zeta)$, (2.18)-(2.20) eşitlikleri aracılığıyla aşağıdaki gibi belirlenir:

$$l_{i,\max}^2 > l_{i,\min}^2 + l_i^2 \text{ ise,}$$

$$\partial_{\zeta} \alpha_i(\zeta) = \begin{cases} \frac{-a_i}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (2.22)$$

ve $l_{i,\max}^2 \leq l_{i,\min}^2 + l_i^2$ ise,

$$\partial_{\zeta} \alpha_i(\zeta) = \partial_{\zeta} \alpha_{i,\max}(\zeta) + \partial_{\zeta} \alpha_{i,\min}(\zeta), \quad (2.23)$$

burada;

$$\partial_{\zeta} \alpha_{i,m}(\zeta) = \begin{cases} \frac{-a_i}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} & ; a_i \leq \zeta < l_{i,m} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases}. \quad (2.24)$$

Böylece $V_1(\mathbf{r}, t)$ 'nin analitik ifadesinin elde edilmesi için gerekli formüllerin türetimi tamamlanmıştır. Ancak türetilen $\partial_{\zeta} \alpha_i(\zeta)$ ifadelerinin tekil davranışına dikkat edilmelidir. (2.22) eşitliği dikkatli bir şekilde incelendiğinde, eşitliğin tekillik durumunun görülmediği ortaya çıkar. Çünkü (2.22) eşitliği ile verilen durumda $l_{i,\min} < \zeta$ şartı doğal olarak $0 \leq a_i \leq l_{i,\min}$ ile birlikte $\zeta = 0$ ve $\zeta = a_i$ olamayacağını garanti eder. $l_{i,\max}^2 \leq l_{i,\min}^2 + l_i^2$ durumu için verilen (2.24) eşitliği $a_i > 0$ durumu için inceleyelim. Bu durumda $\zeta = 0$ halen bir tekillik problemi yaratmaz, ancak $\zeta = a_i$ iken kenardaki akımlar gözlemciye ulaştığında, bir tekillik oluşmaktadır. Bu tekillik tek yanlıdır. Denklem (2.24), $\zeta < a_i$ iken sıfırdır, $\zeta > a_i$ iken $(\zeta^2 - a_i^2)^{-1/2}$ şekilde bir tekillik içerir. Ayrıca denklem (2.21)'de gözlem noktası veya gözlem noktasının iz düşümü S_n üzerindeyken, $\zeta = 0$ 'da bir Dirac delta fonksiyonu oluşur. Bunun nedeni $\zeta < 0$ için $\alpha(\zeta) = 0$ ve $\zeta > 0$ için $\alpha(\zeta) \neq 0$ olmasından dolayı görülen sıçramadır. $\alpha(\zeta)$ 'daki bu sıçrama süreksizliğinin türevi $\zeta = 0$ 'da Dirac fonksiyonu oluşmasına neden olur.

2.1.3. $V_2(t)$ 'nin Analitik İfadesinin Elde Edilmesi

Denklem (2.9)'da verilen $V_2(t)$ 'nin analitik ifadesini bulmak için, $(\rho' - \rho)$ ifadesi yerel koordinatlarda tanımlanmalıdır: $(\rho' - \rho) = (\hat{u} \zeta \cos \phi + \hat{v} \zeta \sin \phi)$. Bu durumda $V_2(t)$ integrali açık bir şekilde

$$V_2(t) = \int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \int_{\phi_1(\zeta)}^{\phi_2(\zeta)} (\hat{u} \zeta \cos \phi + \hat{v} \zeta \sin \phi) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta(ct - R)}{R} \right] \zeta d\phi d\zeta \quad (2.25)$$

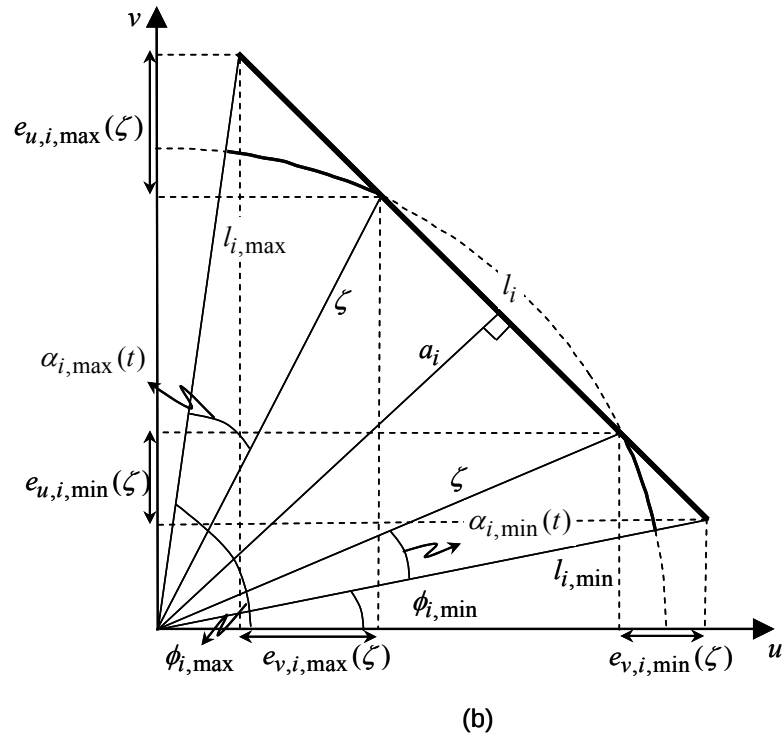
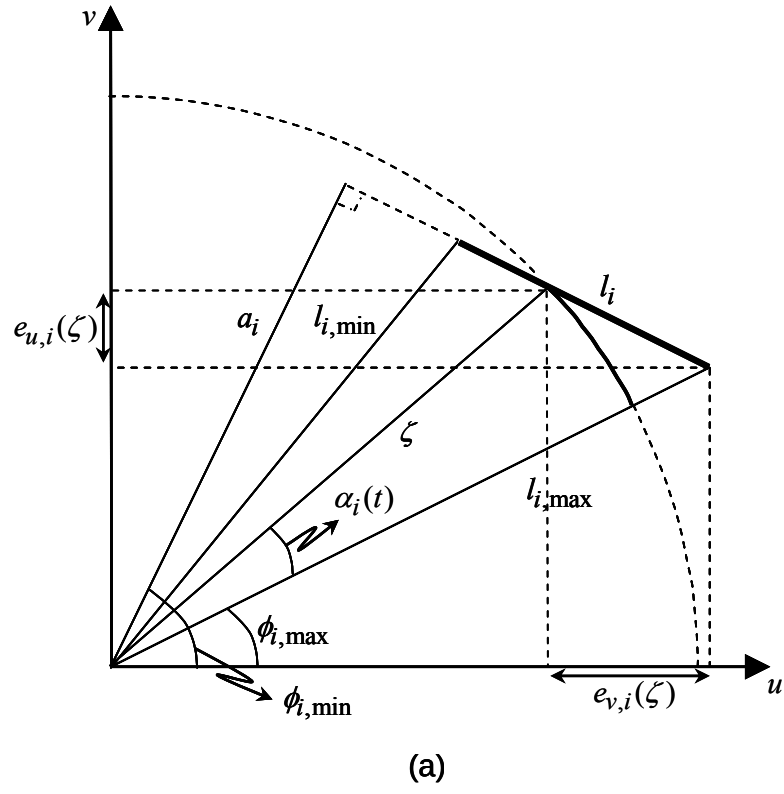
olarak yazılabilir. Burada integrasyon sınırları, Bölüm 2.1.1'de olduğu gibi Şekil 2.3'te gösterildiği gibidir. ϕ 'ye göre olan iç integralin sonucu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1(\zeta)}^{\phi_2(\zeta)} (\hat{u} \zeta \cos \phi + \hat{v} \zeta \sin \phi) d\phi &= \hat{u} \zeta [\sin(\phi_2(\zeta)) - \sin(\phi_1(\zeta))] \\ &\quad - \hat{v} \zeta [\cos(\phi_2(\zeta)) - \cos(\phi_1(\zeta))] \quad (2.26) \\ &= \hat{u} e_u(\zeta) - \hat{v} e_v(\zeta) \\ &= \mathbf{e}(\zeta). \end{aligned}$$

Burada, $\mathbf{e}(\zeta)$, küre ve S_n 'in kesişimi sonucu oluşan ve $\alpha(\zeta)$ 'nın açıortayı olan vektördür. $\mathbf{e}(\zeta)$ 'nin birim vektör olmadığına ve $\alpha(\zeta)$ 'nın aksine ζ ile doğru orantılı olarak arttığına dikkat edilmelidir. Bölüm 2.1.1'dekine benzer olarak, (2.25) eşitliğindeki türev ifadesi hesaplanıp integral değişkeni ζ 'dan $R = \sqrt{\zeta^2 + d^2}$ 'ye değiştirilirse, (2.25) denklemi

$$V_2(t) = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \mathbf{e} \left(\sqrt{R^2 - d^2} \right) \frac{R \partial_R \delta(ct - R) - \delta(ct - R)}{R^2} dR \quad (2.27)$$

halini alır. Dirac delta fonksiyonunun (A.3) ile verilen özelliği kullanılarak $V_2(t)$,



Şekil 2.4. $e(\zeta)$ ve $\alpha(\zeta)$ 'nin hesaplanması için parametreler.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_2(t) &= \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \left[-\partial_R \frac{\mathbf{e}(\sqrt{R^2 - d^2})}{R} - \frac{\mathbf{e}(\sqrt{R^2 - d^2})}{R^2} \right] \delta(ct - R) dR \\
&= - \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{\partial_R \mathbf{e}(\sqrt{R^2 - d^2})}{R} \delta(ct - R) dR.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

olarak bulunur. Son olarak (A.4) özelliği ile $\mathbf{V}_2(t)$ 'nin analitik ifadesi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\mathbf{V}_2(t) = \begin{cases} -R^{-1} \partial_R \mathbf{e}(\sqrt{R^2 - d^2}) \Big|_{R=ct} & ; \quad R_{\min} < ct < R_{\max} \\ 0 & ; \quad \text{diğer } t \end{cases} \tag{2.29}$$

Bundan sonra $\mathbf{e}(\sqrt{(ct)^2 - d^2})$ 'yi belirtmek için $\zeta = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{(ct)^2 - d^2}$ olduğundan dolayı $\mathbf{e}(\zeta)$ kullanılacaktır. Nedensellik de uyumlu olarak kesişim olmadığına ($ct < d$), herhangi bir açıortay vektörü oluşmayacaktır;

$$\mathbf{e}(\zeta) = 0 \quad ; \quad ct < d. \tag{2.30}$$

2.1.4. $\mathbf{e}(\zeta)$ ve $\partial_R \mathbf{e}(\zeta)$ 'nin Analitik Olarak Belirlenmesi

Önceki bölümde gösterildiği gibi, $\mathbf{e}(\zeta)$ açıortay vektörünün analitik ifadesinin belirlenmesi, $\mathbf{V}_2(t)$ 'nin belirlenmesi için önemlidir. (2.26) eşitliğinden görüldüğü gibi $\mathbf{e}(\zeta)$, $\hat{\mathbf{u}}$ ve $\hat{\mathbf{v}}$ yönünde bileşenlere sahiptir. Şekil 2.4'te üçgenin i . kenarı için gösterildiği gibi, $e_u(\zeta)$ ve $e_v(\zeta)$, kesişimin u ve v eksenlerine olan iz düşümleridir. $R < d$ iken, üçgen yüzeyi ile küre kesişmeyeceğinden $\mathbf{e}(\zeta) = 0$ 'dır. Bölüm 2.1.2'de tanımlanan barisentrik koordinatlar kullanılarak, $e_u(\zeta)$ ve $e_v(\zeta)$

$$e_u(\zeta) = \zeta \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) e_{u,i}(\zeta) \tag{2.31}$$

$$e_v(\zeta) = \zeta \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) e_{v,i}(\zeta) \tag{2.32}$$

ile tanımlanabilir. Burada $e_{u,i}(\zeta)$ ve $e_{v,i}(\zeta)$, Şekil 2.4'te gösterildiği gibi, i . kenardan dolayı oluşan katılardır. Bu durumda Şekil 2.4(a)'da gösterildiği gibi $l_{i,\max}^2 > l_{i,\min}^2 + l_i^2$ iken,

$$e_{u,i}(\zeta) = \chi \begin{cases} \sin[\phi_{i,\max}] - \sin[\phi_{i,\min}] & ; \zeta < l_{i,\min} \\ \sin[\phi_{i,\max}] - \sin[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_i(\zeta)] & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; l_{i,\max} < \zeta \end{cases} \quad (2.33)$$

$$e_{v,i}(\zeta) = \chi \begin{cases} \cos[\phi_{i,\max}] - \cos[\phi_{i,\min}] & ; \zeta < l_{i,\min} \\ \cos[\phi_{i,\max}] - \cos[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_i(\zeta)] & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; l_{i,\max} < \zeta \end{cases} \quad (2.34)$$

olarak belirlenebilir. Burada χ , $\phi_{i,\max} - \phi_{i,\min}$ farkının $[0, 2\pi)$ aralığında olduğu varsayılarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\chi = \begin{cases} -1 & ; \phi_{i,\max} - \phi_{i,\min} > \pi \\ 1 & ; \phi_{i,\max} - \phi_{i,\min} < \pi \end{cases} \quad (2.35)$$

$l_{i,\max}^2 \leq l_{i,\min}^2 + l_i^2$ iken Şekil 2.4(b)'de görüldüğü gibi ρ 'nun iz düşümü C_i doğru parçasının üzerindedir. Bu durumda aynı C_i doğru parçasından u ve v eksenlerine olan iz düşümlere iki katkı gelmektedir. Şekil 2.4(b)'de bu katkılar “min” ve “max” indisleri ile gösterilmiştir. Bu durumda $e_{u,i}(\zeta)$ ve $e_{v,i}(\zeta)$,

$$e_{u,i}(\zeta) = \chi \begin{cases} \sin[\phi_{i,\max}] - \sin[\phi_{i,\min}] & ; \zeta < a_i \\ \sin[\phi_{i,\max}] - \sin[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_{i,\max}(\zeta)] \\ -\sin[\phi_{i,\min}] + \sin[\phi_{i,\min} + \chi\alpha_{i,\min}(\zeta)] & ; a_i < \zeta < l_{i,\min} \\ \sin[\phi_{i,\max}] - \sin[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_{i,\max}(\zeta)] & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; l_{i,\max} < \zeta \end{cases} \quad (2.36)$$

$$e_{v,i}(\zeta) = \chi \begin{cases} \cos[\phi_{i,\max}] - \cos[\phi_{i,\min}] & ; \zeta < a_i \\ \cos[\phi_{i,\max}] - \cos[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_{i,\max}(\zeta)] \\ -\cos[\phi_{i,\min}] + \cos[\phi_{i,\min} + \chi\alpha_{i,\min}(\zeta)] & ; a_i < \zeta < l_{i,\min} \\ \cos[\phi_{i,\max}] - \cos[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_{i,\max}(\zeta)] & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; l_{i,\max} < \zeta \end{cases} \quad (2.37)$$

olarak belirlenebilir. Buradaki $\alpha_{i,\min}(\zeta)$ ve $\alpha_{i,\max}(\zeta)$ değişkenlerinin ifadeleri Bölüm 2.1.2’de verilmiştir. Böylece $\mathbf{e}(\zeta)$ ’nin analitik formu belirlenmiştir. $\mathbf{e}(\zeta)$ için türetilen analitik formüllerden yararlanarak, $\mathbf{e}(\zeta)$ ’nin R ’ye göre türevi $\zeta = \sqrt{R^2 - d^2}$ olduğu göz önünde alınarak belirlenebilir. Zincir kuralı kullanılarak $\mathbf{e}(\zeta)$ ’nin R ’ye göre türevi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\partial_R \mathbf{e}(\zeta) = \frac{\sqrt{\zeta^2 + d^2}}{\zeta} [\hat{\mathbf{u}} \partial_\zeta e_u(\zeta) - \hat{\mathbf{v}} \partial_\zeta e_v(\zeta)]. \quad (2.38)$$

Burada $\partial_\zeta e_u(\zeta)$ ve $\partial_\zeta e_v(\zeta)$, (2.31) ve (2.32) eşitliklerinden, sırasıyla,

$$\partial_\zeta e_u(\zeta) = \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) e_{u,i}(\zeta) + \zeta \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \partial_\zeta e_{u,i}(\zeta) \quad (2.39)$$

$$\partial_\zeta e_v(\zeta) = \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) e_{v,i}(\zeta) + \zeta \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \partial_\zeta e_{v,i}(\zeta) \quad (2.40)$$

olarak belirlenebilir. Burada $\partial_\zeta e_{u,i}(\zeta)$ ve $\partial_\zeta e_{v,i}(\zeta)$ ifadeleri, (2.33)-(2.37) ile verilen denklemlerden aşağıdaki gibi türetilir:

$l_{i,\max}^2 > l_{i,\min}^2 + l_i^2$ iken,

$$\partial_\zeta e_{u,i}(\zeta) = \begin{cases} \cos[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_i(\zeta)] \partial_\zeta \alpha_i(\zeta) & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\partial_\zeta e_{v,i}(\zeta) = \begin{cases} -\sin[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_i(\zeta)] \partial_\zeta \alpha_i(\zeta) & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (2.42)$$

ve $l_{i,\max}^2 \leq l_{i,\min}^2 + l_i^2$ iken,

$$\partial_{\zeta} e_{u,i}(\zeta) = \begin{cases} \cos[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_{i,\max}(\zeta)] \partial_{\zeta} \alpha_{i,\max}(\zeta) \\ + \cos[\phi_{i,\min} + \chi\alpha_{i,\min}(\zeta)] \partial_{\zeta} \alpha_{i,\min}(\zeta) & ; a_i < \zeta < l_{i,\min} \\ \cos[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_{i,\max}(\zeta)] \partial_{\zeta} \alpha_{i,\max}(\zeta) & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\partial_{\zeta} e_{v,i}(\zeta) = \begin{cases} -\sin[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_{i,\max}(\zeta)] \partial_{\zeta} \alpha_{i,\max}(\zeta) \\ -\sin[\phi_{i,\min} + \chi\alpha_{i,\min}(\zeta)] \partial_{\zeta} \alpha_{i,\min}(\zeta) & ; a_i < \zeta < l_{i,\min} \\ -\sin[\phi_{i,\max} - \chi\alpha_{i,\max}(\zeta)] \partial_{\zeta} \alpha_{i,\max}(\zeta) & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; \text{diğer.} \end{cases} \quad (2.44)$$

Böylece darbesel olarak uyarılmış RWG akım yoğunluğu fonksiyonundan dolayı oluşan manyetik alanın elde edilmesinde kullanılacak denklem (2.9)'daki tüm terimler için analitik ifadeler elde edilmiştir.

2.1.5. Formüllerin Yorumlanması

Türetilen formüllerin nümerik olarak doğrulanmasına geçmeden önce, sadece yukarıda verilen formüllere bakarak görülebilecek bazı noktaları vurgulamak tüm formülasyonu anlamak ve bunlardan sonuçlar çıkarmak için önemlidir.

Yukarıdaki formüllerden çıkarılabilecek en önemli sonuç, RWG fonksiyonundan dolayı oluşan manyetik alanın S_n üçgeninin kenarlarıyla alakalı olmasıdır. Bu gözlemi yukarıdaki formüllerden çıkarabilmek için gözlem noktasının iki durumunu inceleyelim. İlk durumda ρ , S_n üçgeninin dışında olsun. Bu durumda $R = ct$ yarıçaplı küre ile S_n üçgeni belli bir süre kesişmez. Bu süreye $t = t_1$ diyelim. $t = t_1$ 'den önce herhangi bir yay uzunluğu ve açığortay vektörü oluşmaz, $\alpha(\zeta) = 0$ ve $\mathbf{e}(\zeta) = 0$. Bundan dolayı gözlenen manyetik alan, $t < t_1$ için sıfırdır. Benzer olarak küre üçgen kenarlarıyla son olarak $t = t_2$ zamanında kesişin. $[t_1, t_2]$ aralığında, $\mathbf{e}(\zeta)$ ve $\alpha(\zeta)$, kenarların yerleşimi ve uzunluklarına bağlı olarak değişim gösterirler ve gözlem noktasında manyetik alan gözlenebilir. Ayrıca $V_1(t)$ ve $\mathbf{V}_2(t)$ 'nin türetimindeki denklemler (2.11) ve (2.26)'daki $\phi_1(\zeta)$ 'den $\phi_2(\zeta)$ 'ye olan çizgi integrali yay uzunluğu ve açığortay vektörü sonucunu vermektedir. Calculus'un temel teoremine (*fundamental theorem of Calculus*) göre, katkılar yayın uç noktalarından

gelmektedir, diğer bir değişle katkılar S_n 'nin kenarlarından gelmektedir. $t > t_2$ için $\alpha(\zeta) = 0$ ve $\mathbf{e}(\zeta) = 0$ 'dır ve doğal olarak gözlenen manyetik alan da sıfırdır.

İkinci durumda, ρ 'nun S_n üçgeni içerisinde olduğu varsayalım. Bu durumda manyetik alanın $\mathbf{r}$ gözlemcisinden ρ noktasına ilerlemesi için geçen süre $t_0 = d/c$ olsun. $t < t_0$ için hiçbir manyetik alan gözlemlenmez. $t > t_0$ için, küre, $t = t_1$ anına kadar üçgenin hiçbir kenarı ile kesişmez. Ancak $(t_0, t_1]$ aralığında $\alpha(\zeta) = 2\pi$ olmak üzere bir yay uzunluğu oluşur. Bölüm 2.1.2'de açıklandığı gibi, t_0 anında $\alpha(\zeta)$ 'daki sıçrama, yay uzunluğunun türevinde Dirac delta oluşmasına neden olur. Yine de $(t_0, t_1]$ aralığında yay uzunluğunun türevi sıfırdır. Açığortay vektörü hakkında yorum yapabilmek için bu aralıkta açığortay vektörünün davranışı incelenmelidir. Oluşan çember iki ayrı çemberin toplamı olarak değerlendirilirse, karşıt yönlü ancak aynı büyüklükte iki açığortay vektörü oluşacaktır. Bu iki vektörün toplamı ise karşıt yönlü olmalarından dolayı sıfırdır. Sonuç olarak $\mathbf{e}(\zeta)$ (ve türevi) $t < t_1$ için herhangi bir tekil davranış sergilemeden sıfırdır. Bundan dolayı tekrar $(t_0, t_1]$ aralığında herhangi bir manyetik alan gözlenmez. Son olarak ilk durumdaki gibi, küre üçgenin kenarlarıyla en son $t = t_2$ anında kesişsin. $[t_1, t_2]$ aralığında, yay uzunluğunun ve açığortay vektörünün türevleri sıfır olmadığından bir manyetik alan gözlenecektir. $t > t_2$ için ise $\alpha(\zeta) = 0$ ve $\mathbf{e}(\zeta) = 0$ 'dır ve gözlenen manyetik alan sıfırdır.

Bu gözlemler ile oluşabilecek $t = t_0$ anı dışında, herhangi bir manyetik alanın gözlenmesi için küre ile S_n üçgeninin kenarlarının etkileşmesi gerekmektedir. Bu durum “manyetik alana katkılar S_n 'nin kenarlarından gelmesi” olarak değerlendirilebilir.

2.2. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde önceki bölümlerde sunulan ve (2.9), (2.14) ve (2.29) denklemlerindeki zaman uzayı formülasyonlarının doğruluğu gösterilecektir. Bu gösterimde frekans uzayında nümerik integrasyon ile elde edilen sonuçlar ters Fourier transformu ile zaman uzayına dönüştürülecek ve doğrudan elde edilen

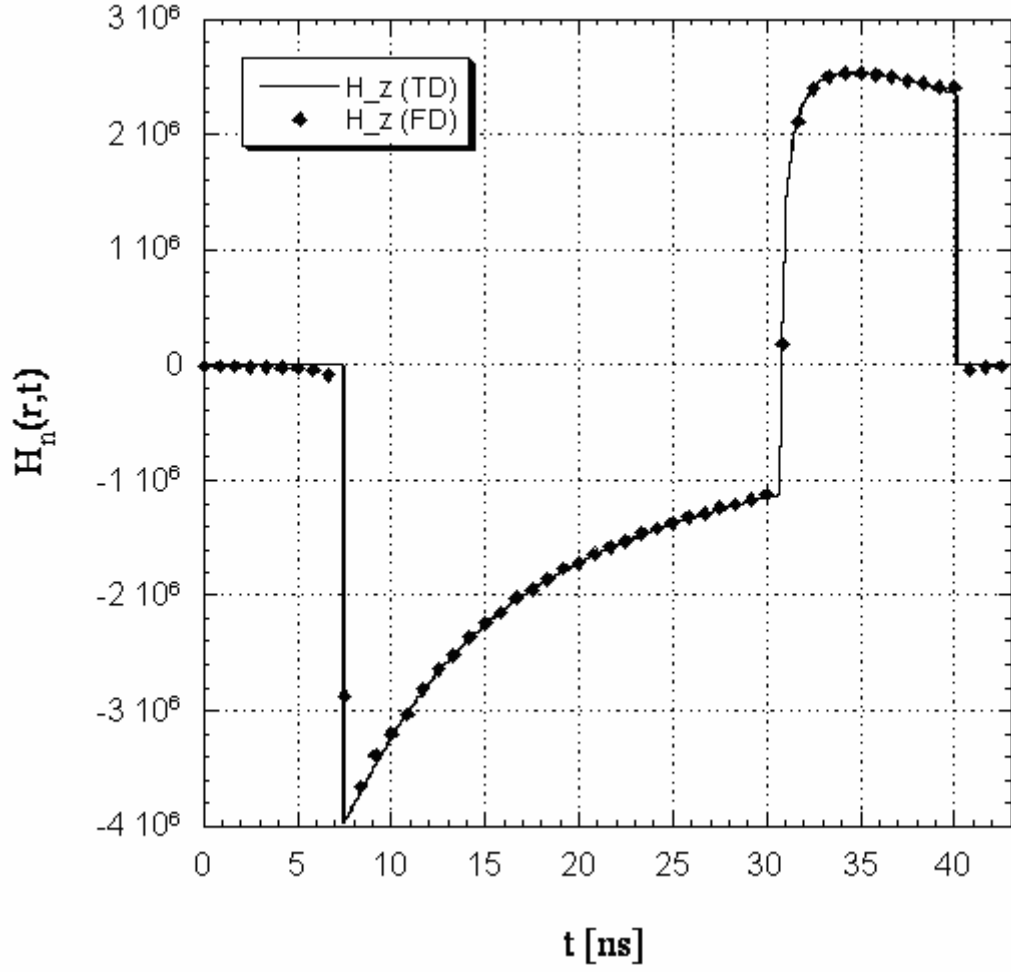
sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Zaman uzayındaki durumun aksine, frekans uzayı sonuçları, (2.5) eşitliğinin frekans uzayı karşılığının integralinin nümerik olarak hesaplanmasıyla elde edilecektir. Nümerik integral, integral bölgesinin bir dalga boyundan çok daha küçük alt bölgelere bölümü ve bu alt üçgenlere 7-noktalı Gauss integral (*7-point Gaussian quadrature*) yöntemi [22] uygulanması yoluyla hesaplanmıştır. Ayrıca $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin zamanda sınırlı bir fonksiyon olduğu, dolayısıyla frekans uzayı karşılığının sınırlı olamayacağına dikkat edilmelidir. Zamanda sınırlı bir $f(t)$ fonksiyonu, frekans uzayı örnekleri olan $F(k\Delta\omega)$ 'dan

$$f(n\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} IFFT_N \left\{ \sum_{p=P_1}^{P_2} F(k\Delta\omega + pN\Delta\omega) \right\} ; n, k = 0, \dots, N-1 \quad (2.45)$$

formülü ile elde edilebilir. Burada $IFFT_N$, N -noktalı ters hızlı Fourier dönüşümüdür. P_1 ve P_2 hesaba katılan örtüşme terimlerini göstermektedir. Δt ve $\Delta\omega$, sırasıyla, zaman ve frekans uzaylarındaki örnekleme aralıklarıdır. Ayrıca hızlı Fourier dönüşümünü kullanabilmek için $\Delta t = 2\pi / N\Delta\omega$ eşitliği sağlanmalıdır.

Sonuçların doğruluğu, Bölüm 2.1'de sunulan zaman uzayı yöntemi (şekillerde TD ile nitelendirilmiştir) ile frekans uzayından elde edilen sonuçların (şekillerde FD ile nitelendirilmiştir) karşılaştırılması ile gösterilecektir. Verilen örneklerde yarım RWG temel fonksiyonundan elde edilen sonuçlar $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ olarak verilmiştir (daha doğru gösterim $\mathbf{H}_n^+(\mathbf{r}, t)$ olurdu). Örneklerde S_n üçgeninin köşeleri $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ ve $\mathbf{r}_3$ ile verilmiş ve akım yoğunluğu $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_1$ 'den dışarıya doğru yönlendirilmiştir. Koordinatlar (x, y, z) olarak metre cinsinden ve ışık hızı $c = 3 \times 10^8$ m/s olarak verilmiştir. Tüm örneklerde Δt ve N , frekans uzayı örneklerinin elde edilmesi için kullanılan zaman aralığı ve örnek sayısıdır. Zaman uzayı sonuçları, $0.1\Delta t$ uzunluğundaki zaman adımları kullanılarak elde edilmiştir.

Aşağıdaki iki örnek için parametreler $\Delta t = 5/6$ ns, $N = 75$, $P_1 = -2$ ve $P_2 = 1$ 'dir. Üçgen köşeleri $\mathbf{r}_1 = (10, 0, 1)$, $\mathbf{r}_2 = (15, -5, 1)$ ve $\mathbf{r}_3 = (15, 5, 1)$ noktalarına konumlandırılmıştır.



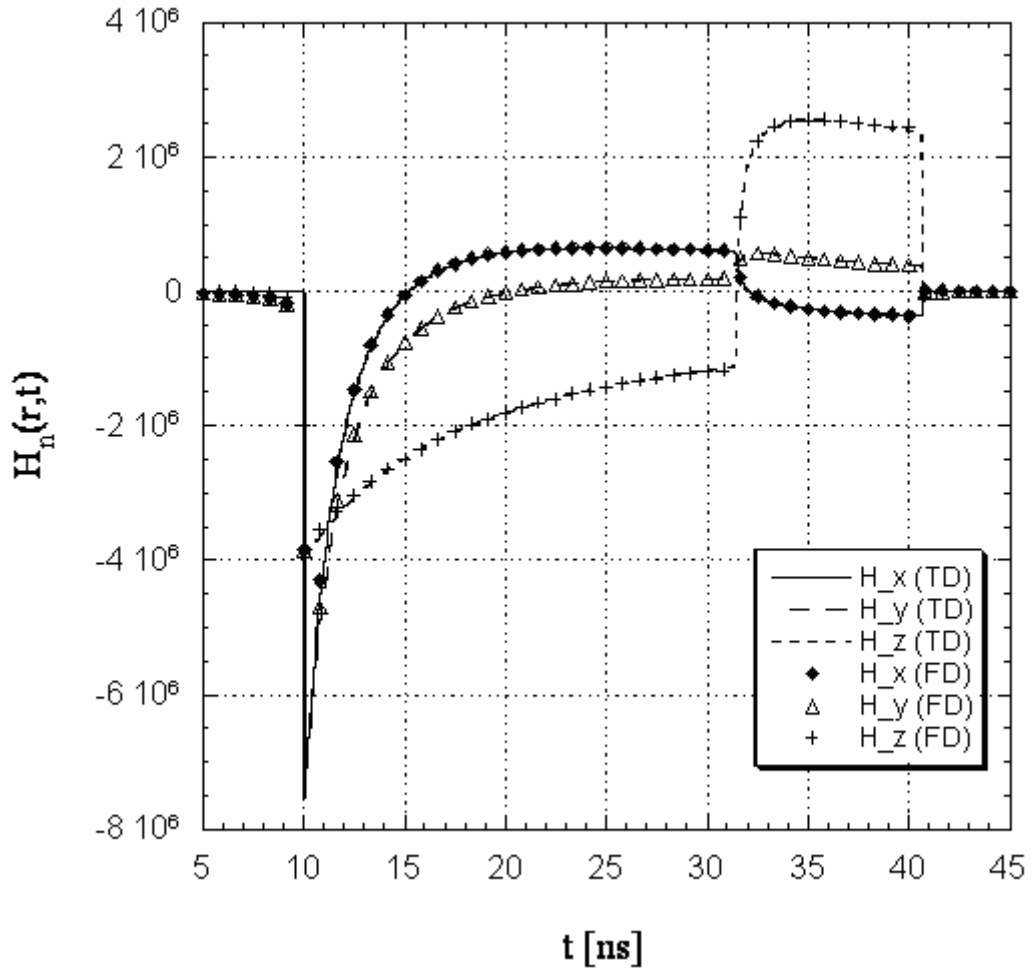
Şekil 2.5. $\mathbf{r} = (16, -7, 1)$ için $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin z bileşeni.

İlk örnekte, gözlem noktası üçgeni içeren düzlem üzerinde olan $\mathbf{r} = (16, -7, 1)$ noktasına yerleştirilmiştir. Bundan dolayı $d = 0$ ve dolayısıyla $R = \zeta = ct$ 'dir. $d = 0$ olduğundan dolayı $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'ye $V_1(t)$ 'den hiçbir katkı gelmemektedir. Denklem (2.9)'dan görüleceği gibi, $\mathbf{V}_2(t)$ ve $(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n)$, xy -düzlemi üzerindedir. Bundan dolayı bu iki vektörün vektör çarpımı sadece z yönünde bileşene sahiptir. Küre ilk olarak $\mathbf{r}_2$ noktası ile $t = 7.45$ ns'de kesişir. Şekil 2.5'te görüldüğü gibi bu andan önce manyetik alan yoğunluğu gözlenmez. $t = 7.45$ ns'den sonra yay uzunluğu $\alpha(\zeta)$ ve $|\mathbf{e}(\zeta)|$ monotonik olarak artar. $t = 30.73$ ns'de küre $\mathbf{r}_1$ köşesi ile kesişir ve bu andan sonra yay uzunluğu ve açortay vektörü monotonik olarak azalmaya başlar. Bu yüzden $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ ($\partial_\zeta \alpha(\zeta)$ ve $\partial_\zeta \mathbf{e}(\zeta)$ ile alakalı olduğu için) $t = 30.73$ ns'den

önce ve sonra farklı işaretlidir. $t = 40.13$ ns'de küre son olarak $\mathbf{r}_3$ ile kesişir ve bu andan sonra manyetik alan gözlenmez. Daha önce bahsedildiği gibi $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin x ve y bileşenleri sıfırdır. Bundan dolayı Şekil 2.5'te $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin sadece z bileşeni verilmiştir. Zaman ve frekans uzayı sonuçları bazı noktalarda, özellikle sıçrama noktaları olan $t = 7.45, 30.73$ ve 40.14 ns anlarında, farklılık göstermektedir. Bu hata, Gibbs etkisinden dolayı kaynaklanmaktadır ve frekans uzayı sonuçları elde edilirken daha fazla örtüşme terimi hesaplanarak azaltılabilir. Ek olarak, eğer üçgen örnekteki gibi ikizkenarsa ve gözlem noktası üçgenin simetri eksenine konumlandırılmışsa, hiçbir zaman manyetik alan gözlenemez. Bu durumda üçgen üzerindeki simetri noktalarından gelen katkılar birbirleri ile ters yöndedir ve toplamaları sıfırdır.

İkinci örnekte, gözlem noktası, üçgen düzleminin yukarısında olan $\mathbf{r} = (16, -7, 3)$ noktasına konumlandırılmıştır. Bu durumda küre düzlem ile $t = 6.66$ ns'de kesişmeye başlar. Bu andan sonra $\zeta > 0$ 'dır ve küre $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{r}_3$ köşeleriyle sırasıyla, $t = 10, 31.45$ ve 40.69 ns anlarında kesişir ve tek bir yay oluşur. Şekil 2.6'da görüldüğü gibi $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin tüm yönlerde bileşenleri vardır. Ayrıca Gibbs etkisinden dolayı, $t = 10$ ns'de bozulma görülmektedir. Bu bozulma dışında sonuçlar tam olarak uyuşmaktadır.

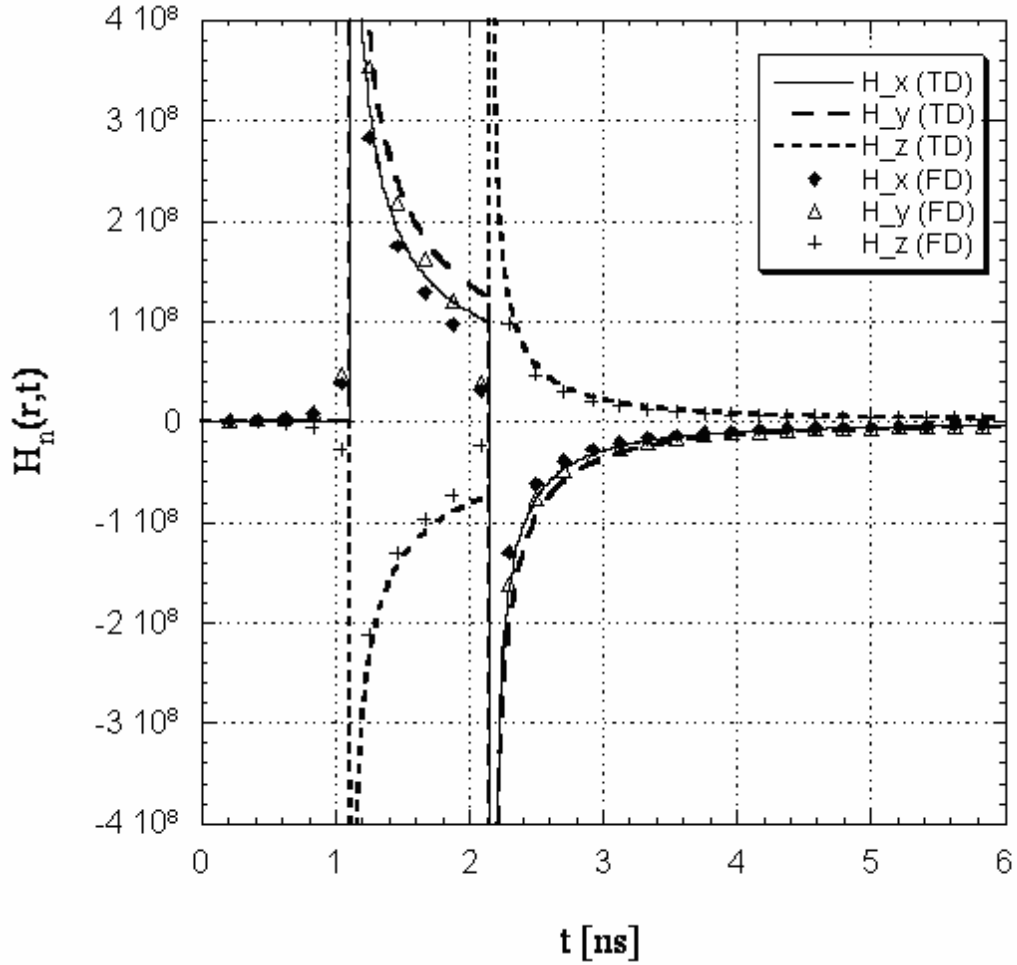
Son iki örnekte, üçgen köşeleri, geliştirilen metodun farklı aralıklarda farklı yay şekilleri için de doğru sonuç sağladığını göstermek amacıyla rasgele seçilerek $\mathbf{r}_1 = (9, 2, -1)$, $\mathbf{r}_2 = (5, 7, 2)$ ve $\mathbf{r}_3 = (10, -3, -8)$ noktalarına konumlandırıldı. Aşağıdaki örneklerde, örnekleme aralığı $N = 200$ noktada $\Delta t = 5/24$ ns olarak seçildi. Seçilen üçgen için $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ kısa zaman aralığında çok hızlı değiştiğinden ve tekillikler içerdiğinden dolayı frekans uzayı sonuçları hesaplanırken doğruluğu arttırmak için $P_1 = -3$ 'den $P_2 = 2$ 'ye kadar örtüşme terimleri eklendi.



Şekil 2.6. Üçgen düzleminin yukarısındaki $\mathbf{r} = (16, -7, 3)$ için $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$.

Üçüncü örnekte, gözlem noktası üçgen yüzeyi üzerinde rasgele seçilerek $\mathbf{r} = (9.064, -0.705, -5.423)$ noktasına konumlandırıldı. Bu durumda küre, üçgen ile $t = 0$ ns'de etkileşmeye başlar ve $\alpha(\zeta) = 2\pi$ yay uzunluğu oluşur. Yay uzunluğundaki bu sıçrama $t = 0$ ns'de Dirac delta oluşmasına neden olur. Ayrıca Şekil 2.7'de görüldüğü gibi, diğer tekillikler $t = 1.10$ ve 2.16 ns'lerde görülür. Bunun nedeni gözlem noktasının kenarlar doğrultusundaki iz düşümlerinden ikisi ($\mathbf{r}_1\mathbf{r}_3$ ve $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ doğrultusundaki) üçgen kenarlarının üzerindedir. Bundan dolayı küre bu noktalar ile etkileştiğinde Bölümler 2.1.2 ve 2.1.5'te anlatıldığı gibi tekillikler oluşur. $t = 6$ ns'den sonra manyetik alan azalır ve $t = 38.15$ ns'ye kadar sıfıra yaklaşır. $t = 38.15$ ns'de küre son olarak $\mathbf{r}_2$ ile kesişir ve bu andan itibaren manyetik alan gözlenmez. 6 ns'nin ilerisindeki alan değerleri çok küçük olduğundan dolayı,

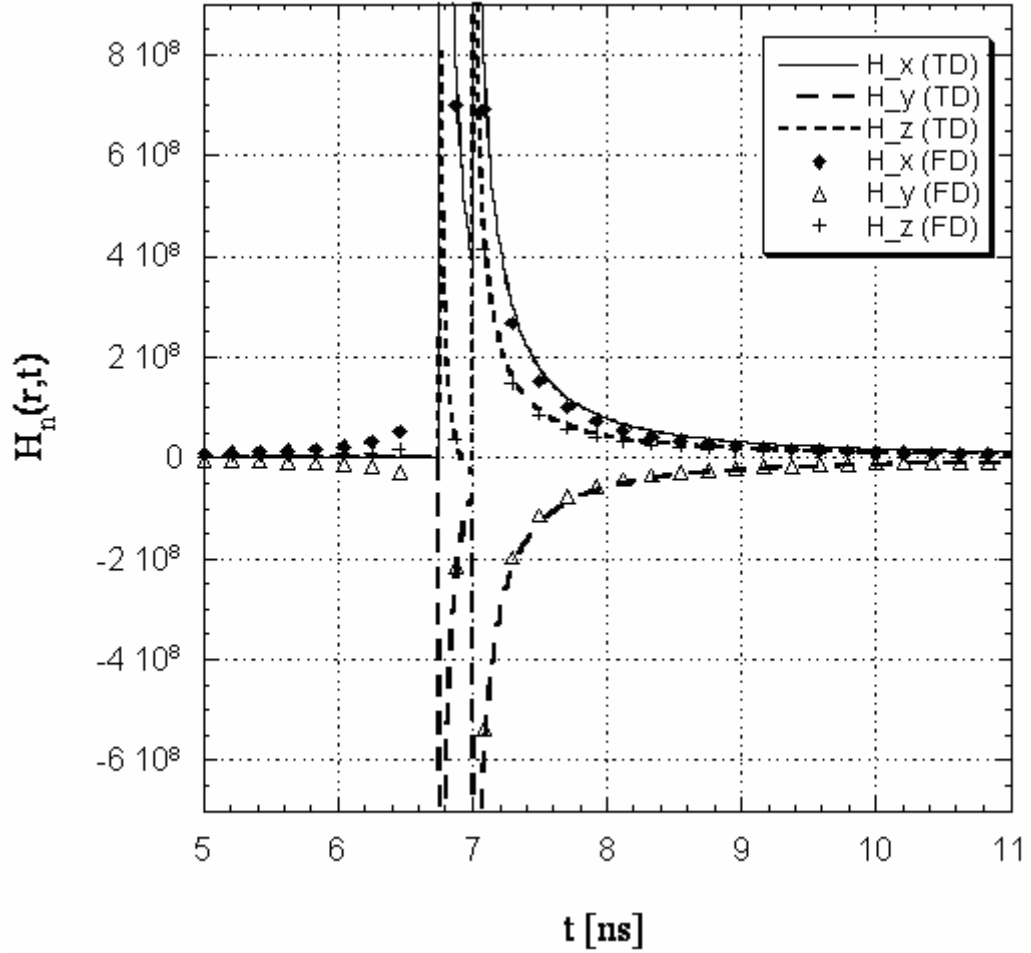
Şekil 2.7’de 6 ns’den sonraki zaman aralığı verilmemiştir. Zaman uzayı sonuçlarında $t=0$ ns’de oluşan Dirac fonksiyonu gösterilmemiştir ancak frekans uzayı sonuçlarının bu tekillik civarında bozulduğu görülmektedir, çünkü $\mathbf{H}_n(\mathbf{r},t)$ ’nin değişimi çok hızlıdır ve tekillikler içermektedir. Gibbs etkisi oldukça fazla görülmektedir çünkü tekillik içeren zaman uzayı sonuçları, frekans uzayında tam olarak gösterilemez.



Şekil 2.7. S_n üzerindeki $\mathbf{r} = (9.064, -0.705, -5.423)$ için $\mathbf{H}_n(\mathbf{r},t)$.

Son örnekte, gözlem noktası üçgenin yukarısında $\mathbf{r} = (7.9326, -2.1192, -4.5745)$ noktasına konumlandırıldı. Manyetik alanın bileşenleri Şekil 2.8’de gösterilmiştir. Bu durumda, küre üçgenle kesişmeye $t = 6.67$ ns’de başlar ve bu anda $\zeta = 0$ ’dır. Bundan dolayı $t = 6.67$ ns’de Dirac delta

fonksiyonu oluşur (Şekil 2.8’de gösterilmemiştir). Ayrıca $t = 6.75$ ve 7.01 ns’lerde, gözlem noktasının dik iz düşümleri tekilliklere yol açar. Bir önceki örnek gibi, bu tekillik noktalarında sonuçlar uyumsuzdur.



Şekil 2.8. S_n 'nin yukarısındaki $\mathbf{r} = (7.9326, -2.1192, -4.5745)$ için $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$.

Böylece bu örneklerle, türetilen formülasyonun, farklı üçgen ve gözlem noktalarında doğru sonuç verdiği, bazı durumlarda frekans uzayında elde edilen sonuçlardan daha doğru sonuçlar verdiği gösterilmiş oldu. Gelecek bölümde bu sonuçların MAİD çözümünde nasıl kullanılacağı açıklanacaktır.

3. MANYETİK ALAN İNTEGRAL DENKLEMİNİN ZAMANDA ADIMLAMA YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde manyetik alan integral denklemi ve MAİD'in zamanda adımlama yöntemine (ZAY) uyarlanması kısaca anlatılacaktır. İlk olarak mükemmel iletken bir saçıcı için MAİD'in hem zaman hem de frekans uzayı formları sunulacaktır. Bunun ardından zaman uzayı MAİD, ZAY'a uyarlanarak uzaya ve zamana göre temel ve test fonksiyonları aracılığı ile matris denklemine indirgenecektir. Daha sonra matris denkleminin elemanlarının bir önceki bölümde geliştirilen formüller ile nasıl belirleneceği anlatılacaktır.

3.1. Manyetik Alan İntegral Denklemi

MAİD hem frekans hem de zaman uzayında mükemmel iletken için manyetik alanın sınır koşullarından türetilebilir [6]. Mükemmel iletken bir saçıcı için frekans uzayında MAİD aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}} \times \oint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}} \left[jk + \frac{1}{R} \right] \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\mathbf{r}' \quad (3.1)$$

Burada k dalga sayısıdır ve integral asal değer integralidir. Zaman uzayı MAİD'in elde edilmesi birkaç yoldan mümkündür. Bunlardan biri (3.1) eşitliğinin ters Fourier dönüşümünün alınması, diğeri ise yukarıda belirtildiği gibi sınır koşullarından türetilmesidir. Her iki durumda da zaman uzayı MAİD

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \hat{\mathbf{n}} \times \oint_S \left[\frac{1}{cR} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) + \frac{1}{R^2} \mathbf{J} \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) \right] \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{4\pi} d\mathbf{r}' \quad (3.2)$$

olarak belirlenir. Dikkatle bakıldığında (3.1) ve (3.2) eşitliklerindeki integral ile verilen terim $\mathbf{J}$ akım yoğunluğundan dolayı oluşan manyetik alanın ifadesidir.

Bir diğer önemli nokta ise MAİD'in içerdiği tekilliktir. (3.1) ve (3.2) denklemlerindeki integral ifadeleri $R=0$ iken tekildir. Ancak akım yoğunlukları

RWG fonksiyonları gibi düzlemsel yapılar ile modellendiğinde ve 7-noktalı Gauss integral yöntemi gibi örneklerini sadece temel fonksiyonları oluşturan üçgen yüzeylerinin içerisinde alan (kenarda örnek almayan) bir yöntem ile hesaplandığında bu denklemlerdeki tekillikler gözlenmemektedir [23]. Yine de diğer yöntemler için tekillik çıkartım teknikleri geliştirilmiştir [24], [25].

Bir sonraki bölümde (3.2) eşitliğinin ZAY ile çözümü için gerekli formülasyonlar türetilenektir.

3.2. MAİD'in ZAY'a Uyarlanması

Bu alt bölümde MAİD, (3.2) denklemi ile verilen şekli ile ZAY'a uyarlanacaktır. Bu uyarlama genel olarak kullanılan, MAİD'in standart ZAY algoritması ile çözümü olarak adlandırılabilir.

ZAY'da, bilinmeyen akım yoğunlukları zamana ve uzaya göre temel fonksiyonlar ile ayrıştırılır. (3.2) denklemindeki yüzey akımları uzaya ve zamana göre

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \sum_i I_{n,i} T_i(t) \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) \quad (3.3)$$

olarak ayrıştırılabilir. Burada Bölüm 2.1'de denklem (2.2) ile verilen

$$I_n(t) = \sum_i I_{n,i} T_i(t) \quad (3.4)$$

olacak şekilde, $T_i(t)$, zamana göre i . temel fonksiyonu, $\mathbf{b}_n(\mathbf{r})$, n . uzaya göre n . temel fonksiyonu (bu tezde RWG temel fonksiyonunu), $I_{n,i}$ bilinmeyen katsayıları belirtmektedir. ZAY'daki amaç bu katsayıları belirlemektir. $T_i(t)$ 'nin seçiminde ise bir serbestlik söz konusudur. Ancak bir sonraki altbölümde anlatılacağı gibi eğer zamana göre temel fonksiyonlar parçalı-tanımlı polinom fonksiyonlar seçilirse, (2.3) denkleminde görülen zamana göre konvolüsyon işleminin analitik sonucu mevcuttur.

Denklem (3.3), (3.2)'de yerine konulduktan sonra ortaya çıkan denklem uzaya göre test fonksiyonları ile $t = t_j$ anında test edilir. Uzaya göre test fonksiyonları,

uzaya göre temel fonksiyonlarla aynı seçilerek Galerkin prosedürü uygulanır. Test işlemi ile birlikte oluşan denklem sistemi matrislere indirgenir.

$$\boldsymbol{\gamma}_j = \sum_{i=0}^j \bar{\mathbf{Z}}_{j-i} \mathbf{I}_i \quad (3.5)$$

Burada $\boldsymbol{\gamma}_j$ gelen alanın testinden oluşan vektör ve $\bar{\mathbf{Z}}_{j-i}$ kaynakların oluşturduğu alanın testinden dolayı gelen empedans matrisidir. $\boldsymbol{\gamma}_j$ 'nin vektör, $\bar{\mathbf{Z}}_{j-i}$ ise iki boyutlu matris olduğuna dikkat edilmelidir. $\mathbf{I}_i$ ise bilinmeyen katsayıları nitelemektedir. Matris elemanları açıkça yazılacak olursa, kaynak testi sonucu elde edilecek olan matris elemanlar

$$\gamma_{m,j} = \int_{S_m} \mathbf{b}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t_j) d\mathbf{r} \quad (3.6)$$

olarak verilir. Empedans matrisi

$$\begin{aligned} Z_{mn,ji} = & \frac{1}{2} \int_{S_m} \mathbf{b}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) T_i(t_j) d\mathbf{r}' \\ & - \int_{S_m} \mathbf{b}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} \frac{1}{c} \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') T_i' \left(t_j - \frac{R}{c} \right) \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{4\pi R} d\mathbf{r}' d\mathbf{r} . \\ & - \int_{S_m} \mathbf{b}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} \frac{1}{R} \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') T_i \left(t_j - \frac{R}{c} \right) \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{4\pi R} d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak verilir. Dikkatle bakıldığında, $Z_{mn,ji}$ terimi, j anında m . test fonksiyonu üzerinde i anında uzaya göre n . temel fonksiyondan dolayı oluşan manyetik alan şiddetini göstermektedir. Standart ZAY algoritmasında Denklem (3.6) ve (3.7)'de verilen $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{r}'$ 'ne göre olan integraller nümerik olarak hesaplanmaktadır. Bu tezde belirtilen integrallerin belirlenmesi için üçgenler üzerinde tanımlı 7-noktalı Gauss integral yöntemi [22] kullanılmıştır. Bölüm 3.1'de anlatıldığı gibi, denklem (3.7)'de, $R \rightarrow 0$ iken sağ taraftaki ikinci ve üçüncü satırdaki integraller sıfırdır. Bu yüzden bu integraller gösterilirken asal değer integrali olarak gösterilmemiştir. Matris değerleri belirlendikten sonra, denklem (3.5) nedensellik de örtüşerek $\mathbf{I}_0 \equiv 0$ seçilir ve toplamın alt sınırı $i = 1$ olur.

$$\boldsymbol{\gamma}_j = \sum_{i=1}^j \bar{\mathbf{Z}}_{j-i} \mathbf{I}_i = \sum_{i=1}^{j-1} \bar{\mathbf{Z}}_{j-i} \mathbf{I}_i + \bar{\mathbf{Z}}_0 \mathbf{I}_j \quad (3.8)$$

(3.8) denkleminde $\bar{\mathbf{I}}_j$ en son zamana ait bilinmeyenler,

$$\mathbf{I}_j = \bar{\mathbf{Z}}_0^{-1} \left[\boldsymbol{\gamma}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \bar{\mathbf{Z}}_{j-i} \mathbf{I}_i \right] \quad (3.9)$$

olarak belirlenebilir. Bu andan sonra zamanda adımlama ile j . adıma ait akım değerleri belirlenir.

3.3. Empedans Matrisinin Yeni Yöntemle Belirlenmesi

Bir önceki bölümde MAİD için standart olarak kullanılan standart ZAY algoritması sunulmuştur. Bu bölümde ise (3.7) denklemi ile verilen empedans matrisinin, Bölüm 2’de anlatılan metot ile nasıl belirleneceği anlatılacaktır. Bunun için ilk olarak Bölüm 2.1’de türetilen formüller daha basit bir hale indirgenecektir. Daha sonra zamana göre konvolüsyonun parçalı-tanımlı polinom fonksiyonlar için nasıl belirleneceği anlatılacaktır.

Alt Bölüm 3.1’de değinildiği gibi gerek (3.2) denklemindeki integral gerekse (3.7) eşitliğindeki S_n üzerinden olan iç integral akım yoğunluğu fonksiyonundan dolayı oluşan manyetik alanın ifadesidir. Ancak (3.7) denkleminde, genel MAİD’dekinin aksine, bu integral zamana göre i ., uzaya göre n . temel fonksiyondan dolayı oluşan manyetik alanın ifadesini vermektedir. Standart ZAY algoritması için formüllerin türetiminde, sırasıyla, zamana göre konvolüsyon, S_n ve S_m yüzeyi üzerinden integraller hesaplanmaktadır. Burada zamana göre konvolüsyon analitik (zamana göre temel fonksiyon ile Dirac delta fonksiyonunun konvolüsyonu), diğer integraller nümerik olarak hesaplanmaktadır. Yeni metot için kullanılacak olan algorithmada ise, ilk olarak Bölüm 2’de gösterildiği gibi S_n yüzeyi üzerinden olan integral daha sonra zamana göre konvolüsyon ve S_m yüzeyi üzerinden olan integralin hesaplanması amaçlanmaktadır. Denklem (3.10)’daki ikinci integralde görüldüğü gibi, böylece S_n yüzeyi üzerinden olan integral ($\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$) zaman temel fonksiyonun davranışından etkilenmemektedir ve zaman temel fonksiyonu seçiminde

bir serbestlik sağlanmaktadır. Ayrıca, gösterileceği gibi, zaman temel fonksiyonlarının seçimine göre zamana göre konvolüsyon işlemi de analitik olarak hesaplanabilmektedir.

$$Z_{mn,ji} = \frac{1}{2} \int_{S_m} \mathbf{b}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) T_i(t_j) d\mathbf{r} - \int_{S_m} \mathbf{b}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times [T_i(t) * \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)]_{t=t_j} d\mathbf{r} \quad (3.10)$$

Denklem (2.9)'dan dolayı $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin herhangi bir fonksiyon ile konvolüsyonu, $V_1(t)$ ve $\mathbf{V}_2(t)$ ile konvolüsyonu belirlenerek hesaplanabilir. Bu amaç doğrultusunda $V_1(t)$ ve $\mathbf{V}_2(t)$ terimleri, bu türetimleri kolaylaştıracak bir formda ifade edilmelidir. Bunun için S_n üçgeninin i . kenarının $V_1(t)$ ve $\mathbf{V}_2(t)$ 'ye olan katkıları belirlenmelidir ($V_{1,i}(t)$ ve $\mathbf{V}_{2,i}(t)$). Ayrıca türetilcek ifadeler bir kez $l_{i,\max}^2 > l_{i,\min}^2 + l_i^2$ durumu için çıkartıldığında, genellik kaybedilmeden, $l_{i,\max}^2 \leq l_{i,\min}^2 + l_i^2$ durumuna kolayca adapte edilebilir. (2.21) ve (2.22) eşitlikleri, (2.14) denkleminde yerine yazılırsa $V_{1,i}(t)$

$$V_{1,i}(t) = \frac{\text{sgn}(\xi_i) a_i}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} \bigg|_{R=ct} \quad ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \quad (3.11)$$

olarak belirlenebilir. Trigonometrik toplam ve ters trigonometrik formüller kullanılarak ve Bölüm 2.1.3 ve 2.1.4'te verilen denklemler ile birlikte $\mathbf{V}_{2,i}(t)$

$$\mathbf{V}_{2,i}(t) = -\text{sgn}(\xi_i) \left\{ \hat{\mathbf{u}} \left[\frac{1}{\zeta} e_{u,i}(\zeta) + \partial_\zeta e_{u,i}(\zeta) \right] - \hat{\mathbf{v}} \left[\frac{1}{\zeta} e_{v,i}(\zeta) + \partial_\zeta e_{v,i}(\zeta) \right] \right\} \bigg|_{R=ct} \quad (3.12)$$

olarak belirlenir. Burada açığortay vektörünün ve türevinin u ve v bileşenleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$e_{u,i}(\zeta) = \chi \sin(\phi_{i,\max}) - \chi \sin(\phi_{i,\max}) \left[\frac{a_i^2}{\zeta l_{i,\max}} + \sqrt{1 - \frac{a_i^2}{l_{i,\max}^2}} \frac{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}}{\zeta} \right] + \cos(\phi_{i,\max}) \left[\frac{a_i}{\zeta} \sqrt{1 - \frac{a_i^2}{l_{i,\max}^2}} + \frac{a_i}{l_{i,\max}} \frac{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}}{\zeta} \right] \quad (3.13)$$

$$e_{v,i}(\zeta) = \chi \cos(\phi_{i,\max}) - \chi \cos(\phi_{i,\max}) \left[\frac{a_i^2}{\zeta l_{i,\max}} + \sqrt{1 - \frac{a_i^2}{l_{i,\max}^2}} \frac{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}}{\zeta} \right] - \sin(\phi_{i,\max}) \left[\frac{a_i}{\zeta} \sqrt{1 - \frac{a_i^2}{l_{i,\max}^2}} + \frac{a_i}{l_{i,\max}} \frac{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}}{\zeta} \right] \quad (3.14)$$

$$\partial_\zeta e_{u,i}(\zeta) = -\cos(\phi_{i,\max}) \left[\frac{a_i^3}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - a_i^2} l_{i,\max}} + \frac{a_i}{\zeta^2} \sqrt{1 - \frac{a_i^2}{l_{i,\max}^2}} \right] - \chi \sin(\phi_{i,\max}) \left[\frac{a_i^2}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} \sqrt{1 - \frac{a_i^2}{l_{i,\max}^2}} + \frac{a_i^2}{\zeta^2 l_{i,\max}} \right] \quad (3.15)$$

$$\partial_\zeta e_{v,i}(\zeta) = \sin(\phi_{i,\max}) \left[\frac{a_i^3}{l_{i,\max} \zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} + \frac{a_i}{\zeta^2} \sqrt{1 - \frac{a_i^2}{l_{i,\max}^2}} \right] - \chi \cos(\phi_{i,\max}) \left[\frac{a_i^2}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} \sqrt{1 - \frac{a_i^2}{l_{i,\max}^2}} + \frac{a_i^2}{\zeta^2 l_{i,\max}} \right] \quad (3.16)$$

Denklem (3.13)-(3.16)'dan görüldüğü gibi, $\zeta = \sqrt{(ct)^2 - d^2}$ olduğu sürece $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin herhangi bir zaman fonksiyonu ile konvolüsyonu,

$$\frac{1}{\zeta}, \quad \frac{1}{\zeta^2}, \quad \frac{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}}{\zeta^2}, \quad \frac{1}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} \quad (3.17)$$

ile verilen ζ 'nın dört farklı fonksiyonu ile konvolüsyon hesaplanarak belirlenebilir.

Eğer zamana göre temel fonksiyon parçalı-tanımlı polinom fonksiyon seçilirse (3.17) eşitliğinde verilen ζ 'nın fonksiyonları için konvolüsyon işlemi analitik olarak belirlenebilir. Bu işlem için gerekli integral ifadeleri ikinci dereceden olan ifadelere kadar Ek B'de verilmiştir. Yüksek mertebeli polinom fonksiyonları için konvolüsyon

işleminin sonucu, Ek B’de verilen analitik ifadeler ve kısmi integrasyon kullanılarak bulunabilir. Ek B’de verilen integrallerde sınırlar $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ ’nin ve parçalı-tanımlı polinom fonksiyonun sınırlarına göre belirlenir.

4. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde mükemmel iletken saçıcılar için Bölüm 2’de geliştirilen ve doğruluğu gösterilen metodun Bölüm 3.3’te anlatıldığı gibi ZAY algoritması ile birleştirilmesi sonucu elde edilen akım ve RKA sonuçları verilecektir. Yeni metotla elde edilen akım sonuçları, Bölüm 3.2’de değinilen standart ZAY algoritması ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Aynı zamanda farklı frekanslarda RKA değerleri, hem zaman çözümüyle hem de frekans çözümüyle belirlenerek karşılaştırılacaktır.

MAİD’in ZAY ile çözümü, hem 1. dereceden [26];

$$T_0(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{\Delta t} & ; -\Delta t \leq t < 0 \\ 1 - \frac{t}{\Delta t} & ; 0 \leq t < \Delta t \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (4.1)$$

hem de 2. dereceden [27];

$$T_0(t) = \begin{cases} 1 + 1.5 \frac{t}{\Delta t} + 0.5 \frac{t^2}{\Delta t^2} & ; -\Delta t \leq t < 0 \\ 1 - \frac{t^2}{\Delta t^2} & ; 0 \leq t < \Delta t \\ 1 - 1.5 \frac{t}{\Delta t} + 0.5 \frac{t^2}{\Delta t^2} & ; \Delta t \leq t < 2\Delta t \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (4.2)$$

parçalı tanımlı polinom fonksiyonlar kullanılarak elde edildi. Zaman uzayı çözümleri (3.2) denkleminin çözümü üzerine kuruludur. Analitik formüllerin ZAY algoritması ile birleştirilmesiyle elde edilen zaman uzayı sonuçları Bölüm 3.3’te anlatılan yol izlenerek bulunmuştur. Bu sonuçlar grafiklerde 1. dereceden zamana göre temel fonksiyon için TD_a1, 2. dereceden için TD_a2 ile belirtildi. Standart ZAY algoritması ile elde edilen sonuçlar ise Bölüm 3.2’de anlatılan yöntem kullanılarak bulundu. Bu sonuçlar grafiklerde, sırasıyla, TD_n1 ve TD_n2 ile belirtildi. Frekans uzayı sonuçları ise (3.1) denkleminin RWG fonksiyonları kullanılarak MM ile

çözümü ile bulundu. Bu sonuçlar grafiklerde FD ile belirtildi. Daha önce belirtildiği gibi nümerik integrasyon yöntemi olarak 7-noktalı Gauss integral yöntemi kullanıldığından, MAİD’de tekillik gözlenmedi. Bundan dolayı herhangi bir tekillik çıkartım işlemi yapılmadı. Ayrıca nümerik integrasyon hesaplanırken üçgenler en büyük kenar uzunluğu dalga boyunun onda biri olan alt üçgenlere bölünerek hesaplandı. Son olarak, zaman uzayı sonuçlarından farklı frekanslardaki RKA değerleri elde edildi. RKA değerleri elde edilirken zaman uzayında elde edilen akımların belli frekanstaki ayrık zaman Fourier dönüşümleri (*discrete time- Fourier transform*) alındı ve bu akımlardan RKA değerleri elde edildi.

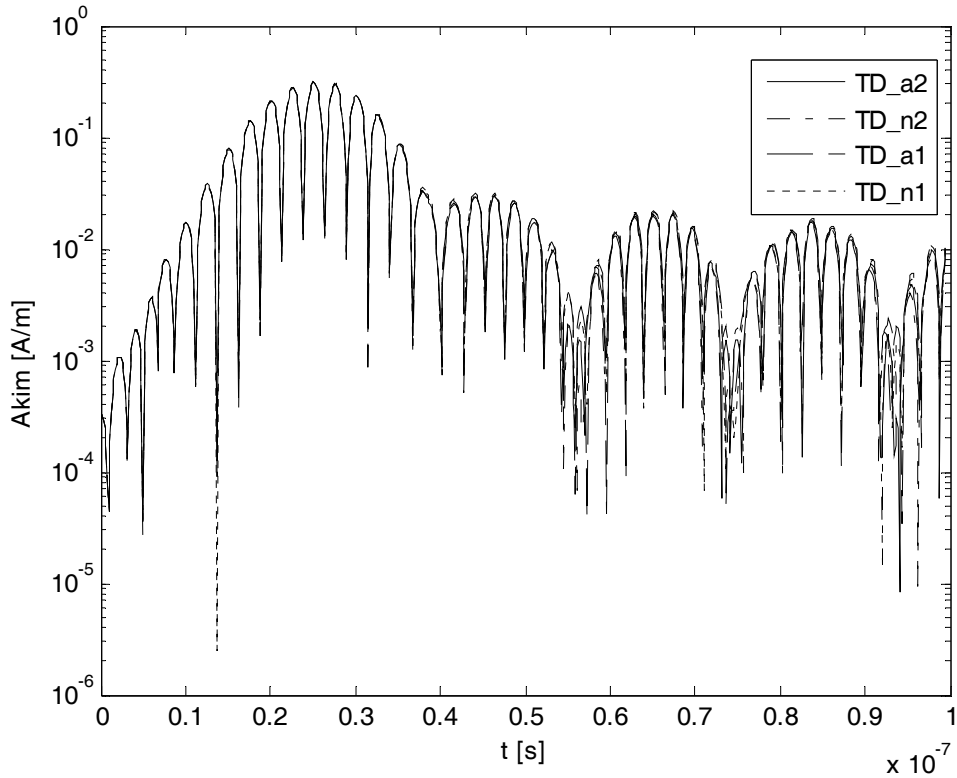
Tüm örneklerde gelen alan, modüle edilmiş Gauss düzemsal dalgası seçildi:

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{p}} \cos\left[2\pi f_0(t - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} / c)\right] e^{-\frac{(t-t_p - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} / c)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.3)$$

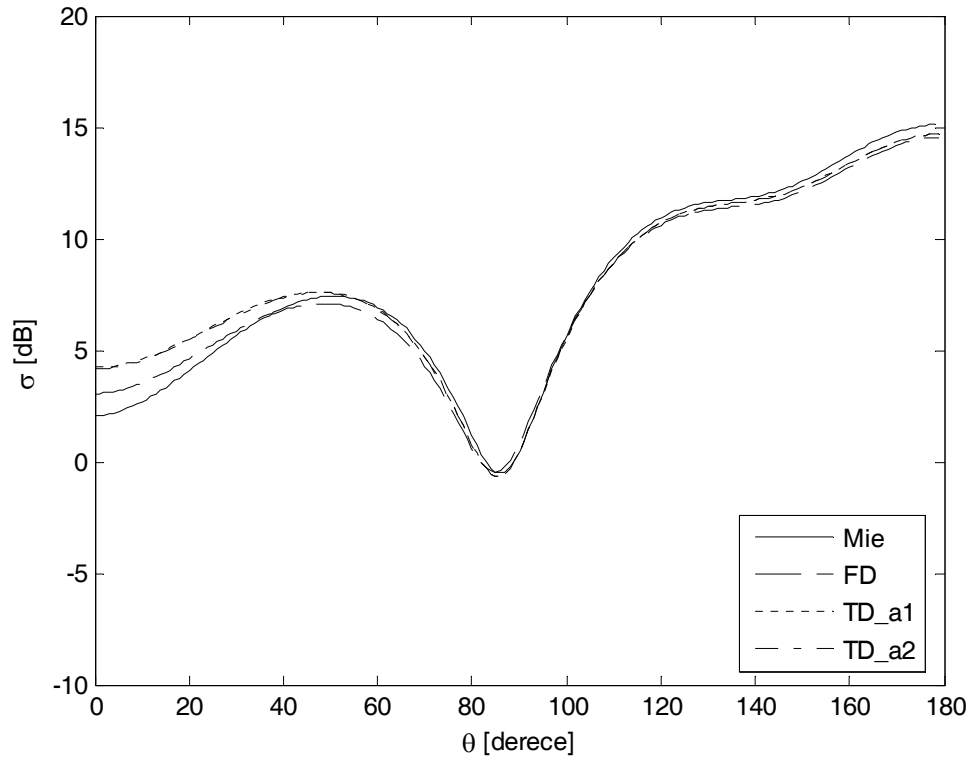
Burada f_0 merkez frekansını, $\hat{\mathbf{k}}$ gelen dalganın yayılma yönünü ve $\hat{\mathbf{p}}$ polarizasyonu belirtmektedir. Gelen sinyalin bant genişliği f_{bw} olarak nitelendirilerek $\sigma = 6/(2\pi f_{bw})$ ve $t_p = 3.5\sigma$ olarak seçildi. Ayrıca verilen örneklerde $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{z}}$ ve $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{x}}$ olarak seçildi.

İlk örnek olarak, analitik RKA çözümü olmasından dolayı (grafiklerde “Mie” ile gösterilmiştir), 1 m yarıçaplı 435 RWG temel fonksiyonu ile modellenmiş küre incelendi. Gelen dalganın merkez frekansı $f_0 = 200$ MHz ve bant genişliği $f_{bw} = 150$ MHz seçildi. Bu frekans aralığında küre bir çok rezonans frekansını barındırır: $f = 131, 275, 289, 292, 333... \text{ MHz}$ [6]. Bundan dolayı verilen frekans bölgelerinde MAİD çözümü rezonans terimlerini içerir ve rezonans bölgelerinde RKA değerlerinin hatalı çıkması beklenmektedir [14]. Şekil 4.1’de zaman uzayında geliştirilen metot ve standart metot ile elde edilen sonuçların içinden, rastgele seçilen uzaya göre temel fonksiyonun katsayısının zamana göre değişimi gösterilmiştir. Görüldüğü gibi iki yöntemle de elde edilen sonuçlar oldukça iyi uyumaktadır. Aynı zamanda akımın zamanla sönümlenmediği (yani rezonans etkileri) görülmektedir. Bu akım değerleri kullanılarak kısmen rezonans bölgesinden uzakta olan 140, 160, 200, 260 MHz’lerde RKA değerleri, sırasıyla, Şekil 4.2-4.5’te verilmiştir.

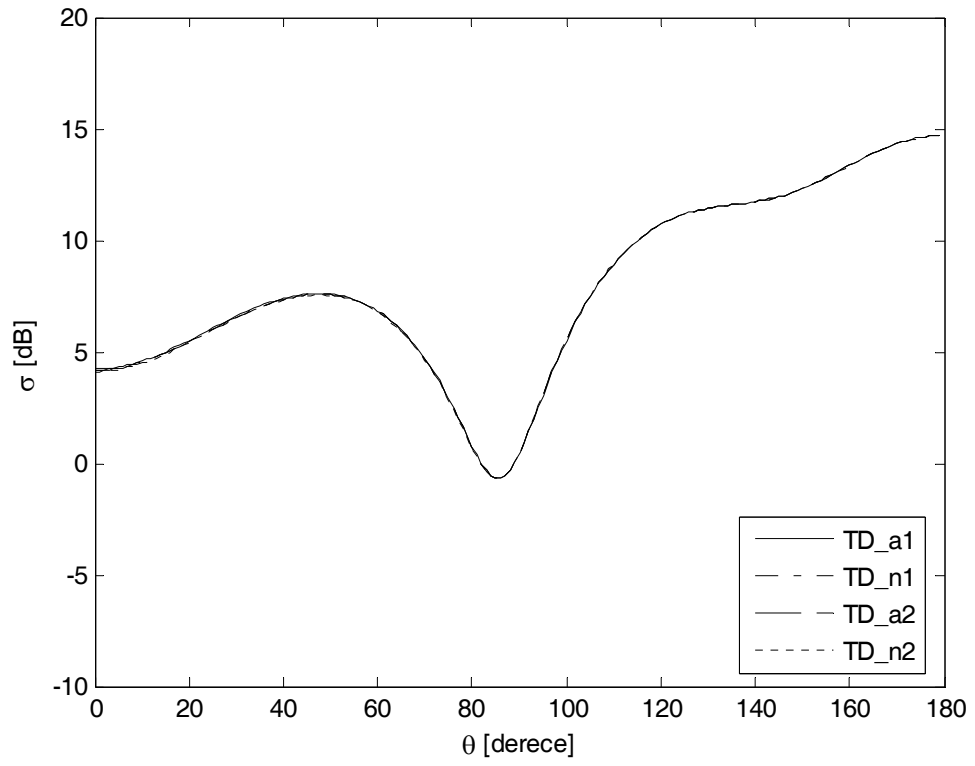
Bu şekillerin (a) kısmında geliştirilen metot kullanılarak elde edilen RKA ile frekans uzayı MAİD'in MM ile çözümünden ve analitik çözüm olan Mie seri çözümünden elde edilen RKA değerleri ile karşılaştırılmaktadır. Şekillerin (b) kısmında ise zaman uzayı sonuçları karşılaştırılmaktadır. Geometri eksensel simetriye sahip olduğu için sonuçlar $\theta \in [0, 180]$ ve $\phi = 0$ derece için türetildi. $\theta \in [0, 180]$ ve $\phi = \pi$ için RKA değerleri verilen RKA sonuçlarının simetriği alınarak bulunabilir. Görüldüğü gibi Şekil 4.2(b) - 4.5(b)'de zaman uzayı çözümlerinden elde edilen RKA değerleri oldukça iyi uyuşmaktadır. Ancak analitik çözüm ve frekans uzayında yapılan çözümde az da olsa farklılık gözlenmektedir. Bunun nedeni daha önce değinildiği gibi zaman uzayı çözümünün rezonans terimlerini içermesinden dolayıdır. Bu farkın daha iyi gözlemlenmesi için Şekil 4.6 ve 4.7'de, sırasıyla, kürenin rezonans bölgesinde olan 131 ve 275 MHz'deki RKA değerleri verildi. Şekil 4.6(b) ve 4.7(b)'de görüldüğü gibi tekrar zaman uzayı sonuçları mükemmel uyuşmasına rağmen, Şekil 4.6(a) ve 4.7(a)'da RKA değerleri analitik çözümden uzaklaşmaktadır.



Şekil 4.1. Küre üzerinde gözlenen akımın karşılaştırılması.

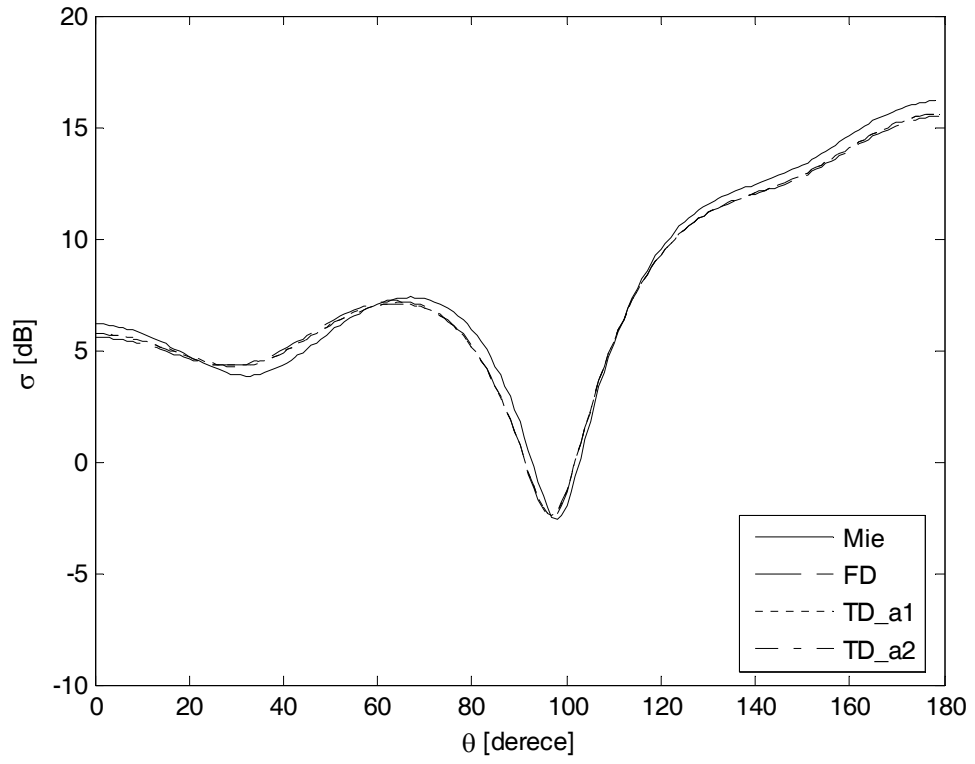


(a)

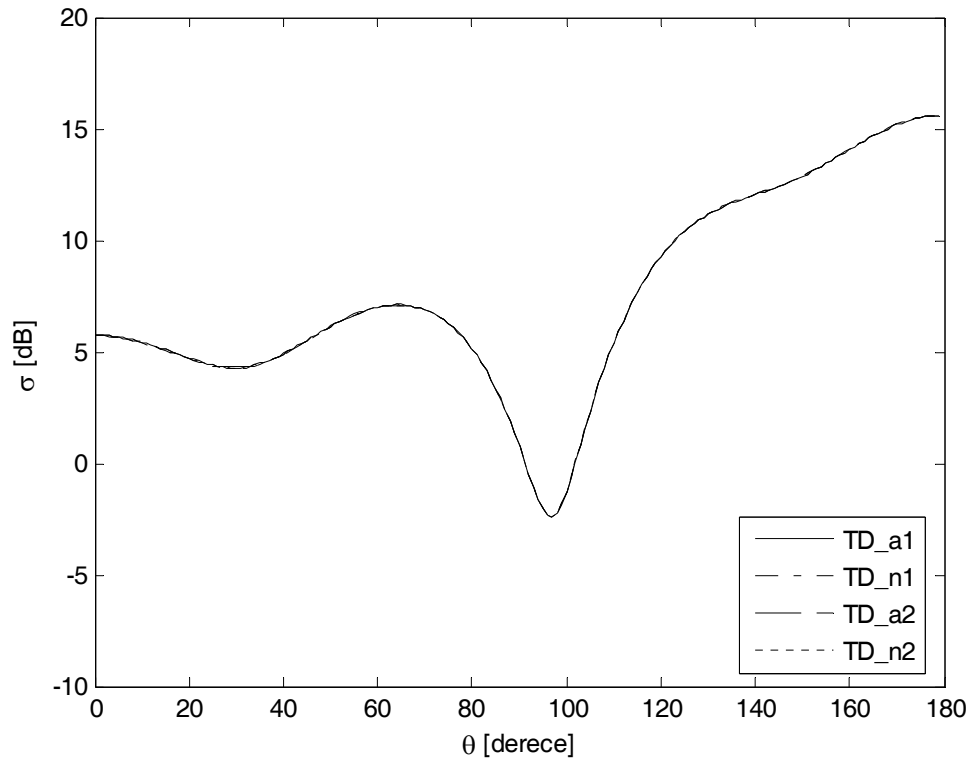


(b)

Şekil 4.2. Kürenin 140 MHz'deki RKA değeri.

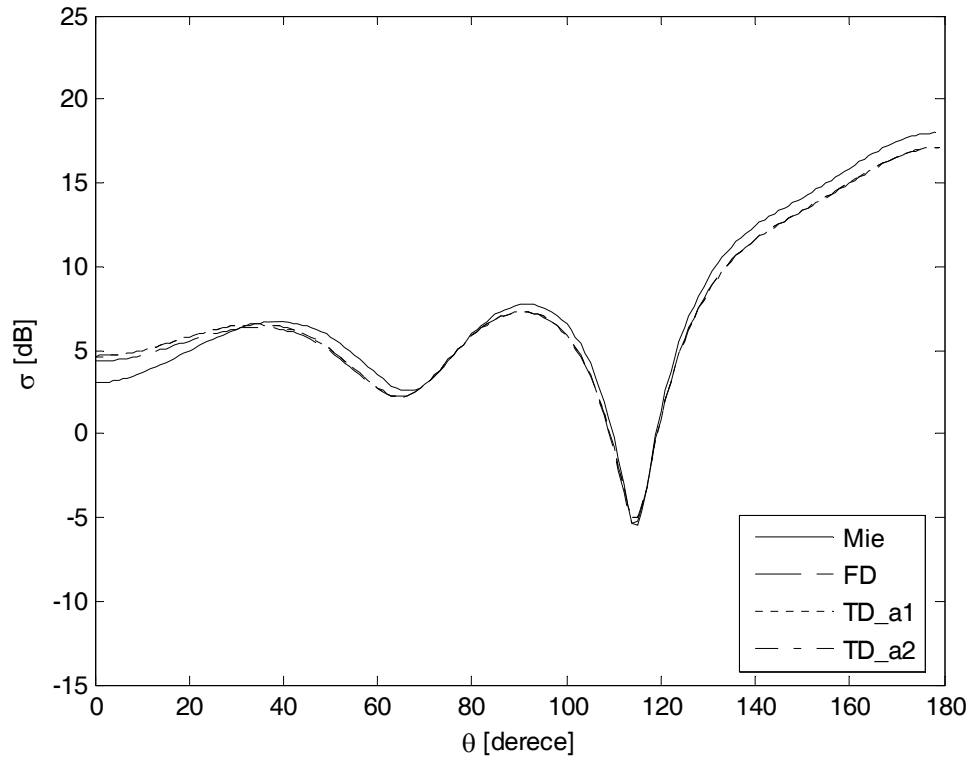


(a)

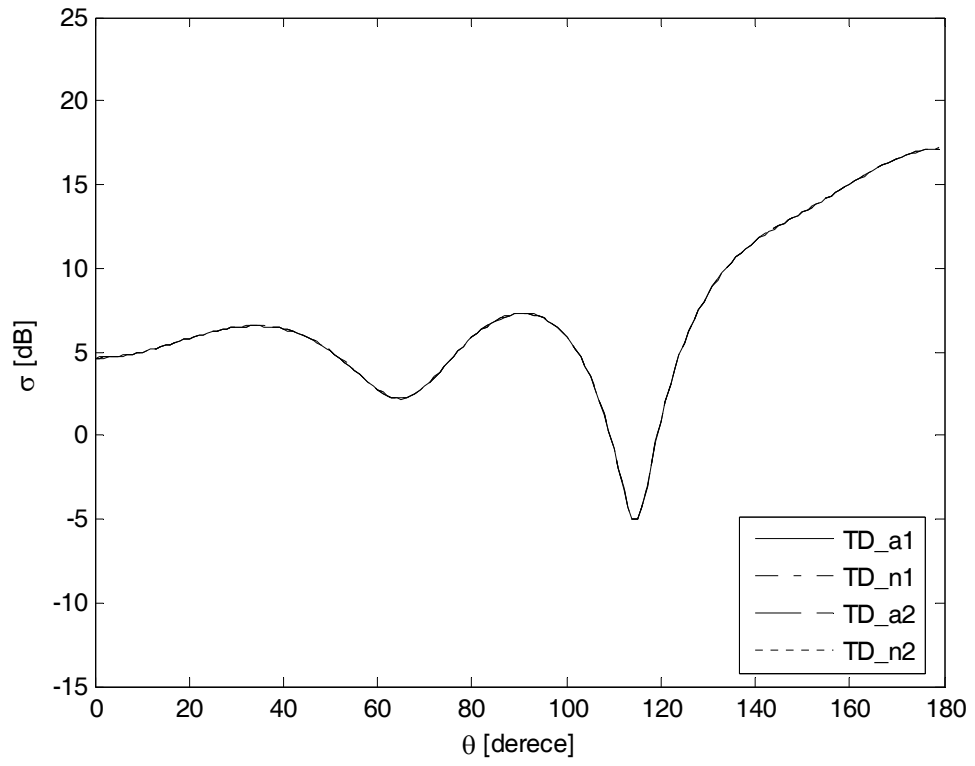


(b)

Şekil 4.3. Kürenin 160 MHz'deki RKA değeri.

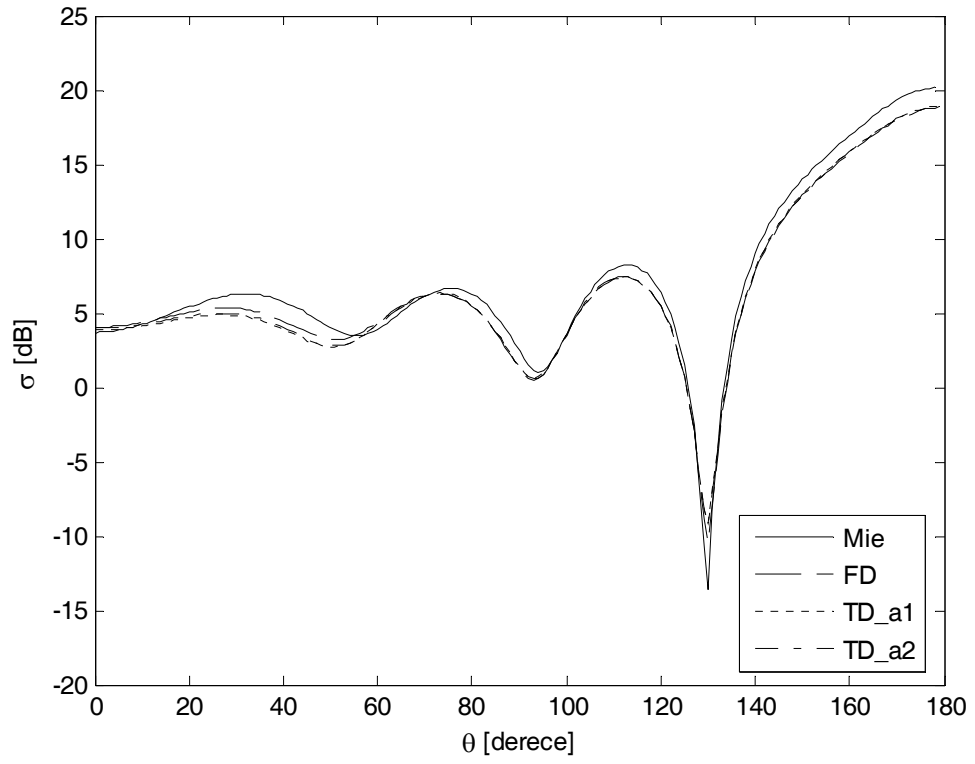


(a)

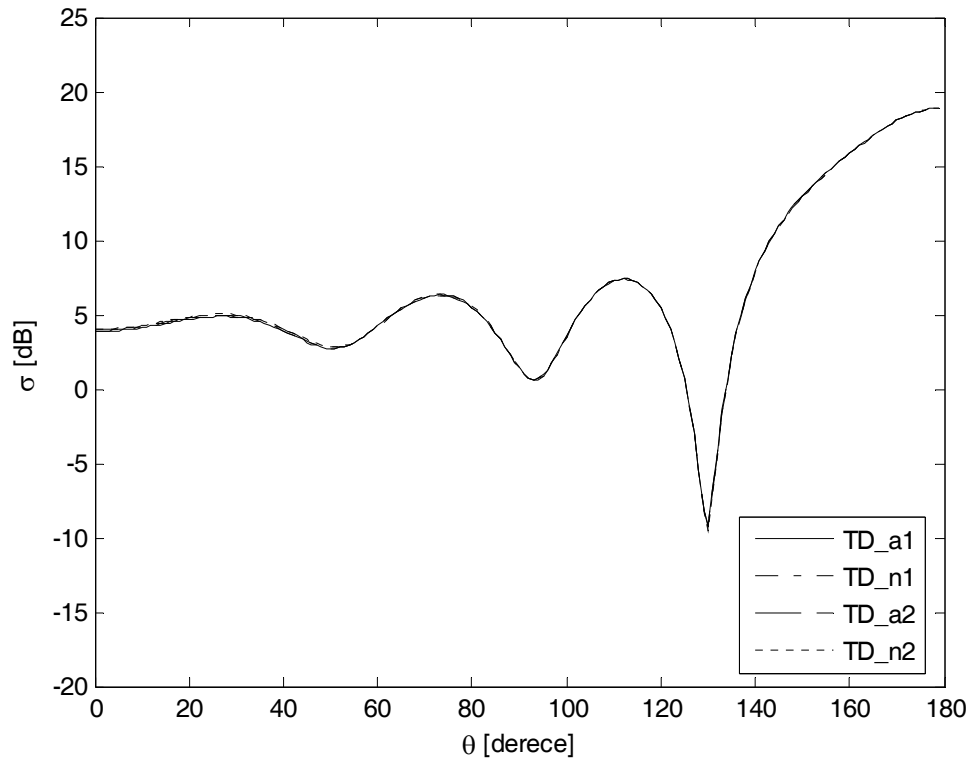


(b)

Şekil 4.4. Kürenin 200 MHz'deki RKA değeri.

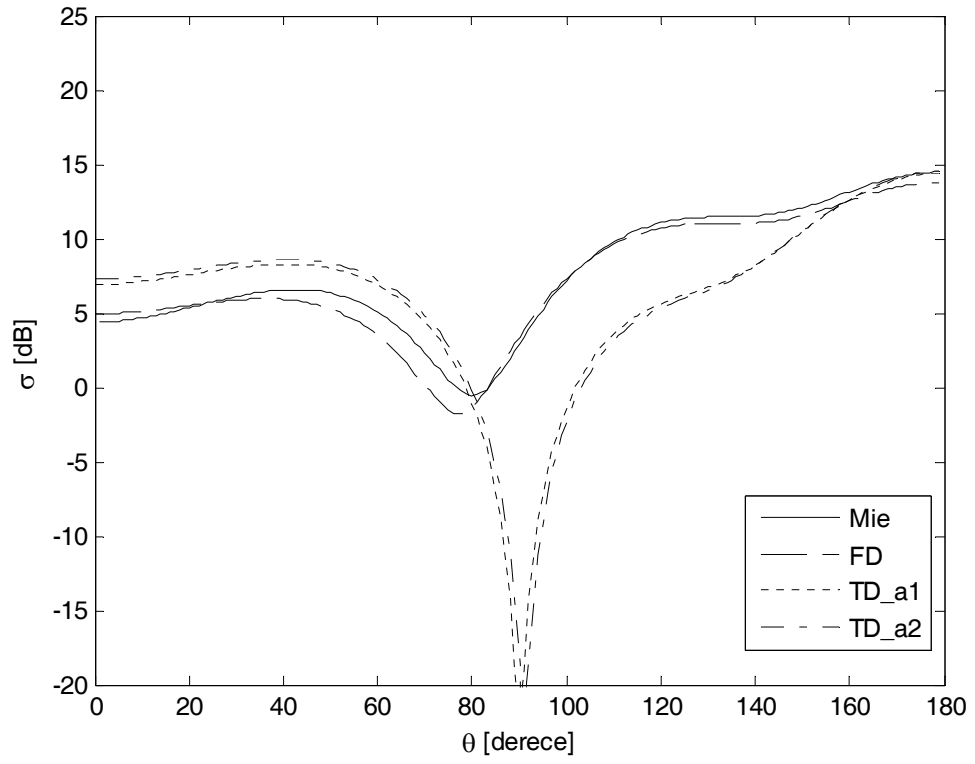


(a)

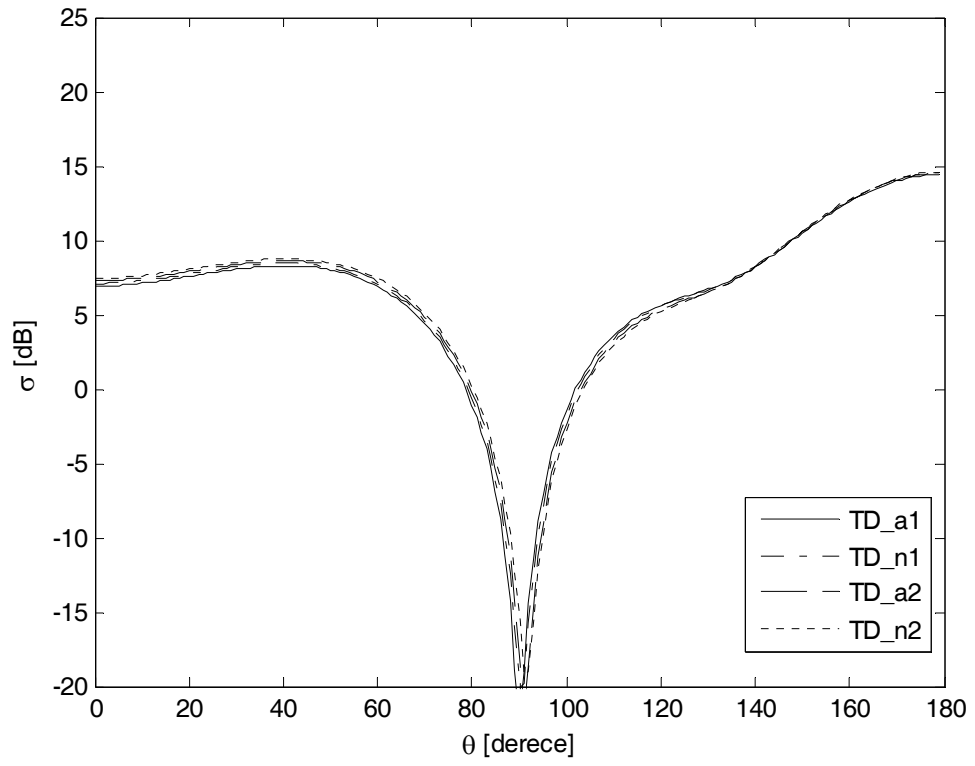


(b)

Şekil 4.5. Kürenin 260 MHz'deki RKA değeri.

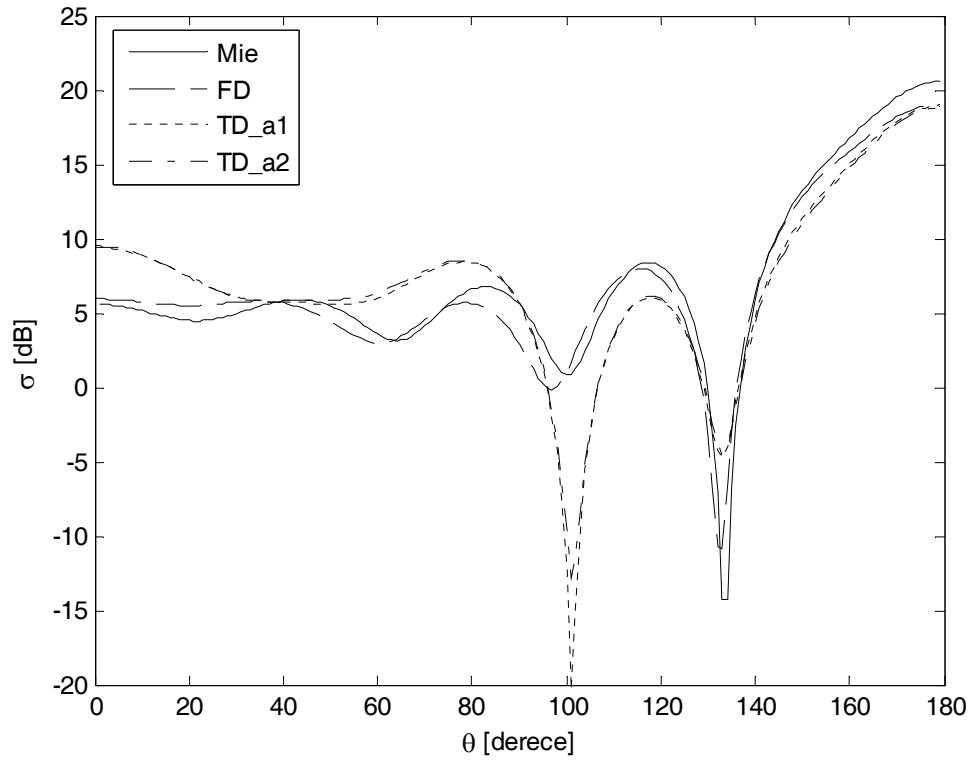


(a)

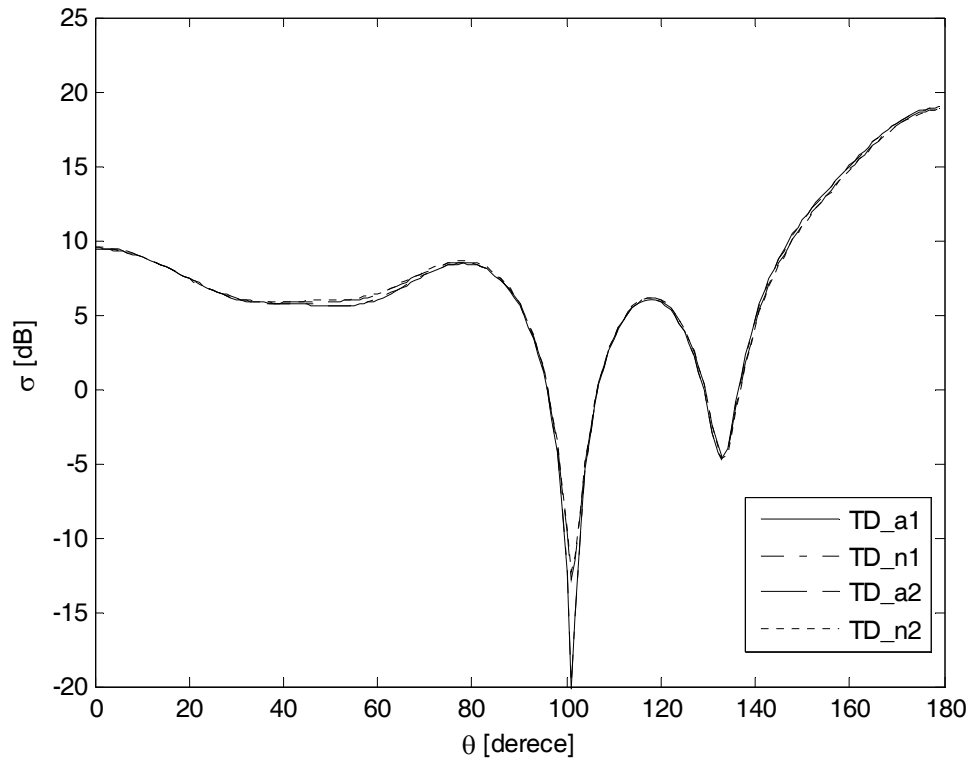


(b)

Şekil 4.6. Kürenin 131 MHz'deki RKA değeri.



(a)

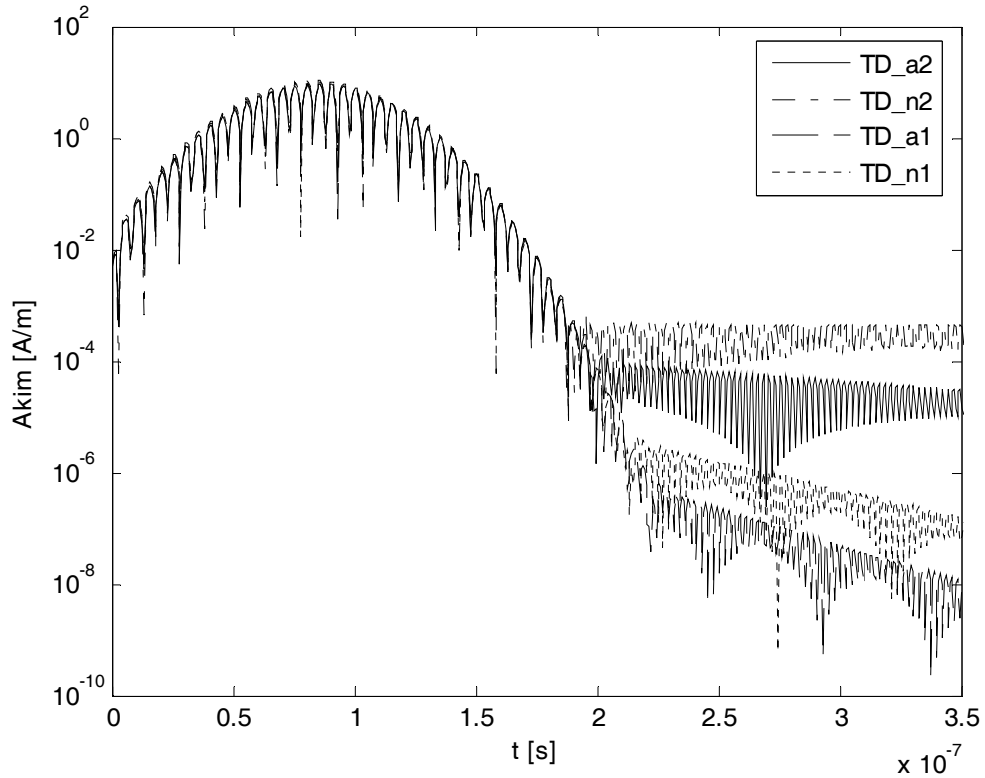


(b)

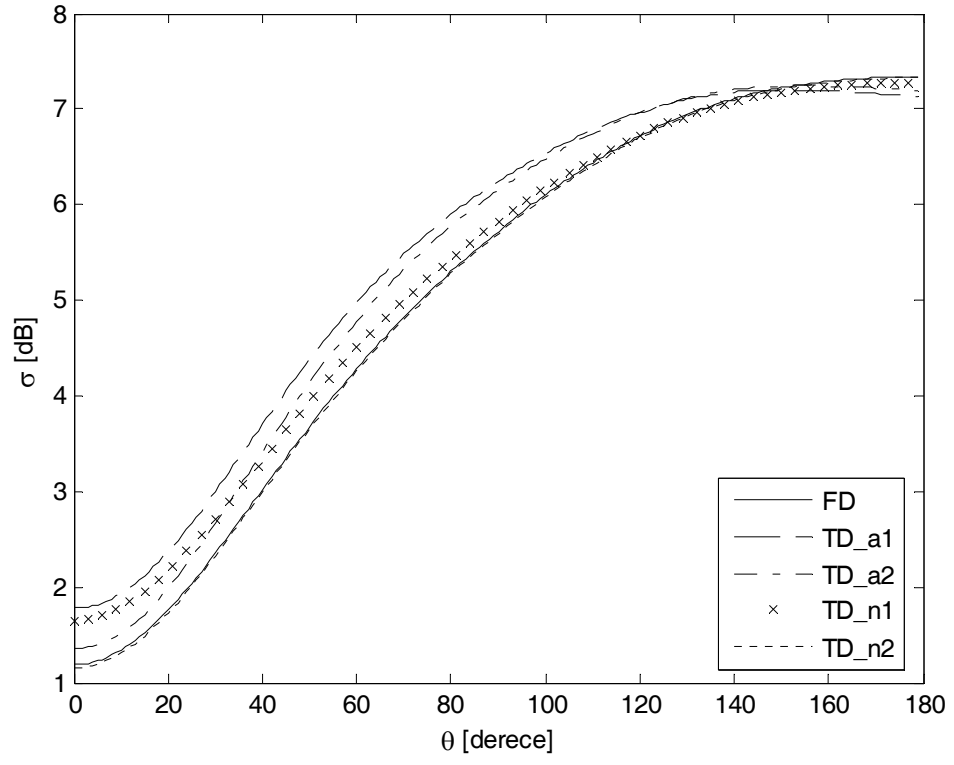
Şekil 4.7. Kürenin 275 MHz'deki RKA değeri.

Ek olarak bu bozulma frekans uzayı sonuçlarında da artmıştır. Rezonans kaynaklı bozulma MAİD ve EAİD'in birleşiminden oluşan çözümler üretilerek aşılabılır [14], [28]. Ancak rezonans probleminin incelenmesi bu tezin amaçları arasında değildir.

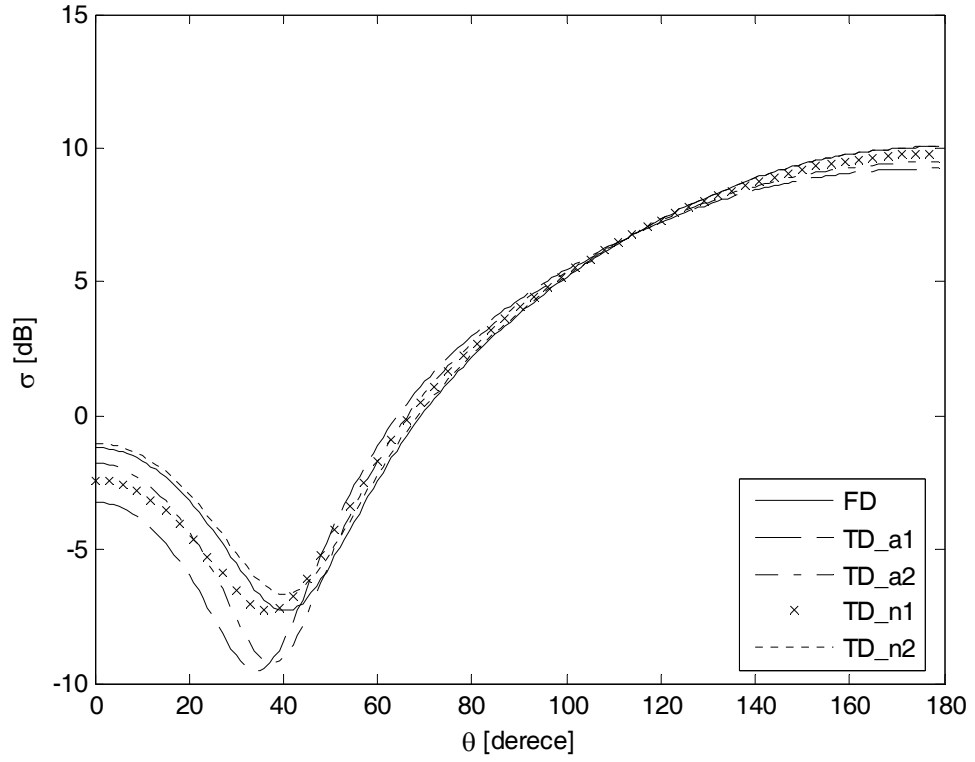
Son örnekte ise, $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ boyutlarında, 1152 RWG temel fonksiyonu ile modellenmiş bir küpün analizi yapıldı. Gelen alanın merkez frekansı $f_0 = 100 \text{ MHz}$ ve band genişliği $f_{bw} = 40 \text{ MHz}$ olarak seçildi. Bu frekans aralığında küp rezonans frekansı içermez. Bundan dolayı zaman uzayı çözümlerinde elde edilen akımların zamanla sönümlenmesi beklenmektedir. Şekil 4.8'de rastgele seçilen uzaya göre temel fonksiyon üzerindeki akım katsayısının zamanla değişimi görülmektedir. Şekil 4.8'de görüldüğü gibi, akımlar zamanla sönümlenmektedir. Ayrıca önerilen yeni metot ile elde edilen akımlar standart nümerik yöntemle elde edilene göre daha çabuk sönümlenmektedir. Bu önerilen metodun daha kararlı olduğunu göstermektedir. Şekil 4.9 ve 4.10'da, küp için, sırasıyla, 100 MHz ve 120 MHz'deki RKA değerleri $\theta \in [0, 180]$ ve $\phi = 0$ derece için görülmektedir. Görüldüğü gibi sonuçlar oldukça uyumludur.



Şekil 4.8. Küp üzerinde gözlenen akımın karşılaştırılması.



Şekil 4.9. Küpün 100 MHz'deki RKA değeri.



Şekil 4.10. Küpün 120 MHz'deki RKA değeri.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezin ilk yarısında zaman uzayında darbesel olarak uyarılmış RWG fonksiyonundan dolayı uzayın bir noktasında oluşan manyetik alanın hesaplanması için yeni bir yöntem sunuldu. Yöntem tamamen zaman uzayında geliştirildi. Gözlem noktasındaki manyetik alanın ifadesi, basit geometrik formlar ve bu formların zamana göre değişimlerine indirgendi. Bu geometrik formlar RWG fonksiyonun üçgensel bölgesi ile merkezi gözlem noktası olan ve $R = ct$ yarıçaplı bir kürenin kesişimi sonucu oluşan yay uzunluğu ve ilgili yay uzunluğunun açıortay vektörüdür. Detaylı olarak manyetik alan bu iki formun $R = ct$ 'ye göre değişimleri ile ifade edildi. Ayrıca bu formların analitik gösterimleri de türetildi. Benzer formülasyonların aksine türetilen formüller her zaman değeri için küre ile üçgen kenarlarının kesişim noktalarının belirlenmesini gerektirmemektedir. Ek olarak türetilen formüllerde, manyetik alanın içerdiği tekillikler incelendi. Manyetik alandaki tekilliklerin temel fonksiyonun kenarlarındaki akım yoğunluklarından dolayı oluşan alanların uzaysal süreksizliklerinden kaynaklandığına değinildi. Sonuçların doğrulanması, metodun frekans uzayı karşılığı kullanılarak frekans uzayı sonuçları üretilmesi ve zaman uzayına dönüştürülmesi yoluyla yapıldı. Sonuçların uyum içerisinde olduğu gözlemlendi.

Tezin ikinci yarısında, türetilen formüllerin, ZAY algoritması ile nasıl birleştirileceği sorusunu cevaplamak için zaman uzayı MAİD'in ZAY algoritması ile çözümü kısaca anlatıldı. Bu amaç doğrultusunda türetilen formüller basitleştirildi ve konvolüsyon işleminin sonucunun $\zeta = \sqrt{(ct)^2 - d^2}$ 'nın dört farklı fonksiyonu ile belirlenebileceği gösterildi. Ek B'de eğer zaman temel fonksiyonlar lineer veya ikinci dereceden parçalı tanımlı fonksiyonlar ise zamana göre konvolüsyon işlemi için gereken integrallerin analitik sonuçları verildi. Son olarak, sunulan yeni yaklaşım ZAY'a uygulanarak küre ve küp geometrileri üzerindeki akımlar ve farklı frekanslardaki RKA değerleri, standart ZAY ve frekans uzayı MAİD'in MM ile çözümü sonucu elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı. Akım ve RKA sonuçlarının oldukça uyumlu olduğu gözlemlendi.

Beklendiđi gibi geliştirilen yaklaşım, standart ZAY'a göre daha kararlı sonuç vermektedir. Bu çalışmada sunulan yaklaşım ve yay uzunluğu ve açıortay vektörü için türetilen formüller doğrudan EAİD'in ZAY ile çözümü için de kullanılabilir. Böylece EAİD ve MAİD birleştirilerek çözümler üretilebilir ve nümerik hesaplamalardan ve i rezonanslardan doğan kararsızlık problemi azaltılabileceği düşünülmektedir.

EK A

Bu bölümde, tezde kullanılan Dirac delta fonksiyonunun özellikleri verilecektir. Bu özelliklerin bazıları [29]'da verilmiştir. Diğerleri ise [29]'da verilen özellikler kullanılarak çıkartılabilir. İntegral altında verilen özelliklerde integral limitlerinin, Dirac fonksiyonunun argümanının sıfıra gittiği noktayı kapsadığı varsayılmaktadır.

$$\nabla \left[\frac{\delta(t - R/c)}{R} \right] = -\nabla' \left[\frac{\delta(t - R/c)}{R} \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\int f(R) \delta(t - R/c) dR = c \int f(R) \delta(ct - R) dR \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \int f(R) \frac{\partial \delta(ct - R)}{\partial R} dR &= \int f(R) \frac{\partial \delta(ct - R)}{\partial(ct - R)} \underbrace{\frac{\partial(ct - R)}{\partial R}}_{-1} dR \\ &= - \int \frac{df(R)}{dR} \delta(ct - R) dR \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\int f(R) \delta(ct - R) dR = f(ct) \int \delta(ct - R) dR \quad (\text{A.4})$$

EK B

Bu bölümde (3.17) eşitliği ile verilen ζ 'nın dört farklı fonksiyonu için zamana göre konvolüsyon işleminde kullanılacak integral sonuçları verilecektir. Bu sonuçlar [30]'da verilen integral tabloları aracılığıyla elde edilebilir. İntegral ifadeleri verilirken $f(t)$ ve $g(t)$ gösterimleri kullanılacaktır. $f(t)=1, t, t^2$ polinom ifadelerini, $g(t)$ ise denklem (3.17) ile verilen ζ 'nın fonksiyonlarını belirtmektedir.

$\int \frac{f(t)}{\sqrt{(ct)^2 - d^2}} dt$ formundaki integraller:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - d^2}}$$

$$f(t)=1: \quad \int g(t)dt = \frac{1}{c} \ln \left(ct + \sqrt{(ct)^2 - d^2} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$f(t)=t: \quad \int tg(t)dt = \frac{1}{c^2} \sqrt{(ct)^2 - d^2} \quad (\text{B.2})$$

$$f(t)=t^2: \quad \int t^2 g(t)dt = \frac{1}{2c^2} t \sqrt{(ct)^2 - d^2} + \frac{d^2}{2c^3} \ln \left(ct + \sqrt{(ct)^2 - d^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

$\int \frac{f(t)}{(ct)^2 - d^2} dt$ formundaki integraller:

$$g(t) = \frac{1}{(ct)^2 - d^2}$$

$$f(t)=1: \quad \int g(t)dt = \frac{1}{2cd} \ln \left[\frac{ct-d}{ct+d} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$f(t)=t: \quad \int tg(t)dt = \frac{1}{2c^2} \ln \left[(ct)^2 - d^2 \right] \quad (\text{B.5})$$

$$f(t)=t^2: \quad \int t^2 g(t)dt = \frac{t}{c^2} + \frac{d}{2c^3} \ln \left[\frac{ct-d}{ct+d} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\int \frac{f(t)\sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}}{(ct)^2 - d^2} dt \text{ formundaki integraller:}$$

$$g(t) = \frac{\sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}}{(ct)^2 - d^2}$$

$$\begin{aligned} f(t) = 1: \quad \int g(t) dt &= \frac{1}{c} \ln \left[ct + \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2} \right] \\ &\quad - \frac{a_i}{2dc} \tan^{-1} \left[\frac{2ctda_i \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}}{a_i^2 \left((ct)^2 + d^2 \right) - d^2 \left((ct)^2 - d^2 \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$f(t) = t: \quad \int tg(t) dt = \frac{1}{c^2} \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2} - \frac{a_i}{c^2} \sec^{-1} \left[\frac{\sqrt{(ct)^2 - d^2}}{a_i} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} f(t) = t^2: \quad \int t^2 g(t) dt &= \frac{t}{2c^2} \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2} + \frac{d^2 - a_i^2}{2c^3} \ln \left[ct + \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2} \right] \\ &\quad - \frac{da_i}{2c^3} \tan^{-1} \left[\frac{2ctda_i \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}}{a_i^2 \left((ct)^2 + d^2 \right) - d^2 \left((ct)^2 - d^2 \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\int \frac{f(t)}{\left[(ct)^2 - d^2 \right] \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}} dt \text{ formundaki integraller:}$$

$$g(t) = \frac{1}{\left[(ct)^2 - d^2 \right] \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}}$$

$$f(t) = 1: \quad \int g(t) dt = \frac{1}{2cda_i} \tan^{-1} \left[\frac{2ctda_i \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}}{a_i^2 \left((ct)^2 + d^2 \right) - d^2 \left((ct)^2 - d^2 \right)} \right] \quad (\text{B.10})$$

$$f(t) = t: \quad \int tg(t) dt = \frac{1}{c^2 a_i} \sec^{-1} \left[\frac{\sqrt{(ct)^2 - d^2}}{a_i} \right] \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} f(t) = t^2: \quad \int t^2 g(t) dt &= \frac{1}{c^3} \ln \left[ct + \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2} \right] \\ &\quad + \frac{d}{2c^3 a_i} \tan^{-1} \left[\frac{2ctda_i \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}}{a_i^2 \left((ct)^2 + d^2 \right) - d^2 \left((ct)^2 - d^2 \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

KAYNAKLAR

- [1] M. İdemen, "The Maxwell's Equation in the Sense of Distributions," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 21, issue 5, pp. 736-738, Sep. 1973.
- [2] M. İdemen, *Elektromanyetik Alan Teorisinin Temelleri*, Literatür Yayıncılık, 1996.
- [3] E. F. Knott, J. F. Schaeffer, M. T. Tuley, *Radar Cross Section*, Second Edition, Raleigh, NC :SciTech Publishing, 2004.
- [4] A. A. Ergin, "Görünmezlik Teknolojileri: Radar Kesit Alanı Nedir?," *Savunma ve Havacılık*, no. 120, IDEF'07 Özel Sayı, 2007.
- [5] J. Moore, R. Pizer, *Moment Methods in Electromagnetics, Techniques and Applications*, Research Studies Press, 1986.
- [6] C.A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley and Sons, 1991.
- [7] R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, IEEE Press, 1993.
- [8] S.P. Walker, "Developments in Time Domain Integral-Equation Modeling at Imperial College," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 39, pp. 7-19, 1997.
- [9] A.G. Tijhuis, *Electromagnetic Inverse Profiling Theory and Numerical Implementation*, Brill Academic Publishers, 1987.
- [10] A. F. Peterson, S. L. Ray, R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE Press, 1997.
- [11] S.M. Rao, D.R. Wilton, A.W. Glisson, "Electromagnetic Scattering by Arbitrary Shape," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. AP-30, pp 409-418, May 1982.
- [12] D.R. Wilton, S.M. Rao, A.W. Glisson, D.H. Schaubert, O.M. Al-Bundak, C.M. Butler, "Potential Integrals for Uniform and Linear Source Distributions on Polygonal and Polyhedral Domains," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 32, no. 3, pp 276-281, March 1984.
- [13] A. C. Yücel and A. A. Ergin, "Exact evaluation of retarded-time potential integrals for the RWG bases," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 5, pp. 1496–1502, May 2006.
- [14] B. Shanker, A. A. Ergin, K. Aygün, and E. Michielssen, "Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral

- equation ,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 48, no. 7, pp. 1064–1074, Jul. 2000.
- [15] M. Lu and E. Michielssen, “Closed form evaluation of time domain fields due to Rao-Wilton-Glisson sources for use in marching-on-in-time based EFIE solvers,” in *Antennas and Propagation Society Int. Symp.*, vol. 1, San Antonio, TX, Jun. 16–21, 2002, pp. 74–77.
 - [16] J. Pingnot, S. Chakraborty, and V. Jandhyala, “Polar integration for exact space-time quadrature in time-domain integral equations,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 10, pp. 3037-3042, Oct. 2006.
 - [17] J.M. Ruis, E. Udeba, J. Parron, “On the Testing of the Magnetic Field Integral Equation With RWG Basis Functions in Method of Moments”, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 49, No. 11, pp. 1550-1553, November 2001.
 - [18] E. Udeba, J.M. Ruis, “Curl-conforming MFIE in the analysis of perfectly conducting sharply-edged objects”, *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 4, pp. 4052-4055, 20-25 June 2004.
 - [19] Ö. Ergül, L. Gürel, “Improving the Accuracy of the MFIE with the Choice of Basis Functions”, *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 3, pp 3389 - 3392, 20-25 June 2004.
 - [20] Ö. Ergül, L. Gürel, “Investigation of the Inaccuracy of the MFIE Discretized with the RWG Basis Functions”, *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 3, pp 3393- 3396, 20-25 June 2004.
 - [21] D. Bölükbaş, A. A. Ergin, “A Radon Transform Interpretation of the Physical Optics Integral”, *Microwave and Op. Tech. Letters*, vol.44, issue 3, pp 284-288, John Wiley & Sons, February 2005.
 - [22] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, 1993.
 - [23] M.I. Sancer, “MFIE limiting process and curvilinear computations,” *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 2, pp. 886-887, 21-26, June, 1998.
 - [24] R.E. Hodges, Y. Rahmat-Samii, “The Evaluation of MFIE Integrals With the Use of Vector Triangle Basis Functions”, *Microwave and Op. Tech. Letters*, vol.14, No.1, pp 9-14, John Wiley & Sons, January 1997.

- [25] L. Gürel, Ö. Ergül, “Singularity of the Magnetic-Field Integral Equation and its Extraction”, *IEEE Antennas and Propagation Letters*, vol. 4, 2005.
- [26] S. M. Rao, D. R. Wilton, “ Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shape,” *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 39, pp. 56-61, Jan. 1982.
- [27] G. Manara, A. Monorchio, R. Reggiannini, “A Space-Time Discretization Criterion for a Stable Time-Marching Solution of the Electric Field Integral Equation,” *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 45, pp. 527-532, Mar. 1997.
- [28] J. R. Mautz, R. F. Harrington, “H-field, E-field, and Combined Field Solutions for Conducting Bodies of Revolution,” *AEÜ*, vol. 32, pp. 157-164, 1978.
- [29] J. Van Bladel, *Singular Electromagnetic Fields and Sources*, Oxford: Clarendon Press, New York: Oxford University Press, 1991.
- [30] J. J. Tuma, *Engineering Mathematics Handbook*, Third Edition, McGraw-Hill, 1987.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin Arda Ülkü, 1984 yılında Antalya’da doğdu. Lise öğrenimini Eskişehir Kılıçoğlu Anadolu Lisesi’nde 2002 senesinde tamamladı. Aynı yıl Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği bölümünde okumaya hak kazandı. 2006 yılında bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl mezun olduğu bölüme yüksek lisans öğrencisi olarak kabul edildi. Hüseyin Arda Ülkü, halen aynı bölümde öğrenim hayatına devam etmektedir. İlgili alanları arasında, nümerik elektromanyetik, özellikle zaman uzayı integral denklemlerinin nümerik yöntemlerle hesaplanması yer almaktadır.