

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ KATMANLI VE DİP KAYIPLI BİR DENİZ
ORTAMININ İKİ BOYUTLU SU ALTI
AKUSTİK DALGA YAYILIMINA ETKİSİ

Aslan ÖZKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ

GEBZE

2010

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ KATMANLI VE DİP KAYIPLI BİR DENİZ
ORTAMININ İKİ BOYUTLU SU ALTI
AKUSTİK DALGA YAYILIMINA ETKİSİ

Aslan ÖZKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. SERKAN AKSOY

GEBZE

2010



YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .08/01/2010 tarih ve ...2010/01... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından .05/02/2010.. tarihinde tez savunma sınavı yapılan ...Aslan ÖZKAYA...'nın tez çalışması ...Elektronik Mühendisliği... Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Serkan Aksoy

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Ahmet Demir

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. İsmail Hakkı Tayyar

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: İKİ KATMANLI VE DİP KAYIPLI BİR DENİZ ORTAMININ İKİ BOYUTLU SU ALTI AKUSTİK DALGA YAYILIMINA ETKİSİ

YAZAR ADI : ASLAN ÖZKAYA

Bu çalışmada iki katmanlı ve dip kayıplı bir deniz ortamının, iki boyutlu silindirik koordinatlarda su altı akustik dalga yayılımına etkisi araştırılmıştır. Isı iletimlerinin hesaba katılmadığı *Durum*, *Lineerleştirilmiş Süreklilik* ve *Lineerleştirilmiş Euler* denklemleri kullanılıp monokromatik yaklaşım altında Helmholtz denklemi elde edilerek, iki boyutta değişkenlere ayrıştırma tekniğini esas alan Normal Mod yöntemi kullanılarak tek katman için çözülmüştür. Bu çözüm öncelikle Sıvı-Sıvı katman (Pekeris dalga kılavuzu) durumuna genişletilerek, daha sonra kayıplı bir dip tabiatını modelleyen, Sıvı-Katı katman durumunda çözüm elde edilmiştir. Burada deniz yüzeyi basınçtan arındırılmış sınır koşulu ile modellenerek, üst katman homojen, sabit derinlikli bir sıvı olup, homojen ve kayıplı bir sonsuz yarı uzay üzerine yerleşmiştir. Sıvı-Katı probleminin çözümünün elde edilmesi için dipteki kaybın çok küçük olduğu varsayımı altında, yayılım sabitini hesaplamak için transandantal denklemin kökleri sayısal olarak bulunmuştur. Özel olarak incelemeler ayrık modlar üzerine kurulmuştur. Elde edilen çözümlerden menzile göre İletim Kaybı hesaplanarak, KRAKEN programı ve kayıpları da hesaba katan gelişmiş bir KRAKEN versiyonu olan KRAKENC programının sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar sonucunda yüksek düzeyde iyi bir uyum gözlenmiştir.

SUMMARY

TITLE OF THE THESIS: THE EFFECT OF TWO LAYERED UNDERWATER ENVIRONMENT WITH BOTTOM LOSS TO UNDERWATER ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN TWO DIMENSIONAL COORDINATES

NAME OF AUTHOR : ASLAN ÖZKAYA

In this study, the effect of two layered sea environment with bottom loss to underwater acoustic wave propagation in two dimensional cylindrical coordinates is presented. Helmholtz equation is derived from adiabatic approximation of *State*, *Linearized Continuity* and *Linearized Euler's* equations in monochromatic condition and solved by using Normal Mode method that based on separation of variables technique in two dimensions for single layered model. This solution is extended to Fluid-Fluid layered (Pekeris waveguide) model and then Fluid-Solid layered model solution is obtained for lossy bottom. In this study surface of sea is modeled as a pressure-release boundary and upper layer is assumed homogeneous fluid having constant depth and located above the semi-finite lossy bottom. In order to solve Fluid-Solid problem, propagation constants which are the roots of transcendental equation is computed numerically in the sense of very low bottom loss level. Calculations include discrete modes especially. Transmission loss (TL) related to range is calculated from the latter solution and compared with the result of KRAKEN program and developed version of KRAKENC program which also considers about loss. An excellent agreement is obtained between the results.

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezinin hazırlanmasında yardımlarını benden esirgemeyen, her durumda bana destek olan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Serkan AKSOY hocama, çalışmalarım esnasında birçok konuda desteğini aldığım okul arkadaşım Hüseyin Özkan SERTLEK'e, yüksek lisans eğitimime teşvik ve katkılarından dolayı değerli iş arkadaşlarıma, eğitim ve öğrenim hayatım boyunca hep yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini sunan aileme, GYTE Elektronik Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine ve diğer okul arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım...

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. KONU ve ÖNEMİ	1
2. TEZİN AMACI ve İÇERİĞİ	5
2.1. Problemin Tarihsel Gelişimi	5
2.2. Akustik Dalga Denklemi	17
2.2.1. Sınır ve Süreklilik Koşulları	20
2.3. Normal Mod Yöntemi	21
2.3.1. İletim Kaybının Hesaplanması	22
3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU	23
3.1. Tek Katmanlı Dalga Kılavuzu	23
3.1.1. $\alpha_n(\mathbf{z}_0)$ Katsayısının Hesabı	26
3.1.2. $\rho_0(\mathbf{z})$ Yoğunluğun Sabit Olması Durumu	30
3.1.3. Kesim Frekansı Hesabı	31
3.2. Sıvı – Sıvı Dalga Kılavuzu	32
3.2.1. Ayrık (Discrete) Modlar	33
3.2.2. Sürekli Spektrumlu (Continuum) Modlar	35
3.3. Sıvı – Katı Dalga Kılavuzu	36
3.3.1. Alt Katman İçin Akustik Alan Hesaplaması	36
3.3.2. Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi	39
3.3.3. Kompleks Özdeğer Hesaplamaları	41
4. SAYISAL SONUÇLAR ve DOĞRULAMA	47
4.1. Sıvı – Sıvı Durumu için Karşılaştırma	48
4.1.1. Farklı Frekanslar için Karşılaştırmalar	48
4.1.2. Farklı Derinlikler için Karşılaştırmalar	49
4.1.3. Farklı Ses Hızları için Karşılaştırmalar	50
4.1.4. Farklı Kaynak Yerleri için Karşılaştırmalar	51
4.2. Sıvı – Katı Durumu için Karşılaştırma	52

4.2.1. Farklı Frekanslar için Karşılaştırmalar	52
4.2.2. Farklı Derinlikler için Karşılaştırmalar	53
4.2.3. Farklı Ses Hızları için Karşılaştırmalar	54
4.2.4. Farklı Kaynak Yerleri için Karşılaştırmalar	55
4.2.5. Farklı Kayıp Katsayıları için Karşılaştırmalar	56
5. SONUÇLAR ve YORUMLAR	57
6. KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	61

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$c(\vec{r})$	: Ses Hızı (m/sn)
$\rho_0(\vec{r})$	: Konum Bağımlı Yoğunluk (kg/m^3)
$u(\vec{r}, t)$	: Akustik Basınç ($Newton/m^2$)
$\vec{v}(\vec{r}, t)$	: Parçacık Hızı (m/sn)
$s(\vec{r}, t)$	: Su Yoğunlaşma Dağılımı
β	: Su Esnekliği ($Newton/m^2$)
h	: Derinlik (m)
k	: Dalga Sayısı (rad/m)
k_{rn}	: Yatay Dalga Sayısı (rad/m)
k_{zn}	: Dikey Dalga Sayısı (rad/m)
Δ	: Laplace Operatörü
λ	: Dalga Boyu (m)
f	: Frekans (Hz)
ω	: Açısal Frekans (rad/sn)
c_1	: Birinci Ortamdaki Ses Hızı (m/sn)
c_2	: İkinci Ortamdaki Ses Hızı (m/sn)
α	: Kayıp Katsayısı (dB/m)
TL	: Transmission Loss (dB)
NM	: Normal Mod

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Sıvı-Sıvı iki katmanlı dalga kılavuzu ve ilk modun alan dağılımı ile sıyırma açısının kritik açıya göre durumu.	32
4.1. a) $f = 60 \text{ Hz}$, b) $f = 100 \text{ Hz}$, c) $f = 250 \text{ Hz}$ için KRAKEN ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.	48
4.2. a) $h = 50 \text{ m}$, b) $h = 100 \text{ m}$ c) $h = 150 \text{ m}$ için KRAKEN ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.	49
4.3. a) $c_1 = 1400 \text{ m/sn}$, b) $c_1 = 1500 \text{ m/sn}$, c) MUNK değişken ses hızı profili için KRAKEN ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.	50
4.4. a) $z_0 = 25 \text{ m}$, b) $z_0 = 50 \text{ m}$, c) $z_0 = 75 \text{ m}$ için KRAKEN ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.	51
4.5. a) $f = 60 \text{ Hz}$, b) $f = 100 \text{ Hz}$, c) $f = 250 \text{ Hz}$ için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.	52
4.6. a) $h = 50 \text{ m}$, b) $h = 100 \text{ m}$, c) $h = 150 \text{ m}$ için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.	53
4.7. a) $c_1 = 1400 \text{ m/sn}$, b) $c_1 = 1500 \text{ m/sn}$, c) MUNK değişken ses hızı profili için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.	54
4.8. a) $z_0 = 25 \text{ m}$, b) $z_0 = 50 \text{ m}$, c) $z_0 = 75 \text{ m}$ için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.	55
4.9. a) $\alpha = 0.0001 \text{ dB/m}$, b) $\alpha = 0.005 \text{ dB/m}$, c) $\alpha = 0.01 \text{ dB/m}$ için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.	56

1. KONU ve ÖNEMİ

Su altı akustik dalga yayılımı askeri uygulamalar bakımından önemli bir problem olup, üzerinde yoğun araştırmalar yapılmıştır. Bu problemi kritik kılan en önemli unsur özellikle deniz savaşları bakımından geliştirilecek taktik algoritmaları ve senaryolar üzerindeki direkt etkisidir. Söz konusu algoritmaların ve senaryoların uygulanması temelde sonar sistemi üzerinden gerçekleştirildiğinden, ilgili deniz ortamının sonar sistemi üzerine etkisi iyi analiz edilerek, önceden öngörülmeyle çalışılmamıştır. Bu durum sonar sistem performansının doğru yorumlanması ile etkin taktik algoritmaları ve senaryolarının önerilmesi bakımından son derece büyük önem taşır. Su altı akustik dalga yayılımı probleminin çözümü ile ilgili su altı ortamının akustik dalgaları ne kadar zayıflatıldığının bir ölçüsü olan İletim Kaybı'nın (Transmission Loss, TL) hesaplanması sağlanacaktır.

Temelde su altı akustik problemi sığ sularda ve derin sularda olmak üzere ayrı ayrı incelenebilir. Derin sularda deniz yüzeyi ve deniz dibinin etkileri genellikle göz önüne alınmadığından, çözümün kısmen daha basite indirgenebileceği düşünülebilir. Sığ sularda ise deniz yüzeyi ve deniz dibinin akustik dalga yayılımına direkt etkisi hesaba katılmak zorunda olduğundan çözüm daha zorlaşmaktadır.

Sığ sulardaki başarılı bir denizaltı harbi, sensör ve silahların performansını doğrudan etkileyen çevre şartlarının iyi bilinmesi ve değerlendirilmesi ile mümkündür. Sığ sularda, deniz yüzeyi ve deniz dibi etkileşimi fazla olduğundan, istenmeyen ve karmaşık baskın yankılar (reverberation) oluşarak, birden fazla yansıma yolu olduğundan etkileri daha fazladır (yüksek yankılanma seviyesi). Bu etkiler su derinliği, ses hızı profili, deniz yüzeyinin pürüzlülüğü ve deniz dibinin yansıtıcı özelliklerine bağlıdır. Buna göre sığ sularda akustik enerjinin yayılım şartlarının iyi bilinerek, akustik enerjinin yayılımda izlediği yoldaki kayıpların doğru olarak belirlenmesi gerekmektedir. Temel bir problem olarak kanal boyunca ses hızının derinlikle değişmediği ve deniz yüzeyi ve dibinin tümü ile düz olduğu varsayılırsa, akustik dalgalar için yayılım yolları kanonik bir çözüm olarak hesaplanabilir. Temelde sığ sularda İletim Kaybı'nı etkileyen üç faktör

- Ses yayılımının silindirik özellikler taşıması,
- Deniz yüzeyinin düzensizliği,
- Deniz dibinin tipi ve düzensizliği

olarak verilir. Bahsedilen etkiler nedeni ile akustik enerji kaybı kısa mesafelerde bile önemli boyutlara ulaşabilir.

Su altı hedeflerinin akustik dalgalar ile tespit edilip sınıflandırarak yerlerinin belirlenmesini sağlayan sistemler SONAR (**SO**und **N**avigation **A**nd **R**anging) sistemleridir. Gönderme-alma şeklinde aktif ve/veya sadece dinleme şeklinde pasif olarak kullanılabilirler. Sonar performanslarının tahmin edilmesine matematiksel bir yaklaşım sağlamak üzere düzenlenmiş, ortam, hedef ve cihaz parametrelerini birbirine bağlayan ve tasarım açısından altyapı oluşturan denklemler, sonar denklemleridir. Bu denklemlerde ortamın etkisini gösteren terim İletim Kaybı'dır. Bundan dolayı İletim Kaybı'nın hesaplanması büyük önem taşımaktadır.

Su altı akustik problemi aktif ve pasif yayılım olarak iki ayrı sınıfta ele alınır. Bu kapsamda çoğunlukla pasif yayılım problemleri Normal Mod yöntemi ile incelenir. Buna göre sığ sularda pasif yayılım durumunda deniz yüzeyi ve deniz dibi etkilerinin hesaba katılması ile İletim Kaybı'nın hesaplanması ilgili ortamdaki sonar performansının öngörülebilmesi bakımından önemlidir. Bu durumu daha iyi anlayabilmek için sonar denklemi (aktif ve pasif aktarım için ayrı ayrı ele alınabilir)

$$S - N = DT \quad (1.1)$$

olmak üzere ele alınsın. Burada S (*Signal*) İşaret Seviyesi'ni, N (*Noise*) Gürültü Seviyesi'ni, DT (*Detection Threshold*) Tespit Eşiği'ni gösterir. Tespitin yapılabilmesi için İşaret/Gürültü oranı olarak ta bilinen $S - N$ (S/N dB) değerinin sıfırdan büyük olması gereklidir. İşaret seviyesi S , SL (*Source Level*) Kaynak Seviyesi'ni, TL (*Transmission Loss*) İletim Kaybı'nı gösterirken, $S = SL - TL$ şeklinde yazılır. Bu durumda sonar denklemi $SL - TL - N = DT$ olduğundan, İletim Kaybı'nın sonar tespit performansı açısından önemi daha açık

görülebilmektedir [Urlick, 1975]. Gerçekte İletim Kaybı $TL = TL(\vec{r}, t)$ olmak üzere konuma ve zamana bağlıdır. Problem uzayının sığ sularda silindirik koordinatlarda ve frekans (ω) uzayında incelendiği düşünülürse, İletim Kaybı $TL = TL(r, \phi, z, \omega)$ olarak ifade edilebileceğinden, konum ve frekansa bağlı hesaplanmalarının önem taşıdığı açıktır.

Gerçekçi bir İletim Kaybı analizinde deniz yüzeyi ve dibinin geometrik ve yapısal özelliklerinin de dikkate alınmasının gerekliliği açık olmakla beraber, getirdiği çözüm zorlukları nedeni ile, öncelikle daha basit durumların ele alınması ile sonuca gidilmeye çalışılması uygundur. Buna göre öncelikle deniz yüzeyi ve deniz dip yüzeyinin geometrik olarak düz olduğu varsayımı altında, yine geometrik olarak yatayda süreklilik de kabul edilerek, sadece dikeyde su ve sonsuza uzayan dip bölgesi olmak üzere iki farklı ortam için İletim Kaybı analizleri öngörülebilecektir. Bu tez çalışmasında ilgili problem özellikle deniz dip bölgesinin kayıplı ortam olarak ele alınması ile bir kat daha gerçeğe yakın hale gelmiştir. İki katmanlı bir modelde kayıplı dip katmanının, üzerinde bulunan su katmanındaki akustik dalga yayılımını nasıl etkilediğini anlayabilmek için, dip ile etkileşimin daha fazla olacağı sığ sular üzerinde çalışılmıştır. Bu kapsamda su altı akustik probleminin çözümü genelde

- Işın İzleme yöntemi,
- Parabolik Denklem yöntemi,
- Çok Yollu Açılım yöntemi,
- Hızlı Alan yöntemi,
- Normal Mod yöntemi

kullanılarak incelenmektedir. Su altı akustik probleminde yaygın olarak kullanılan Işın İzleme yöntemi yüksek frekanslarda doğru sonuçlar verdiğinden, düşük frekanslarda mevcut hatalar ve uzak mesafe sığ su problemlerinde karmaşık ışın yollarından dolayı ışın hesaplamaları kullanışlı değildir. Bu nedenle bu çalışmada tam çözüm elde edilmek üzere Normal Mod yöntemi kullanılacaktır.

Bu sınıflandırma diğer bir bakış açısı ile menzil-bağımlı ve menzil-bağımsız

şeklinde de yapılabilir. Menzil-bağımsızlık, yatay katmanlara sahip bir deniz modeli için, denizin yapısal özelliklerinin yalnızca derinlikle değiştiği kabulüne, menzil-bağımlılık ise bahsedilenlerle birlikte denizin yapısal özelliklerinin menzile bağlı olarak ta değiştiği kabulüne dayanır. Menzil-bağımlı durumda yapısal özelliklerdeki değişimler öncelikle ses hızı ve derinlik verilerine göre daha sonra deniz durumu, soğrulma, deniz dibi yapısı gibi verilere göre yorumlanır. Ayrıca sadece menzil ve derinlik değişimi varsayımı ile çözümler iki boyutlu olarak; menzil, derinlik ve azimut değişimleri altında üç boyutlu olarak yorumlanabilir.

Matematiksel modeller hacimsel etkiler bakımından da sınıflandırılırlar. Hacimsel etkiler, soğrulma, suyun bulanıklılığı, baloncuklar gibi etkenler olduğu için fiziksel modellerin de en önemli gereksinimleridir. Bütün fiziksel ve matematiksel modeller uygulamada çalışma frekans bandı ve problem geometrisi gibi etkin uygulanabilirlik alanlarına sahip olacak şekilde limitlere sahiptirler. Bazen matematiksel modeller için pratik uygulamalar bakımından mevcut limitler aşılabilmektedir. Bu durumda matematiksel ve fiziksel sonuçlar örtüşmemektedir. Bu nedenle matematiksel modellerin uygulanabilirlik alanlarının limitlerinin tüm detayları ile belirlenmesi gerekmektedir.

2. TEZİN AMACI ve İÇERİĞİ

Tezin amacı deniz savaşları bakımından büyük önem taşıyan sonar performanslarının tahmin edilebilmesi amacı ile deniz dibi kayıplı olarak (Sıvı-Katı problemi) iki katmanlı biçimde modellenmiş su altı akustik ortamında İletim Kaybı'nın hesaplanarak, analiz edilebilmesidir. İncelenecek su altı akustik ortamında su yüzeyi geçirgen olmayan *Dirichlet (Pressure Release)* türü Sınır Koşulu ile modellenmiştir. Su bölgesi ile dip bölgesi arayüzünde Süreklilik Koşulları (*Continuity Conditions*) uygulanacaktır. Ele alınacak su altı akustik problemi özel olarak pasif aktarım durumunda (genelde düşük frekanslarda) inceleneceğinden, çözüm yöntemi olarak Normal Mod yöntemi uygulanacaktır.

Mevcut çalışmalar bakımından tez Kornhauser ve Raney tarafından yapılmış çalışma üzerine kuruludur. Bu kapsamda tezin temel katkısı Kornhauser ve Raney'in Sıvı-Katı problem için dispersiyon bağıntısını incelemiş olmaları ile birlikte, bu çalışmalarını temel alan herhangi bir İletim Kaybı incelemesi yapmamış olmalarından ileri gelmektedir [Kornhauser and Raney, 1955]. Buna göre Kornhauser ve Raney'in çalışması temel alınarak üçüncü bölümde Sıvı-Sıvı ve Sıvı-Katı çözümleri yapılarak değişik durumlar için sadece İletim Kaybı hesaplanmış, dördüncü bölümde, hesaplanan sonuçlarının doğruluğu bir diğer çözüm aracı olan KRAKEN/KRAKENC [Porter, 1992] program sonuçları ile karşılaştırılarak, beşinci bölümde sonuçlar değerlendirilmiştir. Özel olarak Sıvı-Katı probleminin sadece ayrık modlar kapsamında ve düşük dip kayıpları durumunda ele alındığı da unutulmamalıdır.

Tezin içeriğinin daha iyi anlaşılması bakımından öncelikle Sıvı-Sıvı ve Sıvı-Katı su altı akustik problemlerinin çözümüne yönelik çalışmaların *tarihsel gelişimi* ve daha sonra çözüm için izlenecek *teorik yol* aşağıda verilmiştir.

2.1. Problemin Tarihsel Gelişimi

Bu bölümde Sıvı-Sıvı ve Sıvı-Katı problemlerinin tarihsel gelişimleri ayrı ayrı incelenecektir.

• Sıvı – Sıvı Problemi

Sıvı yarı uzay üzerindeki homojen, sabit hızlı Sıvı-Sıvı sığ su kanalındaki akustik alan için dalga denkleminin Normal Mod yöntemi ile çözümü ilk olarak Pekeris tarafından verilmiştir [Pekeris, 1948]. Bu çalışmada Pekeris akustik hız potansiyelini kaynak ve alıcının yatayda dağılımına bağlı olarak vermiştir. Buna göre kaynak civarı haricinde çözüm, silindirik dağılımlı ($1/\sqrt{r}$ zayıflamalı) modlar şeklindedir. Bunlar aşağı ve yukarı giden, yüzey ve dipteki süreksizlikler nedeniyle yansıma yapan kılavuzlanan (tuzaklanan veya sönümsüz (undamped)) modlardır. Kılavuzlanan dalga modların yayılımı uzak alanda da baskın olacaktır [Tolstoy, 1955].

Sıvı-Sıvı katman durumundaki (Pekeris dalga kılavuzu) akustik alan çözümleri, iki bölgenin dalga sayılarının kontur integralleri temeline dayandırılmıştır. Her iki bölgede alanlar ayırık modların ve kesim çizgisi (Pekeris kesim çizgisi) integrali katkısının toplamı olarak yazılabilir. Pekeris dispersiyon denklemi bu integrallerden ortaya çıkmaktadır. Dispersiyon denkleminin çözümü, dipte sonsuz derinlikte ışıma koşulunu (radiation condition) sağlayarak yakınsak (uygun) modları verir. Sonsuz derinlikte ışıma koşulunu sağlamayan ve ıraksak (uygun olmayan) modlar olarak bilinen modlar fiziksel değildir. ıraksak modlar Stickler tarafından araştırılmıştır. Stickler bu çalışmasında Pekeris'in çözümünü tarif ederken çözümün üç bileşenden oluştuğunu belirtmiştir: dipte derinlikle üstel olarak zayıflayan uygun modlar toplamı, dipte derinlikle üstel olarak büyüyen uygun olmayan modlar toplamı ve dikey kesim çizgisi çevresindeki kontur integrali katkısıdır. Pekeris çözümü, kesim çizgisinin fiziksel yorumu hakkında belirsizdir. Işıma koşulu kompleks düzlemde kontur integrali üzerinden değerlendirileceği zaman, kısaca EJP (Ewing-Jardetzky-Press) olarak bilinen hiperbolik kesim çizgisinin seçilmesi gerektiğini söyler [Ewing et al, 1957]. Stickler, EJP kesim çizgisini esas alan bir çözümü de Pekeris çözümüne alternatif olarak sunmuştur. Burada çözüm iki bileşen içerir; sonlu sayıda Normal Mod (Pekeris'in uygun modları gibi) toplamı ve EJP kesim çizgisi integralidir. Mod toplamı ve integral, dip derinliği sonsuza giderken asimptotik olarak sıfıra yaklaştığından çözümün davranışı iyidir [Stickler, 1975].

Derin okyanuslar için yapılan bir çalışmada ise düşük frekans yayılımının teorik analizleri, kritik derinlikler kullanılarak yapılmıştır. Dip katmanı için derinlik üzerine bir kriter aranmış ve bu derinlik altındaki kritik derinlikler için çözümün ihmal edilirliliğinin etkilendiği kabul edilmiştir. Burada Normal Mod çözümleri, iki ayrı dip model örneği için kritik derinlikler kullanılarak hesaplanmıştır. Bu örneklerde su katmanı sabit ses hızına sahip, dip katmanı sıvı, su ve dip katman yoğunlukları sabittir. Birinci örnek dipteki ses hızının su katmanındaki ses hızından daha büyük ve sabit olduğu standart Pekeris durumu, ikincisi ise derinlikle artan ses hızına sahip dip modeli durumudur. Burada su–dip arayüzünün belirli bir miktar altına basınçtan arındırılmış yansıtıcı yüzey katmanının koyulması veya çıkarılması durumunda, mod özfonksiyonunun dönüş noktasının altında, kabul edilebilir bazı hatalar için kritik derinlikler akustik dalga boyuna bağlı olarak hesaplanmıştır [Williams, 1976].

Diğer bir çalışmada uzaktaki bir deniz aracından, çoğunlukla baskın düşük frekanslı bir gürültünün nasıl yayılacağını araştırmak için, dalga denklemi kullanılarak basınç ve ortamın her bir noktasındaki akustik enerji genliği hesaplanmıştır. İlk olarak geminin gürültü spektrumunu elde etmek için yapılan test sonuçları sunulmuş, daha sonra ölçümlerle elde edilen birkaç gerçek hız ve yoğunluk profili için kıyı bölgesinde akustik dalga yayılımında Normal Mod yöntemi kullanılmıştır. Sonuçların hassasiyeti için hesaplamalar 15 moda kadar değerlendirilmiş ve değişken ses hızı profili için yapılan hesaplamalarla karşılaştırılmıştır. Geliştirilen çözümün en büyük avantajı, dibin farklı ses hızlı ve yoğunluklu bir katman gibi düşünüldüğü çoğu gerçek durum için uygulanabilir olması ve özellikle çamur dipli kıyı kesimleri için makul sonuçlar vermesidir. Yapılan deneylere göre alıcıdan yeterince uzak mesafedeki gemiler noktasal kaynak gibi düşünülebilir. Hesaplamalarda yayılım hızı ve ortam yoğunluğu önemli parametrelerdir. İlk hesaplamalar kıyı bölgesindeki gerçek ses hızı ve yoğunluk profili için yapılmış ve üst katmanın su, alt katmanın ise çamur olduğu düşünülmüştür. Hesaplamalarda, çoğu durumlarda dip katmanının farklı ses hızı ve yoğunluk profiline sahip bir sıvı gibi davrandığı yaklaşımı kullanılmıştır. Sonuç olarak çözümün düşük frekanslarda etkili olduğu gözlenmiştir [Kalantar-Zadeh and Kamarai, 1997].

Sığ sularda akustik alan hesaplamalarında kullanılan bir diğer yöntem, üst sınır yansıma katsayısını hesaplamak için geliştirilmiş Işın Yer Değiştirmesi ve Mod Hibrit (Beam Displacement Ray-Mode, BDRM) yöntemidir. BDRM sığ sularda yatayda katmanlanmış modeldeki yayılım için uygulanan bir Normal Mod yöntemi olup, avantajları sadece hızlı ve doğru olması değil, aynı zamanda sınır etkilerinin sınır yansıma katsayısı ile eşdeğer olarak hesaba dâhil edilmiş olmasıdır. BDRM yönteminin temeli, üst sınır yansıma katsayısının hesaplanmasıdır. Burada BDRM yöntemi derin okyanus durumu için geliştirilmiştir. SOFAR (Sound Fixing And Ranging) kanalı ve iki eksenli su altı kanalı derin okyanusların iki tipik yapısıdır. SOFAR [Brekhovskikh and Yu, 2003] akustik alanı WKBZ (Wentzel-Kramers-Brillouin, Zhang) Mod yaklaşımı ile doğru bir şekilde tahmin edilmiştir. Fakat yüzey kanalı ve SOFAR kanalı arasındaki etkileşimden dolayı iki eksenli su altı kanalı karmaşıktır. İki eksenli kanalda yatay dalga sayısının dağılımına göre modlar iki türdür. Birincisi üst sınırın altından dönen modlar, ikincisi üst sınırdan yansıyan modlardır. Bu durumda faz kayması fonksiyonu üst sınırdaki özfonksiyon sürekliliği kullanılarak elde edilmiştir. Burada üst sınır yansıma katsayısı WKBZ özfonksiyonu ile önerilmiş, iki eksenli su altı kanalındaki akustik alan hesaplamalarına uygulanarak problem çözülmüştür. Böylece İletim Kaybı hesaplanarak KRAKEN programı ile karşılaştırılmış ve iyi bir uyum görülmüştür. Ayrıca BDRM yönteminin işlem hızının diğer yöntemlerden üstün olduğu bulunmuştur [Zhang et al, 2006].

Üç katmanlı Pekeris dalga kılavuzunda hareketli kaynaktan yayılan ses alanı çalışmasında, üç katman atmosfer, sığ su katmanı ve sediment katmanı olup sabit hızlı kaynak atmosferde yatay olarak hareket etmektedir. Katmanlar homojen ve düzenli ses hızı profiline sahip varsayılmıştır. İlk olarak iki boyutta, hareket yönüne dik doğrultudaki çizgisel bir kaynak için, herbir katmandaki çözümü veren tek dalga sayısı integrali kullanılmıştır. Üç katmanlı ortamda hareketli kaynak için türetilen dispersiyon denkleminde herbir katmandaki alanda, kaynağın hareketinden kaynaklanan baş ve kık asimetrisinin varlığı görülmüştür. Karmaşık Doppler etkileri su katmanında, kanalın etkin derinliğini ve dolayısıyla mod şekillerini asimetric olarak değiştirmektedir. Elde edilen tam ve mutlak dispersiyon denklemi, kaynak hareketinin bütün etkilerini, deniz dibinin geçirgenliğini ve deniz yüzeyinde Sıvı-Sıvı sınır koşulunu açıklar. Dispersiyon denklemi, kaynak hareketi sebebiyle meydana

gelen karışık Doppler kaymalarının, büyük baş-kıç asimetrisine neden olduğunu gösterir. Alanın çeşitli asimetrik özellikleri iki boyutlu dispersiyon denklemi temelinde, kanalın etkin derinliği, Normal Modların şekilleri, mod sayısı ve modal zayıflama kapsamında araştırılmıştır. İkinci olarak hareketli noktasal kaynak için her bir katmanda üç boyutlu çözümü veren, çift dalga sayısı integrali kullanılmıştır. Böylece Doppler etkileri dahil edilmiş üç boyutlu dispersiyon denkleminde, her bir katman için çözüm elde edilmiştir. Su katmanında ve özellikle dipte, hareketli kaynağın önünde ve arkasındaki Doppler karmaşıklıklarının, sedimentin jeoakustik değerlerine bağlı, dip sınır koşullarını içeren faktörlere bağlı olduğu gözlemlenmiştir [Buckingham and Giddens, 2006].

• Sıvı – Katı Problemi

Sıvı-Katı problemi ilk olarak Kornhauser ve Raney tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada hem sudaki hem de dipteki yatay ve dikey dalga sayılarının kompleks sayı olduğu dip kayıplı durum için dispersiyon denklemi elde edilmiştir. Bu kapsamda kayıpsız özdeğer denkleminin gerçek değerli çözümleri hakkında dikey dalga sayısının sanal kısmı ile perturbasyon analizi yaparak dipteki kayıp etkilerini araştırmışlardır. Boylamsal dalga zayıflaması analizini, dipteki ses hızını kompleks yaparak modellemiş, yatay dalga sayısının sanal kısmının, dipteki dalga sayısının sanal kısmı ile orantılı olduğunu bulmuşlardır. Bu ilişki, mod sayısı ve boyutsuz bir değişkene bağlı boyutsuz bir fonksiyon ile ifade edilmiştir [Kornhauser and Raney, 1955]. Dip kayıplarının çok küçük olduğu varsayımı altında elde edilen dispersiyon denklemi transandantal bir denklem olup kompleks köklerinin analitik olarak bulunması güçtür. Bundan dolayı köklerin bulunması için sayısal (numerical) yöntemlerin kullanılması gerekmektedir.

Viskoelastik katı dip üzerinde iki sabit hızlı katmandaki akustik alan denklemleri, dip kanalı etkilerinin denkleme tek yansıma katsayısı olarak dahil edilerek kaynaktan alıcıya doğru yayılan düzlemsel dalgaların toplamı şeklinde, dip ve yüzey yansımaları aracılığıyla yazılmıştır [Brekhovskikh, 1960]. Burada mod zayıflama sabitleri iteratif yöntemlerle kesin olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan yayılım kaybı değerleri ile deneysel değerler arasında makul bir uyum gözlemlenmiştir.

Düşük frekanslarda ışın çözümünün doğasında olan hatalardan ve karmaşık ışın yollarından dolayı, uzak mesafe sığ su problemlerinde ışın hesaplamaları kullanışlı değildir. Bu sebeple Normal Mod yöntemi kullanılmıştır. Dispersiyon denklemi, ikinci katmanda yukarı ve aşağı giden dalgaların yansımaya katsayıları ve kompleks dalga sayısı kullanılarak yazılmıştır. İkinci katman için hesaplanan yansımaya katsayıları dispersiyon denkleminde kullanılarak, akustik alanının baskın kısmı modların toplamı şeklinde yazılmış, alıcı konumu değiştirildiğindeki ifade elde edilmiştir. Dispersiyon denklemi, sadece bir dalga sayısı seti için sağlanır. Buradaki dalga sayısı komplekstir. Dalga sayısını bulmak için öncelikle dispersiyon denklemi polar formda yazılmış, sağ ve sol yanların argüman ve modülleri eşitlenmiştir. Argümanların eşitliği, sıvı veya elastik katı dip için dispersiyon denklemdir, çünkü bu durumda ikinci katmanda yukarı ve aşağı giden dalgaların yansımaya katsayılarının bir olduğu ve dalga sayılarının gerçek olduğu modlar dikkate alınır. Modül denkleminin kökleri Newton metodu ve sonlu farklar kullanılarak çözülmüştür. Kanal dibi, gelen akustik enerjinin bir kısmını emdiğinden dolayı bütün modlarda mesafe ile üstel bir azalma gözlenmiş ve uzak alan yayılımlarında çok büyük zayıflamalara sebep olacağı ifade edilmiştir. Buradaki hesaplama metodunda her bir mod için dispersiyon denkleminin iteratif çözümleri ile zayıflama faktörü doğru bir şekilde elde edilmiş, yapılan deneysel ölçümlerde ve hesaplamalarda, yayılım kaybı değerleri arasında iyi bir uyum gözlenmiştir [Bucker and Morris, 1965].

Sınır koşulları ve sınır kayıpları düzlem dalga yansımaya katsayılarıyla ilişkilendirilmiş kanal için, akustik alanının Normal Mod çözümü elde edilmiştir. Dip yansımaya katsayısı, çok katmanlı viskoelastik dip modelinden hesaplanmıştır. Ses hızı profilinin sadece derinlikle değiştiği varsayılmış, deneyler sırasında sıcaklık ölçer ile elde edilen ses-hızı profili, üç katman için lineer değişimli profil kullanımının uygun olacağını göstermiştir. Bundan dolayı denklemlerin kullanımını göstermek için hesaplamalar, üç katmanlı lineer değişimli sığ su modelinde yapılmıştır. Teorinin kullanımını göstermek için, sığ sulardaki test sırasında elde edilen yayılım kayıplarının deneysel değerleri ile hesaplanan değerler arasında bir karşılaştırma yapılmış, yüzey kaybı 0 dB ve 1 dB kullanılarak uyuma gözlenmiştir [Bucker, 1970].

Su ve dip katmandaki akustik alan için WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) çözümleri ile ışın ve modları birbirine bağlayan bazı teorik sonuçlar verilmiştir. Aşağıdaki sonuçlar yeni değildir fakat kayıplı dipten yansıma durumuna genişletilmiştir.

- Yansımada ışın devir mesafesi, ışın yer değiştirmesini içeriyorsa mod ve ışın devir mesafeleri eşittir.
- Devir mesafesi, Normal Mod normalizasyonu ile ilişkilidir.
- Bir periyottaki mod zayıflaması eşdeğer ışının dipten yaptığı yansımadaki dip kaybına eşittir.
- Dip ile ilgili bilgi olmaksızın, düzlem dalga yansıma katsayısından su için tam normal mod çözümü elde edilebilir.
- Dip için WKB çözümü geometrik ışın yolları müdahalesi varsayılarak yapılan hesaplama eşdeğerdir.

Işın ve mod karşılaştırması, iki yaklaşımda iki farklı fiziksel model kullanıldığından dolayı yapılır. Işın çözümü, ışının enerjisini dipten yaptığı her yansımada bir kısmını kaybettiğini varsayarken Normal Mod çözümü, yatay yayılımda dipteki enerji kaybından dolayı sürekli bir zayıflamanın olduğunu söyler. Işın tam davranışı homojen olmayan düzlemsel dalgalar kullanılarak gösterilir. Homojen olmayan düzlemsel dalgaların normal modlardaki gibi yatayda sürekli zayıfladığı bulunmuştur. Yine Pekeris modelinde, ışının yatayda yer değiştirme mesafesi, dipten yansımadaki ışın yer değiştirmesini de içerecek şekilde değiştirildiğinde, ışın davranışı düzlemsel dalgalarla modellenir. Bu durumda ışının zayıflama oranı modun zayıflamasına eşit olacaktır [Weston and Tindle, 1979].

Gerçek okyanus dibi için ışın ve mod davranışları karşılaştırıldığında zayıflamanın, ışının geliş açısı ve mod sayısı ile karmaşık bir davranış gösterdiği görülmüştür. Sayısal karşılaştırma yapılmış ve mod devir mesafesindeki mod zayıflamasının eşdeğer ışının dipten sekmesindeki dip kaybı değerine sayısal olarak eşit olduğu bulunmuştur [Tindle, 1979]. Bu çalışmada ışın ve modların zayıflama davranışları analitik olarak incelenmiş ve böylece karşılaştırma tamamlanmıştır. Bu

modelin önemli bir özelliği, Normal Mod çözümünde, modların dip katmanda salınım yapmasına benzer şekilde, farklı derinliklerden yansıyan ışınlar arasındaki girişime izin vermesidir. Çoklu sediment katmanının veya enlemsel daldalgaların varlığının kabul edilmesi akustik alanın temel özelliklerini değiştirmeyecektir. Burada analitik yaklaşımlar WKB yaklaşımına dayandırılmış, devir mesafeleri, normalizasyon ve zayıflama ifadeleri WKB yaklaşımından bağımsız olarak test edilmiştir. İfadeler kritik açı civarındaki geliş açıları haricinde doğru olarak bulunmuştur.

Normal Mod yönteminde özellikle zaman bağımlı sinyaller kullanılırsa hesaplamalar daha güçleşmektedir. Fakat ışın yolu hesaplamaları hızlıdır ve zaman bağımlılığı etkilerini kolaylıkla içerebilir [Tindle and Weston, 1980].

Ellis ve Chapman enlemsel dalgaların yayılmasına dayalı elastik dip için yayılım kayıplarını araştırmışlardır. Normal Mod yöntemi çözümü, çoğunlukla dipteki enlemsel dalga hızının, sudaki ses hızından ya çok büyük ya da çok küçük olmasına dayandırılmaktadır. Ancak dipteki enlemsel dalga hızının sudaki ses hızıyla kıyaslanabildiği durumda özdeğer ve özfonksiyonlar, kompleks olan sızıntılı modlara neden olur. Dipteki enlemsel dalga hızı sudaki ses hızından küçük ise yalnız bir gerçek mod (mod 0) veya arayüz dalgası ile birlikte kompleks özdeğerli sızıntılı modlar vardır. Sabit derinlikli sabit ses hızı ve yoğunluğa sahip sıvı katmanı ve enlemsel dalgaları destekleyen yarı sonsuz elastik dip katmanında zayıflamalar, ses hızına veya dalga sayısına küçük sanal kısımlar verilerek hesaba katılmış ve bu model için enlemsel dalga etkisi içeren Normal Mod çözümü bulunmuştur. Yüzeyde Dirichlet Sınır Koşulu, dip katmanda ışıma koşulu ve arayüzde süreklilik koşulları kullanılarak yatay dalga sayısı için dispersiyon denklemi elde edilmiştir. Katı dip durumunda büyüklükler kompleks sayı olarak ele alınmış, katsayıları bulmak için gereken normalizasyon eşitliği, sudaki Green fonksiyonu ve arayüzdeki yansıma katsayısı kullanılarak hesaplanmıştır. Normalizasyonda kompleks eşlenik yerine, tam kare ifadesinin kullanılmış olması katsayıların kompleks sayı olmasına neden olmuştur. Yatay dalga sayıları dispersiyon denkleminde hesaplanmış, katsayılar normalizasyon denklemi ile bulunmuş ve böylece tam çözüm elde edilmiştir. Çözümünden menzile göre yayılım kayıpları hesaplanmış, frekansa göre işaretlenmiş

ve ölçüm değerleri ile karşılaştırılmıştır. Burada göze çarpan, düşük frekanslarda yayılım kaybının yüksek olduğu ve uzak mesafelerde daha dikkate değer bir hale geldiğidir. İki katmanlı bu modelde düşük frekanslardaki yüksek kayıpların nedeni, dip katmanın enlemsel dalga yayılımını desteklemesidir. Düşük frekanslardaki kayıpların olduğundan daha büyük tahmin edilmesinin derinlerdeki yansıtıcı yüzeyden kaynaklandığı düşünülmüştür, çünkü frekans azaldığında daha çok enerji su katmanına dönecek ve kayıp azalacaktır. Burada önemli bir sonuç, belirlenen jeoakustik girdilerden bağımsız modelin de 300 Hz'in altındaki frekanslarda aynı yayılım kaybı artışını göstermiş olmasıdır [Ellis and Chapman, 1985].

Tindle ve Zhang sürekli modların akustik alana katkısını araştırmış ve kesim çizgisi integralleri ile ortaya çıktığını ifade etmişlerdir. EJP kesim çizgisinde dipteki dalga sayısı gerçektir ve kesim çizgisi integrali sanal modlar ile rezonans halleder. Pekeris kesim çizgisinde kompleks kutuplarda rezidüler vardır ve su katmanındaki alan için kutup kesim noktası civarında olmadıkça, integral ihmal edilebilmektedir. Kompleks kutuplardaki rezidüler sızıntılı modlara neden olur. Adyabetik yaklaşım ve yaklaşık bir normalizasyon ile sızıntılı modlar, modlar kesimden geçerken sudaki akustik alanın uygun ve düzgün olarak tarif edilmesini sağlar. Çoğu durumda akustik alan sadece ayırık modların toplamı ile ifade edilebilir ve mesafe ile hızlı zayıfladığından sürekli modların katkısı yok sayılabilir (uzak alan yayılımı). Ancak kısa mesafelerde ve derinliği değişen sığ su kanalında, sürekli modlar ihmal edilemezler. Derinlik mesafe ile azalırken ise yüksek dereceli modlar sıra ile kesime gidecek ve enerjileri süreklilik oluşturacaktır. Bir modun ışın gibi dibe geçerken enerjisi kaybettiği gösterilse de enerji dipte yavaşça sızıntı halindedir ve kesim mesafesinin biraz ötesi için akustik alanı etkileyebilirler. Sürekli mod integralini basit durumlarda değerlendirmek güçtür. Burada sürekli modların katkısını değerlendirmek için iki farklı yol gösterilmiş, özel olarak sürekli mod integralinden farklı şekillerde elde edilen sanal modlar ve sızıntılı modlar incelenmiştir. Modların kesimden geçerken tuzaklanan modlardan sızıntılı modlara değişiminin, sızıntılı modlarla uygun bir tarif sağladığı gösterilmiştir, geçiş süreklidir ve geçişin olduğu mutlak nokta tarifi esas konusudur. Normal Mod çözümlerinde dipteki dalga sayısı kompleks kabul edilip, yatay dalga sayısı için özdeğer denklemi elde edilerek, suda

tuzaklanan modlardan kaynaklanan akustik alan ve dipteki akustik alan normalizasyon ışığında uzak alanda çözülmüştür.

Su derinliği yavaş değişirken adyabetik yaklaşım herbir mod fonksiyonunun modlar arasında enerji iletimi olmadan kendi su derinliklerini ayarlamasını varsayar. Buna göre modlar su derinliklerini ayarlarken mod özdeğerleri sürekli değişirler. Kutuplar yer değiştirirken su derinliği azaldığında herbir mod tuzaklanan moddan sızıntılı moda dönüşür. Bu noktada normalizasyon problemi ortaya çıkar. Mod kendi kesim derinliğine yaklaşırken tuzaklanan mod genliği çok küçük olur. Kutup kesim noktasına çok yakın olduğunda ise Pekeris kesim çizgisi integrali ihmal edilemez. Pekeris kesim çizgisi integralini hesaplamak yerine, iki etkiyi birleştiren ve kesim noktası civarında modun genliğini doğru olarak veren yaklaşık bir normalizasyon kullanmak daha kolay olacaktır. Burada etkin derinlik kullanılarak yaklaşık bir normalizasyon verilmiştir. Etkin derinlik kavramı ilk olarak Weston tarafından tanımlanmış olup, su-dip arayüzünün belirli bir derinlik ötesine basınçtan arındırılmış (pressure-release) bir yüzeyin yerleştirilmesini esas alır [Weston, 1960]. Burada etkin derinlik düzlem dalga yansıma katsayısı ile ilişkilidir ve yansıma katsayısı yatay dalga sayısının bir fonksiyonudur.

Sanal mod kavramı EJP kesim çizgisi integralinin analitik hesaplanmasını anlamlı hale getirir. Sanal modlar EJP integralini rezonans yapısının bir sonucudur. Rezonanstan uzak bölgelerde integral değişkeni hızlı salınım göstereceğinden integral ihmal edilebilir. Artan mesafe ve derinlikle analitik hesaplama geliştirilebilmektedir. Sonuç olarak sığ sularda sürekli modların katkısı, ya EJP kesim çizgisi integrali ya da genelde ihmal edilen Pekeris kesim çizgisi integrali ile ilişkili sızıntılı modların rezidüleri ile bulunabilir. Kutup kesim noktası civarında iken, tuzaklanan modlar yok iken ve dipteki alan için Pekeris kesim çizgisi integrali ihmal edilemez [Tindle and Zhang, 1993].

Deniz dibindeki boylamsal dalga zayıflaması ses hızının kompleks kabul edilmesiyle yapılır. Kayıplı ortamda boylamsal dalga zayıflaması ile ilgili iki farklı mekanizmadan söz edilmiştir. İç gevşeme ve iç sürtünme, homojen sınırsız ortamda ses hızları kompleks benimsenerek modellenenir. Gerçekte katmanlı durumda

kompleks ses hızı, lineerleştirilmiş hareket denklemini değiştiren iç sürtünme kayıpları gibi kayıplar için doğru sonuçlar vermeyecektir. Sınırların olduğu durumda, iç sürtünme kompleks ses hızı ile birlikte kompleks yoğunluk kabul edilerek modellenmesi gerekmektedir. Bu durumda yalnızca kompleks ses hızını kullanan yayılım modelleri, dip kayıplarının sadece iç gevşemeden kaynaklandığını kabul eder. Burada kayıplı Pekeris dalga kılavuzunda, alt sıvı katmanındaki kaybın iç sürtünmeden kaynaklandığı yayılım için çözüm geliştirilmiştir. İç gevşeme kayıpsız durum denklemi ile modellenirken, iç sürtünme hareket denklemi ile modellenir. İç gevşeme ve iç sürtünme arasındaki farklılık Sıvı-Katı dalga kılavuzundaki yayılım örneğidir. Bu çalışmada alt katmandaki boylamsal dalga yayılım kaybına iç sürtünmenin neden olduğu varsayılarak problem tekrar ele alınmıştır. İç gevşeme ve iç sürtünme kaybı eşitlikleri elde edilerek, kayıplı durum için akustik dalga denklemi çıkarılmıştır. Düzlem dalga yansıma katsayısını bulmak için arayüzdeki sınır koşulları verilmiş, kompleks dalga sayıları hız potansiyelleri ile probleme dahil edilmiştir. Gelen, yansıyan ve iletilen hız potansiyellerini ifade etmek için yüzeydeki sınır koşulu ve bazı işlemler kullanılmış, arayüzdeki yansıyan ve gelen hız potansiyelleri arasındaki oran verilmiştir. İkinci ortamdaki yoğunluk ve ses hızı kompleks olarak kabul edilmiştir. Dipteki dalga sayısının sanal bileşeni çok küçük iken yansıma katsayısı, sanal bileşen civarında Taylor serisine açılarak kayıp etkilerini göstermek için bir yaklaşım tanımlanmıştır. Yansıma katsayısı, ses hızının kompleks olduğu durum ve ses hızı ve yoğunluğun ikisinin birden kompleks olduğu durum için hesaplanmış ve geliş açısına göre işaretlenmiştir. Menzil bağımsız dalga kılavuzunda mod özdeğerleri için düzlem dalga yansıma katsayıları kullanılarak transandantal denklem elde edilmiştir [Brekhovskikh and Lysanov, 1982]. Bu denklemin Kornhauser ve Raney denkleminin farkı, gerçek yoğunluklar yerine kompleks yoğunlukların kullanılmış olmasıdır. Bu fark, Sıvı-Sıvı arayüzündeki sınır koşulunu sağlayan hareket denkleminin iç sürtünme kayıplarını da içermesinin sonucudur.

Sıgı sulardaki İletim Kaybı hesaplanırken, kompleks ses hızı etkisi ile orantılı olan kompleks yoğunluk etkisi yayılan modların kaybını arttırmıştır. Bütün kayıpların iç sürtünmeden kaynaklandığı varsayılırsa, düşük dereceli modların

kayıplarının % 50 artacağı ve kompleks yoğunluk ihmal edildiğinde birkaç dB genlik hatası oluşacağı gözlenmiştir [Grant, 1997].

Buckingham ve Giddens dip kayıplı durum için, dalga denklemini uzaysal Fourier dönüşümü kullanarak çözmüşlerdir. Burada EJP kesimi çevrim integraline dayandırılmış, sonlu sayıda uygun mod toplamı ve kesim çizgisi integrali olarak ifade edilmiştir. Daha sık kullanılan silindirik koordinatlar yerine Kartezyen koordinatlar kullanılarak, çözümün karmaşıklığı kısmen giderilmiş, alanın menzil bağımlılığı Hankel fonksiyonu yerine üstel bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır. Su katmanı ve dipteki dalga denklemleri için Fourier dönüşümleri kullanılarak, zaman bağımlılığı ortadan kaldırılmış, bir dönüşüm sabiti ile dikey dalga sayısı için tekrar Fourier ve ters Fourier dönüşümleri yapılmış, sınır ve süreklilik koşulları ışığında, Pekeris dalga kılavuzundaki yatay çizgisel kaynaktan yayılan iki boyutlu alan için kesin çözümü bulunmuştur. Çözüm, Pekeris tarafından noktasal kaynaktan yayılan üç boyutlu alan için Hankel çözümü ile benzerdir. Kompleks özdeğerler, elde edilen transandantal denklemin köklerinin sayısal çözümü ile bulunmuştur. Ayrıca transandantal dispersiyon denkleminde, kayıplı dalga kılavuzunun toplam uygun mod sayısı için dipteki ve su katmanındaki kompleks mod şekil fonksiyonu ve mod zayıflama katsayıları için yeni analitik yaklaşımlar geliştirilmiştir. Dipte kayıp varken dalga kılavuzu tarafından desteklenen mod sayısı, kayıpsız durumdakinden daha fazladır. Mod zayıflaması, mod sayısının karesi ve frekansın karesinin tersi ile artar. Bundan dolayı sabit frekansta yüksek dereceli modlar kısa mesafelerde alandan uzaklaştırılırlar. Bu olay mod ayrılması olarak bilinir. Diğer taraftan frekans arttığında azalan zayıflama ile uzak mesafelere yayılım yapılır. Uygun modlar, tuzaklanan modları ve yalnızca dipteki zayıflamanın bir sonucu olan dağılan modları kapsar. Dağılan mod terimi, iyi bilinen tuzaklanan modlar ile karıştırmamak için kullanılmıştır. Bütün modların şekil fonksiyonları komplekstir, tuzaklanan modların sanal kısımları ihmal edilebilecek kadar küçüktür, ancak dağılan modların reel ve sanal kısımları birbirleriyle kıyaslanabilmektedirler. Uygun modlar ve her biri yakınsak olduğundan, su katmanı ve dip yarı uzayda karesel olarak integre edilirler. Uygun olmayan modlar dipte üstel olarak ıraksayacağından çözüme katkıda bulunmazlar. Burada EJP kesim çizgisi integrali yanal dalgaları, dipteki ve su katmanındaki sürekli alanı gösterir [Buckingham and Giddens, 2006].

Carey ve arkadaşlarının yaptığı çalışmada sığ su İletim Kaybı ölçümü sonuçlarından, frekans kuvveti 1,6- 1,87 arasında değişirken, sediment katmanındaki zayıflamaların frekansın kuvvetiyle orantılı olarak arttığı gözlenmiştir. Teorik olarak bu kuvvetin 2 olması önerilmiş, aradaki farklılık ise dipte düşük hızlı enlemsel dalgaların yayılmasıyla meydana gelen kayıpların ihmal edilmiş olması ile açıklanmıştır. Kumlu dip katmanı üzerindeki sığ su kanalında zayıflamanın doğrusal olmayan frekans bağımlılığı, yayılım ölçümlerinden çıkarılmıştır. Dağılmayı, katmanlı yapıyı ve boylamsal dalga hızını içeren hesaplamalar, karesel bağımlılıktan daha düşük olan frekans bağımlılığını açıklayamamış, ancak enlemsel etkiyi içeren jeoakustik profil ile yapılan hesaplama dipteki zayıflamayı ve arayüzde akustik enerjinin enlemsel dalgalara dönüştüğünü göstermiştir. Düşük frekanslarda enlemsel dalgalardan dolayı alandan uzaklaştırılan enerji, esas zayıflama ile karşılaştırılabiliyorken, yüksek frekanslarda bu enerji esas zayıflamadan daha küçük olduğundan, elde edilen frekans bağımlılığının karesel bağımlılıktan daha küçük olabileceği ifade edilmiştir [Carey et al, 2008].

Ses kaybı ve sığ su mod zayıflamasının düzlem dalga zayıflaması ilişkisi araştırılırken düzlem dalga yansıma katsayısı, az kayıplı ortamda akustik alan zayıflama tahminlerinde sabit frekans için ideal denklemde, dalga sayısının sanal kısmı kabul edilerek yapılmıştır. Bu kabul, ses kaybı akustik basınç değişimi ile orantılı ise kusurludur. Gerçek bir analiz, mod zayıflama katsayısının belirlenmesi için gelişmiş bir ağırlık fonksiyonunu gerektirmiş ve homojen olmayan ortamdaki ses kaybının ve kılavuzlanmış dalga zayıflamasının uzaysal bağımlı zayıflama ile ilişkisi olduğu araştırılmıştır [Pierce, 2009].

2.2. Akustik Dalga Denklemi

Akustik dalga denklemi, ısı iletimlerinin hesaba katılmadığı akışkanlar mekaniği temelli *Durum*, *Lineerleştirilmiş Süreklilik* ve *Lineerleştirilmiş Euler* denklemleri kullanılarak çıkartılabilir.

- **Durum Denklemi:** Akışkanların şekillerindeki bozulmalarla, bozulmanın eski haline dönmesi ile ilgili iç geri çağırıcı kuvvetler arasındaki ilişkiyi göstermek üzere

$$u(\vec{r}, t) = \beta s(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

olarak verilir. Burada $u(\vec{r}, t)$ akustik basınç dağılımını ($Newton/m^2$), $s(\vec{r}, t)$ su yoğunlaşma dağılımını, β ise suyun esnekliğini ($Newton/m^2$) gösterir.

• **Lineerleştirilmiş Süreklilik Denklemi:** Belli bir bölgede hareket eden bir su kütlesi için parçacık hızı ve su yoğunlaşması arasındaki ilişkiyi göstermek üzere

$$\frac{\partial s(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.2)$$

olarak verilir. Burada $\vec{v}(\vec{r}, t)$ parçacık hızını (m/sn) göstermek üzere, (2.1) denkleminde $s(\vec{r}, t) = u(\vec{r}, t)/\beta$ bağıntısı yerine konulursa aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.3)$$

• **Lineerleştirilmiş Euler Denklemi:** Akustik basınç dağılımı ve parçacık hızı arasındaki ilişkiyi göstermek üzere

$$\rho_0(\vec{r}) \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla u(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.4)$$

olarak verilir. Burada $\rho_0(\vec{r})$ konuma bağlı su yoğunluğunu gösterir.

Akustik dalga denkleminin çıkartılması için (2.3) denkleminin zamana göre türevi alınır

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)] = 0 \quad (2.5)$$

bulunur. Burada $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ile ilgili kısımda zamana ve konuma göre türevler yer değiştirilerek, (2.4) denklemden $\partial \vec{v}(\vec{r}, t)/\partial t$ çekilip, yeniden düzenlenirse

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{r}, t) \right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left[-\frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \nabla u(\vec{r}, t) \right] = 0 \quad (2.6)$$

bulunur. Buradaki diverjans operatörü açılarak

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \right] \nabla u(\vec{r}, t) - \frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \underbrace{\nabla \cdot \nabla}_{\Delta} u(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.7)$$

olarak bulunup, Δ Laplace operatörü olmak üzere, tekrar düzenlenirse

$$\Delta u(\vec{r}, t) + \rho_0(\vec{r}) \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \right] \nabla u(\vec{r}, t) - \frac{\rho_0(\vec{r})}{\beta} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

halini alır. Bu bağıntıda $c(\vec{r}) = (\rho_0(\vec{r})/\beta)^{-1/2}$ ilişkisi kullanılmak üzere

$$\Delta u(\vec{r}, t) + \rho_0(\vec{r}) \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \right] \nabla u(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

bulunur [Aksoy, 2010]. Bu denklem üzerinden, zaman bağımlılığının $u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{u(\vec{r})e^{-i\omega t}\}$ olarak monokromatik olması durumunda

$$\Delta u(\vec{r}) + \rho_0(\vec{r}) \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \right] \nabla u(\vec{r}) + k^2(\vec{r})u(\vec{r}) = 0 \quad (2.10)$$

olmak üzere *Helmholtz denklemi* elde edilir. Özel olarak yoğunluğun $\rho_0(\vec{r}) = \text{sabit}$ olması durumunda, denklem

$$\Delta u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0 \quad (2.11)$$

halini alır. Burada Δ Laplace operatörünü, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ (rad/m) dalga sayısını, f çalışma frekansı olmak üzere $\omega = 2\pi f$ açısal frekansı ve λ dalga boyunu gösterir.

2.2.1. Sınır ve Süreklilik Koşulları

Akustik dalga denklemi çözümü için uzayda *sınır koşullarının* verilmesi gerekmektedir. Buna göre akustik basınç:

- **Basınçtan Arındırılmış (*Pressure-Release*) Sınır Koşulu:** İki bölge arasındaki basınç farkları nedeni ile oluşan sınırdaki

$$u|_s = 0 \quad (2.12)$$

olarak akustik dalgaların sıfıra eşit olması şeklinde olup *Dirichlet* sınır koşulu olarak ta bilinir. Bu koşul deniz-hava yüzeyinde akustik basıncın sıfırlanması için kullanılır.

- **Sert (*Rigid*) Sınır Koşulu:** Sert türdeki sınır koşulları iki bölge arasında basınç farkları nedeniyle oluşan sınırdaki

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_s = 0 \quad (2.13)$$

olarak akustik dalgaların yüzeyin normaline (n) göre türevinin sıfıra eşit olması şeklindedir ve *Neumann* sınır koşulu olarak ta bilinir.

- **Süreklilik Koşulları:** İki ayrı akustik ortamı birleştiren arayüz bölgesinde akustik alan bileşenleri ve yüzey normaline göre türevlerinin

$$u_1(\vec{r}, t)|_s = u_2(\vec{r}, t)|_s \quad (2.14)$$

$$\left. \frac{1}{\rho_1} \frac{u_1(\vec{r}, t)}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{1}{\rho_2} \frac{u_2(\vec{r}, t)}{\partial n} \right|_S \quad (2.15)$$

olmak üzere eşitliğini tanımlar.

2.3. Normal Mod Yöntemi

Normal Mod yöntemi, su altında bir kaynaktan yayılan akustik dalgaları hesaplamak için etkin ve deniz ortamının yatayda katmanlanmış olduğu düşünüldüğünde yüksek doğruluğa sahiptir [Kalantar-Zadeh and Kamarai, 1997]. Normal Mod yöntemi Helmholtz denkleminin kaynaklı çözümleri üzerine kuruludur. Pratikte çoğu uygulama tek frekanslı kaynakların (dar bantlı) oluşturduğu dalgalar incelendiğinden *Helmholtz denklemi* çözümü yeterlidir. Bu denklemin tam çözümü

$$u(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{r}, k) dk + \text{Kesim çizgisi katkısı} \quad (2.16)$$

olarak verilir. Bu çözümde integral ayırık (*discrete*) modları, kesim çizgisi katkısı sürekli modları tanımlar. Normal Mod yöntemi ilk kez kayıpsız Sıvı-Sıvı katmanlı modellenen deniz ortamında Pekeris tarafından uygulanmıştır [Pekeris, 1948]. Helmholtz denkleminin tam çözümleri dalga sayısı (k) üzerinden integral alınarak elde edilebilir. Bu integral öncelikle reel (k) ekseninde değerlendirilirken, k 'nın kompleks sayı olduğu kayıplı durumlar için, reel ve imajiner düzlemde değerlendirilmelidir.

Helmholtz denklemi silindirik koordinatlarda ele alınırsa

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta, z) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r, \theta, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(r, \theta, z) + k^2 u(r, \theta, z) = f(r, \theta, z) \quad (2.17)$$

bulunur. Problem silindirik eksenel (açısal) simetri varsayımı altında (θ 'dan bağımsız) iki boyutlu olarak düşünülürse, bu denklem

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(r, z) + k^2(z) u(r, z) = f(r, z) \quad (2.18)$$

halini alır. Burada dikkat edilmesi gereken husus, k dalga sayısının $k(z) = \omega/c(z)$ olarak derinliğe (z) göre değişken alınmasıdır. Bunun sebebi su altı ortamında gerçekte ses hızının derinliğe bağlı olarak değişmesidir. Bu denklem *indirgenmiş-eliptik dalga denklemi* olarak bilinir.

Bu tez çalışmasında iki boyutlu silindirik koordinatlarda verilen Helmholtz denkleminin çözümü $u(r, z) = aU(z)R(r)$ biçiminde önerilen değişken dönüşümü tekniği ile öncelikle tek katman için Normal Mod yöntemi kullanılarak çözülecek, daha sonra bu çözüm iki katmanlı Sıvı-Sıvı modeli için genişletilecek ve son olarak dalga sayılarının kompleks olduğu dip kayıplı Sıvı-Katı modeli çözümleri elde edilecektir. Problemin çözümünde su yüzeyi geçirgen olmayan *Dirichlet (Pressure Release)* türü sınır koşulu ile modellenecektir. Yani su yüzeyi üzerinde akustik basınç sıfırdır. Yine su bölgesi ile dip bölgesi arasındaki arayüzde *Süreklilik Koşulları (Continuity Conditions)* uygulanacaktır. Su katmanı altındaki bölge ise kayıplı ve sonsuz derinliklidir. Problemin çözümü sonucunda menzile ve frekansa bağlı olarak elde edilen İletim Kaybı değişimleri üzerine özellikle deniz dip kaybı etkisi incelenecektir. Yine sonuçların doğrulanması bakımından KRAKEN/KRAKENC adı ile bilinen ve su altı akustik uygulamalarında sıkça kullanılan sayısal çözüm temelli hazır bir paket programı sonuçları ile karşılaştırmalar yapılacaktır [Porter, 1992].

2.3.1. İletim Kaybının Hesaplanması

Akustik problemlerinin çözümünde $u(\vec{r}) = u(r, z)$ olarak akustik alan dağılımını hesaplandığında, menzil veya derinliğe bağlı İletim Kaybı

$$TL = -20 \log_{10} \left| u(\vec{r}) \right| = -20 \log_{10} \left| u(r, z) \right| \quad (2.19)$$

olarak hesaplanır. Bu denklem I_{ref} referans akustik şiddet olmak üzere, $TL = 10 \log_{10}(I/I_{ref})$ biçiminde akustik şiddet ile ilişkilendirilir.

3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Su altı akustik problemi formülasyonunu elde edebilmek için, üç aşamalı bir yol izlenecektir. Buna göre öncelikle Tek Katmanlı problemin çözümünden bahsedilecek, daha sonra çözüm iki katmanlı Sıvı-Sıvı problemine genişletilecektir. Sıvı-Sıvı problem çözümü, ayrık modları veren Normal Modların toplamı ile birlikte, sürekli modları ifade eden kesim çizgisi integrali katkısı olarak verilecektir. Sığ sularda ve uzak alan çözümlerinde sürekli modların katkısı ihmal edilebilmektedir. Son olarak bu tezin esas konusu olan kayıplı dip tabiatına sahip Sıvı-Katı problemi, dip kaybının çok küçük olduğu varsayımı altında, sürekli modların katkısı ihmal edilerek incelenecektir.

3.1. Tek Katmanlı Dalga Kılavuzu

Normal Mod yönteminde akustik alan, her biri farklı frekans ve yayılım hızlarına sahip ayrık modların toplamı olarak hesaplanır. Pratikte su altı akustik ortamı geometrisi silindirik ve ortam parametrelerinin sadece derinlikle değiştiği katmanlı bir yapı olarak düşünülebilir. Böyle yatay katmanlara sahip bir ortamda $(0,0,z_0)$ koordinatına yerleştirilen noktasal akustik bir kaynağın silindirik açısız simetriyi sağladığı kabulü ile (2.10) Helmholtz denklemi üzerinden kaynaklı olarak

$$\Delta u(\vec{r}) + \rho_0(\vec{r}) \nabla \left[\frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \right] \nabla u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = -4\pi \frac{1}{r} \delta(r) \delta(\theta) \delta(z - z_0) \quad (3.1)$$

halini alır. Burada $\delta(.)$ Dirac fonksiyonunu göstermektedir. Yukarıdaki denklemde dikkat edilmesi gereken nokta, sağ yandaki kaynağın menzil arttıkça genliğinin $1/r$ ile orantılı olarak azalacak şekilde varsayılacağıdır. Silindirik simetriden dolayı θ 'ya bağlı tüm türevler sıfır olur. Bu durumda (3.1) denklemi iki boyutta daha açık olarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u(r, z) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(r, z) + \rho_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_0(z)} \right] \frac{\partial}{\partial z} u(r, z) + k^2(z) u(r, z) \\ = -4\pi \frac{1}{r} \delta(r) \delta(\theta) \delta(z - z_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

olarak yazılabilir. Burada $k(z) = \omega/c(z)$ dalga sayısı olup, (3.2) denkleminin tüm problem uzayında 0 'dan 2π 'ye kadar integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u(r, z) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(r, z) + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{\partial}{\partial z} u(r, z) + k^2(z) u(r, z) \\ = -2 \frac{1}{r} \delta(r) \delta(z - z_0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

bulunur. (3.3) denkleminin çözümü menzile (r) ve derinliğe (z) bağlı olmak üzere ilgili özdeğer ve özfonksiyonları kapsamak üzere

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) R_n(r) \quad (3.4)$$

olarak önerilebilir. Bu çözüm (3.3) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) R_n(r) \right] \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) R_n(r) \right] \\ + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) R_n(r) \right] \\ + k^2(z) \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) R_n(r) \right] = -2 \frac{1}{r} \delta(r) \delta(z - z_0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) \left[\begin{aligned} & U_n(z) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + R_n(r) \frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \\ & R_n(r) \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{dU_n(z)}{dz} + k^2(z) [U_n(z) R_n(r)] \end{aligned} \right] = -2 \frac{1}{r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad (3.6)$$

denklemini bulunur. (3.6) denkleminin her iki tarafı $U_n(z) R_n(r)$ 'ye bölünürse

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_0) \left[\frac{1}{rR_n(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + \frac{1}{U_n(z)} \frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \frac{1}{U_n(z)} \rho_o(z) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{dU_n(z)}{dz} + k^2(z) \right] = -2 \frac{\delta(r)\delta(z-z_0)}{rR_n(r)U_n(z)} \quad (3.7)$$

Bulunur. Bu denklem $r \neq 0$ veya $z \neq 0$ iken denklem homojen olmak üzere yeniden düzenlenirse

$$\frac{1}{rR_n(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + \frac{1}{U_n(z)} \left[\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \rho_o(z) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{dU_n(z)}{dz} \right] + k^2(z) = 0 \quad (3.8)$$

halini alır. Bu denklemin sağlanması için k_{rn} yatay dalga sayısını (horizontal wave number), k_{zn} dikey dalga sayısını (vertical wave number) göstermek üzere, $k^2(z) = k_{rn}^2 + k_{zn}^2$ iken

$$\frac{1}{rR_n(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) = -k_{rn}^2 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + k_{rn}^2 R_n(r) = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{U_n(z)} \left[\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \rho_o(z) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{dU_n(z)}{dz} \right] = -k_{zn}^2 \quad (3.10)$$

$$\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \rho_o(z) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{dU_n(z)}{dz} + k_{zn}^2 U_n(z) = 0$$

denklemlerinin sağlanması gerektiği bulunur. (3.10) denklemi $\rho_o(z)$ ile bölünerek, $k_{zn}^2 = k^2(z) - k_{rn}^2$ olmak üzere ve ω^2/c_{min}^2 eklenip çıkartılması ile

$$\frac{1}{\rho_o(z)} \frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{dU_n(z)}{dz} + \left[\frac{k^2(z) - \omega^2/c_{min}^2}{\rho_o(z)} + \frac{\omega^2/c_{min}^2 - k_{rn}^2}{\rho_o(z)} \right] U_n(z) = 0 \quad (3.11)$$

halini alır. Bu denklem *Sturm-Liouville* türünde bir diferansiyel denklemdir. Yani $q(z) = w(z) = 1/\rho_0(z)$, $r(z) = [k^2(z) - \omega^2/c_{min}^2]/\rho_0(z)$ ve $\vartheta = (\omega^2/c_{min}^2) - k_{rn}^2(z)$ olmak üzere

$$q(z) \frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \frac{dq(z)}{dz} \frac{dU_n(z)}{dz} + [r(z) + Jw(z)] U_n(z) = 0 \quad (3.12)$$

Sturm-Liouville diferansiyel denklemi sağlanır. Bu tür diferansiyel denklemler için aşağıdaki şartlar sağlanır [Bronson, 2003]:

- i) Özfonksiyonlar belirli aralıkta *Sturm-Liouville* diferansiyel denklemini sağlar. Söz konusu aralığın alt ve üst sınır değerlerinde Dirichlet, Neumann, Periyodik ve Karmaşık türden sınır koşullarını (kompleks sayı olarak verilen empedans sınır koşulları hariç) sağlar.
- ii) Bu çözüm ışınma koşulunu içermez.
- iii) Özfonksiyonlar, ağırlık fonksiyonları kapsamında ortonormalite koşulunu sağlarlar.
- iv) Özfonksiyonlar tamlık (veya kapanma) koşulunu sağlarlar.
- v) Özfonksiyonlar tam bir set oluştururlar.
- vi) Özdeğerler reel, pozitif ve ayrıktır.

3.1.1. $a_n(z_0)$ Katsayısının Hesabı

(3.6) denklemi tekrar ele alınarak, düzenlenirse

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_0) \left[U_n(z) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + R_n(r) \left[\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{dU_n(z)}{dz} + k^2(z) U_n(z) \right] \right] = -2 \frac{1}{r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad (3.13)$$

bulunur. Burada

$$\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{dU_n(z)}{dz} + k^2(z) U_n(z) = k_{rn}^2 U_n(z) \quad (3.14)$$

olarak özdeğer – özvektör denkleminin sağlanması ile

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) \left[U_n(z) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + R_n(r) k_{rn}^2 U_n(z) \right] = -2 \frac{1}{r} \delta(r) \delta(z - z_o) \quad (3.15)$$

halini alır. Bu denklemin tekrar düzenlenmesi ile

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + R_n(r) k_{rn}^2 \right] = -2 \frac{1}{r} \delta(r) \delta(z - z_o) \quad (3.16)$$

bulunur. (3.13) denkleminden itibaren, denklem *Sturm-Liouville* türünde diferansiyel denklem olduğundan öz fonksiyonların tamlık (veya kapanma) koşulunu sağlaması gereksinimi nedeni ile, $w(z)$ ağırlık fonksiyonu kapsamında

$$\delta(z - z_o) = \sum_n w(z_o) U_n^*(z_o) U_n(z) \quad (3.17)$$

bağıntısı yazılabilir. Bu ifade $w(z_o) = 1/\rho_o(z)$ seçilerek (3.16) denkleminin sağ tarafına yerleştirilirse

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + R_n(r) k_{rn}^2 \right] = -2 \frac{1}{r} \delta(r) \sum_n \frac{1}{\rho_o(z)} U_n^*(z_o) U_n(z) \quad (3.18)$$

buradan

$$a_n(z_o) = \frac{U_n^*(z_o)}{\rho_o(z_o)} \quad (3.19)$$

olarak $a_n(z_o)$ katsayısı bulunur. Ayrıca (3.18) denklemini sağ yanlı olarak

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + R_n(r) k_m^2 = -2 \frac{1}{r} \delta(r) \quad (3.20)$$

Bessel denklemi adı ile bilinen denklemi de sağlar. Bu denklem menzile (r) bağlı olup, yatay yönde menzil boyunca yayılan akustik dalga davranışını modeller ve çözümü

$$R_n(r) = AH_0^{(1)}(k_m r) + BH_0^{(2)}(k_m r) \quad (3.21)$$

şeklinindedir [Duffy, 2001]. Burada $H_0^{(1)}(k_m r)$ sıfıncı mertebeden ve birinci türden, $H_0^{(2)}(k_m r)$ ise sıfıncı mertebeden ve ikinci türden *Hankel fonksiyonu*'dur. Sommerfeld Işıma Koşuluna göre Helmholtz denkleminin çözümü dışarı doğru yayılan dalgaları göstermelidir [Sommerfeld, 1949]. Buna göre zamanla değişimi monokromatik varsayıldığından Hankel fonksiyonları asimptotik ifadelerini kapsamında $B = 0$ olması gerektiği görülür [Abramowitz and Stegun, 1970]. Buradan $R_n(r) = AH_0^{(1)}(k_m r)$ olur. A katsayısı (3.20) denklemi ilk önce r ile çarpılıp, $r = 0$ çevresinde sonsuz küçük bir daire boyunca integrali alınarak düzenlenirse

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + R_n(r) k_m^2 r = -2 \delta(r) \quad (3.22)$$

$$\left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) \Big|_{r=0} + \oint_r R_n(r) k_m^2 r dr = -2 \quad (3.23)$$

bulunur. Burada $r \rightarrow 0$ iken $k_m r \rightarrow 0$ olur. $n = 0$ iken $H_0^{(1)}(r) \sim \frac{2i}{\pi} \ln(r)$ yaklaşımı kullanılarak limit durumunda $r' = \frac{1}{r}$ dönüşümü yapıp $a > 0, b > 0$ iken $\lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{(\log r')^b}{(r')^a} = 0$ olduğundan integral kaybolur [Apostol, 1967]. $d/dr [H_0^{(p)}(r)] = -H_1^{(p)}(r)$ özelliği (3.21) denkleminde kullanılırsa limit durumunda

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[r \left(-A k_{rn} H_1^{(1)}(k_{rn} r) \right) \right] = -2 \quad (3.24)$$

eşitliği elde edilir. $r \rightarrow 0$ iken $k_{rn} r \rightarrow 0$ olur. $n > 0$ için $k_{rn} r \rightarrow 0$ iken

$$H_n^{(1)}(k_{rn} r) \sim -\frac{i(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{k_{rn} r} \right)^n \quad (3.25)$$

yaklaşımı kullanılırsa [Chew, 1990]

$$\lim_{k_{rn} r \rightarrow 0} \left[-A k_{rn} r \left(-\frac{i}{\pi} \left(\frac{2}{k_{rn} r} \right) \right) \right] = -2 \quad (3.26)$$

bulunur. Bu bağıntının sağlanması için $A = i\pi$ olacağı açık olduğundan, çözüm

$$R_n(r) = i\pi H_0^1(k_{rn} r) \quad (3.27)$$

olarak bulunur. Burada $k^2(z) = k_{rn}^2 + k_{zn}^2$ olduğundan $k_{rn} = \sqrt{k^2(z) - k_{zn}^2}$ yatay yöndeki dalga sayısı olmak üzere, Helmholtz denkleminin çözümü

$$u(r, z) = \frac{i\pi}{\rho_o(z_o)} \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(z_o) \times U_n(z) \times H_0^1(k_{rn} r) \quad (3.28)$$

olarak bulunur [Hawker et al, 1979]. Akustik problemlerde uygulamada çoğunlukla uzak alanda ($k_n r \gg 1$) sonar performans modellerine ihtiyaç duyulduğundan, sıfırıncı mertebeden ve birinci türden Hankel fonksiyonu için uzak alan asimptotik ifadesi

$$H_0^1(k_{rn} r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_{rn} r}} e^{i(k_{rn} r - \pi/4)} \quad (3.29)$$

olarak verilir [Abramowitz and Stegun, 1970]. Bu asimptotik değer (3.28) denkleminde yerine konulursa, akustik basınç dağılımı

$$u(r,z) \approx \frac{\sqrt{2\pi} e^{i\pi/4}}{\rho_o(z_o)} \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(z_o) U_n(z) \frac{e^{i(k_m r)}}{\sqrt{k_m r}} \quad (3.30)$$

olarak bulunur.

3.1.2. $\rho_0(z)$ Yoğunluğun Sabit Olması Durumu

Yoğunluğun $\rho_0(z)$ sabit olması durumunda $d[1/\rho_0(z)]/dz = 0$ olacağından (3.10) denklemi

$$\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + k_{zn}^2 U_n(z) = 0 \quad (3.31)$$

olarak özdeğer-özvektör denklemi olarak yazılır. *Normal Mod denklemi* olarak ta bilinen bu denklem derinliğe (z) bağlı olarak akustik dalganın dikey yöndeki duran dalga davranışını modeller ve çözümü

$$U_n(z) = A \sin(k_{zn} z) \quad (3.32)$$

olarak önerilebilir. Özdeğerlerin ortonormalite koşulunu ağırlık fonksiyonu ile sağlaması için

$$\int_0^h \underbrace{w(z_o)}_{1/\rho_o(z)} A^2 \sin(k_{zm} z) \sin(k_{zn} z) dz = \delta(m-n) \quad (3.33)$$

integrali sağlanarak, A katsayısı

$$m = n \Rightarrow \underbrace{\frac{A^2}{\rho_o} \int_0^h \sin^2(k_{zm} z) dz}_{\frac{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sin(2k_{zm} h) + \frac{1}{2} k_{zm} h}{k_{zm}}} = 1 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{2\rho_o}{h}}} \quad (3.34)$$

olarak bulunur. Bu durumda $a_n(z_o)$ katsayısı (3.19) denklemi ışığında

$$a_n(z_o) = \frac{U_n^*(z_o)}{\rho_o(z_o)} = \sqrt{\frac{2}{h\rho_o(z_o)}} \sin(k_{zn}z_o) \quad (3.35)$$

halini alır. Bu durumda (3.30) çözümü (3.32) ve (3.35) denklemleri ışığında

$$u(r,z) \simeq \frac{2\sqrt{2\pi}e^{i(\pi/4)}}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_{zn}z_o) \times \sin(k_{zn}z) \times \frac{e^{i(k_{rn}r)}}{\sqrt{k_{rn}r}}. \quad (3.36)$$

halini alır.

3.1.3. Kesim Frekansı Hesabı

Deniz dibi Neumann türü sınır koşulu ile modellendiğinden (3.32) ve (3.35) çözümü ile

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 &\Rightarrow \left. \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} \right|_{z=h} = k_{zn} \sqrt{\frac{2\rho_o}{h}} \cos(k_{zn}h) \Big|_{z=h} = 0 \\ &\Rightarrow \left. \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} \right|_{z=h} = \cos(k_{zn}h) \Big|_{z=h} = 0 \\ &\Rightarrow k_{zn}h = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow k_{zn} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h} \end{aligned} \quad (3.37)$$

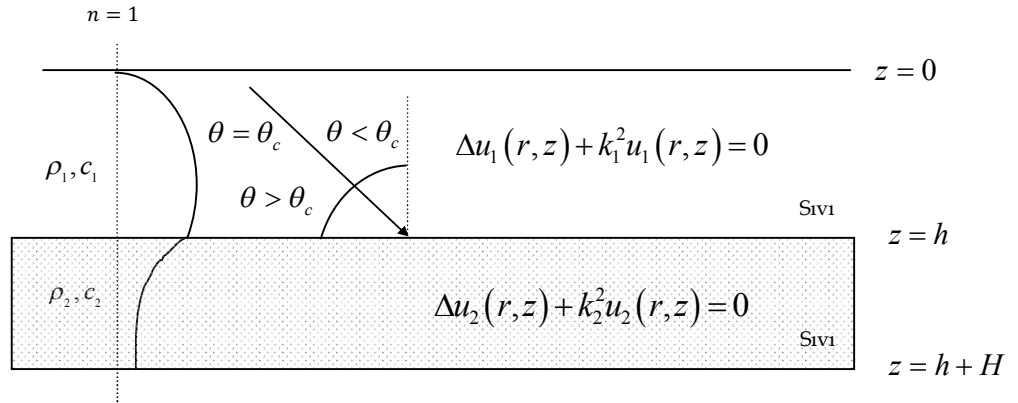
şartı bulunur. Burada $n = 1, 2, 3, \dots$ olarak k_{zn} dikey yöndeki dalga sayısını tanımlar.

Bu kapsamda $k_{rn} = \sqrt{k^2(z) - k_{zn}^2}$ denklemi yeniden değerlendirilirse, $k(z) > k_{zn} \rightarrow k_{rn} > 0$ durumunda dalga yayımlı olduğu, $k(z) < k_{zn} \rightarrow k_{rn} < 0$ olduğundan ise dalga sönümlemesi olduğu açıktır. Bu durumda $k(z) = k_{zn}$ şartı kullanılarak, kesim frekansı aşağıdaki gibi bulunur.

$$k^2 = k_{zn}^2 \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2(z)} = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{h^2} \Rightarrow f_{kesim} = \frac{1}{2h} c(z) \left(n - \frac{1}{2}\right) \quad (3.38)$$

3.2. Sıvı – Sıvı Dalga Kılavuzu

Sıvı-Sıvı dalga kılavuzu pratikte çoğu deniz ortamını modellemek için yeterli olup, Pekeris dalga kılavuzu olarak bilinir [Pekeris, 1948]. Bu tür kılavuzlarda Sıvı-Sıvı olmak üzere iki katmanlı yapı mevcut olup, özel olarak burada ikinci katmandaki ses hızının, birinci katmandakinden büyük olması durumu incelenecektir. İki katmanlı Sıvı-Sıvı dalga kılavuzu probleminin geometrisi ve ilk modun derinliğe bağlı olarak alan dağılımı aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Sıvı-Sıvı iki katmanlı dalga kılavuzu ve ilk modun alan dağılımı ile sıyırma açısının kritik açıya göre durumu.

Sıvı-Sıvı dalga kılavuzu probleminde $c_2 > c_1$ olmak üzere, dip bölgesi ile etkileşen akustik dalgaların durumu arayüz sınırı ile yaptıkları θ sıyırma açısına göre özel olarak incelenmelidir¹. Bu durumda özel olarak θ_c kritik açı olmak üzere:

- $\theta \geq \theta_c$ ise arayüzden toplam iç yansıma (total internal reflection) oluşur. Yani yansıma katsayısı 1 olacağından, deniz bölgesinde sadece ayırık modlar ile hesap yapılmalıdır.

¹ $c_2 < c_1$ durumunda, deniz bölgesinde çözüm, tümüyle sürekli spektrumlu modların toplamı biçimindedir.

- $\theta < \theta_c$ ise dip bölgesine geçişler nedeni ile yansıma katsayısı < 1 olacağından, deniz bölgesinin yarı sonsuz uzay durumunda ($H \rightarrow \infty$) ele alınması halinde, deniz bölgesinde ayırık modlara ek olarak sürekli spektrumlu modlar var olacaktır.

Bu durumda deniz bölgesinde ($0 \leq z \leq h$) toplam akustik alan

$$u(r, z) = \begin{cases} u_{ayrık}(r, z) & , \quad \theta > \theta_c \\ u_{ayrık}(r, z) + u_{sürekli}(r, z) & , \quad \theta < \theta_c \end{cases} \quad (3.39)$$

olarak bulunur. Burada

$$u_{ayrık}(r, z) = \sum_{n=1}^N a_n(z_o) U_n(z) R_n(r) \quad (3.40)$$

$$a_n(z_o) = \frac{U_n^*(z_o)}{\rho_0(z_o)} \quad (3.41)$$

eşitlikleri sağlanmaktadır. Bu kapsamda öncelikle ayırık modlar değerlendirilecektir.

3.2.1. Ayırık (Discrete) Modlar

Deniz ortamındaki her iki bölge için derinliğe (z) bağlı $U_n(z)$ fonksiyonu

$$U_n(z) = \begin{cases} A_n \sin(k_{zn_1} z) & , \quad 0 \leq z \leq h \\ B_n e^{-k_{zn_2} z} & , \quad z \geq h \end{cases} \quad (3.42)$$

olarak ele alınıp, arayüzde süreklilik koşullarının sağlanması gerektiğinden, A_n ve B_n katsayıları arasında

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{e^{-k_{zn_2} h}}{\sin(k_{zn_1} h)} \quad (3.43)$$

ilişkisi vardır. Buradan ortonormalite koşulu [Ingenito, 1973]

$$\frac{1}{\rho_1} \int_0^h U_n^{(1)}(z) U_m^{(1)}(z) dz + \frac{1}{\rho_2} \int_h^\infty U_n^{(2)}(z) U_m^{(2)}(z) dz = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (3.44)$$

uygulanarak,

$$\frac{1}{\rho_1} \int_0^h A_n^2 \sin^2(k_{zn_1} z) dz + \frac{1}{\rho_2} \int_h^\infty B_n^2 e^{-2k_{zn_2} z} dz = 1 \quad (3.45)$$

A_n katsayısı

$$A_n = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\rho_1} \left(h - \frac{\sin(2k_{zn_1} h)}{2k_{zn_1}} \right) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\sin^2(k_{zn_1} h)}{k_{zn_2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

bulunur. Böylece ayırık modlar için çözüm

$$u_{ayrık}(r, z) = \begin{cases} \frac{i\pi}{\rho} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn_1} z_0) \sin(k_{zn_1} z) H_0^1(k_{zn_1} r) & , 0 \leq z \leq h \\ \frac{i\pi}{\rho} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn_1} z_0) \sin(k_{zn_1} h) e^{-k_{zn_2}(z-h)} H_0^1(k_{zn_1} r) & , z \geq h \end{cases} \quad (3.47)$$

olur. Akustik problemlerde uygulamada çoğu kez uzak alanda ($k_n r \gg 1$) sonar performans modellerine ihtiyaç duyulduğundan, *Hankel fonksiyonu* için (3.29)'daki gibi asimptotik ifadesi kullanılarak, çözüm

$$u_{ayrık}(r, z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi} e^{i(\pi/4)}}{\rho} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn_1} z_0) \sin(k_{zn_1} z) \frac{e^{i(k_{zn_1} r)}}{\sqrt{k_{zn_1} r}} & , 0 \leq z \leq h \\ \frac{\sqrt{2\pi} e^{i(\pi/4)}}{\rho} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn_1} z_0) \sin(k_{zn_1} h) e^{-k_{zn_2}(z-h)} \frac{e^{i(k_{zn_1} r)}}{\sqrt{k_{zn_1} r}} & , z \geq h \end{cases} \quad (3.48)$$

bulunur. Burada N yayılan maksimum ayırık mod sayısını gösterir. (3.48) denklemi kapsamında ayırık modlar için gerekli özdeğerler, deniz yüzeyi ve ara bölgeden yansıma katsayılarının kullanılması ile elde edilen özel bir yöntem ile, $k_{zn1} = [(n - 1/2)\pi - \varphi_n/2]/h$, $n = 1, 2, 3, \dots$ formülü kapsamında hesaplanabilir [Clay and Medwin, 1977].

3.2.2. Sürekli Spektrumlu (Continuum) Modlar

SIVI-SIVI probleminde gerçekte alt sıvı katman derinlik yönünde sonsuza ($h \rightarrow \infty$) kadar uzanmaktadır. Bu durumda deniz bölgesinde ayırık modlar yanında, sürekli spektrumlu modlar şeklinde akustik alan dağılımı da oluşur ve

$$u_{\text{sürekli}}(r, z) \approx i \frac{2\rho_2}{\rho_1} \int_c \frac{k_{zn1}}{k_{zn2}} \frac{\sin(k_{zn1} z_0) \sin(k_{zn1} z)}{\left[\sin^2(k_{zn1} z_0) + \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} \frac{k_{zn1}^2}{k_{zn2}^2} \cos^2(k_{zn1} h) \right]} \frac{e^{i(k_{zn1} r)}}{\sqrt{k_{zn1} r}} dk_{zn1} \quad (3.49)$$

olarak modellenir. Burada kompleks integralin kesim çizgisi kapsamında değerlendirilmesi ile,

$$u_{\text{sürekli}}(r, z) \approx i \frac{2\sqrt{2\pi} e^{i(\pi/4)}}{h} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sin(k_{zn1}^0 z_0) \sin(k_{zn1}^0 z) e^{-\frac{\rho_1 k_{zn2}^0 r}{\rho_2 h k_{zn1}^0}} \frac{e^{i(k_{zn1}^0 r)}}{\sqrt{k_{zn1}^0 r}} \quad (3.50)$$

bulunur [George, 1994]. Burada $k_{zn1}^0 = (n - 1/2)\pi/h$, $k_{zn2}^0 = (k_2^2 - k_1^2 + (k_{zn1}^0)^2)^{1/2}$ ve $k_{rn}^0 = (k_1^2 - (k_{zn1}^0)^2)^{-1/2}$ olarak verilir. Bu denklem kapsamında aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

- Uzun menzillerde ayırık modlar baskın hale gelirken, sürekli spektrumlu modlar üstel azalma nedeni ile önemlerini kaybetmektedirler.
- $h k_{rn}^0 \rightarrow \infty$ oldukça, sürekli spektrumlu modlar ayırık modlara dönüşmektedirler.
- Mevcut çözüm kritik açıya yakın sıyırma açıları dışında kullanılmamalıdır.
- $\rho_2/\rho_1 \rightarrow \infty$ ve $c_2/c_1 \rightarrow \infty$ durumunda, klasik ayırık mod çözümüne ulaşılır.

Hesaplanan ayrık ve sürekli modların (3.39) denklemi çerçevesinde değerlendirilmesi ile, deniz bölgesinde toplam akustik alan

$$u(r, z) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2\pi} e^{i(\pi/4)}}{\rho} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn_1} z_0) \sin(k_{zn_1} z) \frac{e^{i(k_m r)}}{\sqrt{k_m r}} & , \theta > \theta_c \\ \frac{\sqrt{2\pi} e^{i(\pi/4)}}{\rho} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn_1} z_0) \sin(k_{zn_1} z) \frac{e^{i(k_m r)}}{\sqrt{k_m r}} \\ + \frac{2\sqrt{2\pi} e^{i(\pi/4)}}{h} \sum_{n=N+1}^{NN \rightarrow \infty} \sin(k_{zn_1}^0 z_0) \sin(k_{zn_1}^0 z) e^{-\frac{\rho_1 k_{zn_2}^0}{\rho_2 h k_m^0} r} \frac{e^{i(k_m^0 r)}}{\sqrt{k_m^0 r}} & , \theta < \theta_c \end{array} \right\} \quad (3.51)$$

olarak verilir [George, 1994].

3.3. Sıvı – Katı Dalga Kılavuzu

Sıvı-Katı dalga kılavuzu çözümü, dip katmanın kayıplı olduğu ve dipteki kayıptan dolayı üzerindeki sıvı katmanında yayılan dalgaların zayıflayacağı öngörüsüne dayandırılmıştır. Bu kapsamda hesaplama kolaylığı bakımından dipteki kaybın çok küçük olduğu kabul edilerek, sadece ayrık modlar için çözülmüş ve sürekli modların katkısı ihmal edilmiştir.

3.3.1. Alt Katman İçin Akustik Alan Hesaplaması

Alt katmanın kayıplı olması, mod zayıflamasına ve su katmanı ve alt katmandaki yatay ve dikey dalga sayılarının kompleks olmasına sebep olacaktır. Çünkü kayıp katsayısı, alt katmanda dalga sayısının sanal bileşeni olarak hesaplamalara dâhil edilmiştir. Buna göre Şekil 3.1 kapsamında ρ_1 , ρ_2 ve $u_1(r, z)$, $u_2(r, z)$ sırası ile üst ve alt katmandaki yoğunluk ve akustik basınç dağılımları olmak üzere, üst sınır ve arayüzde

$$u_1|_{z=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial z} \right|_{z=h} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial z} \right|_{z=h} \quad (3.52)$$

$$\rho_1 u_1|_{z=h} = \rho_2 u_2|_{z=h}$$

sınır ve süreklilik koşulları sağlanır. Bu durumda Helmholtz denklemi

$$\Delta u_2(r, z) - \nabla \rho_2(z) \cdot \left[\frac{1}{\rho_2(z)} \right] \nabla u_2(r, z) + k_2^2(z) u_2(r, z) = 0 \quad (3.53)$$

olup, $u_1(r, z)$ ve $u_2(r, z)$ 'nin (z) bağımlı kısımları $U_1(z)$ ve $U_2(z)$ olarak gösterilsin. $U_1(z)$ çözümü genel olarak tek katman veya Sıvı-Sıvı üst bölgesi model çözümü ile benzerdir. $U_2(z)$ çözümünü elde etmek için denklemden θ 'ya bağlı türevler sıfır alınıp, yoğunluğun sabit olduğu varsayılırsa silindirik koordinatlarda

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u_2(r, z) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_2(r, z) + k_2^2 u_2(r, z) = 0 \quad (3.54)$$

denklemini elde edilir. $u_2(r, z)$ akustik alanını değişkenlerine ayırıştırma yöntemi ile çözmek için, $u_2(r, z) = U_2(z) R_2(r)$ çözümü önerilerek

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} U_2(z) R_2(r) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_2(z) R_2(r) + k_2^2 U_2(z) R_2(r) = 0. \quad (3.55)$$

denklemini bulunur. Denklem 1/ $U_2(z) R_2(r)$ ile çarpılarak

$$\frac{1}{rR_2(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_2(r)}{dr} \right) + \frac{1}{U_2(z)} \left[\frac{d^2 U_2(z)}{dz^2} \right] + k_2^2 = 0 \quad (3.56)$$

bulunur. Burada öncelikle $k_2^2 = k_{r2}^2 + k_{z2}^2$ olarak düşünülürse

$$\frac{1}{rR_2(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_2(r)}{dr} \right) = -k_{r2}^2 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_2(r)}{dr} \right) + k_{r2}^2 R_2(r) = 0 \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{U_2(z)} \left[\frac{d^2 U_2(z)}{dz^2} \right] = -k_{z2}^2 \Rightarrow \frac{d^2 U_2(z)}{dz^2} + k_{z2}^2 U_2(z) = 0 \quad (3.58)$$

denklemler elde edilir. $k_{z2} = k'_{z2} + ik''_{z2}$ iken $U_2(z)$ çözümü

$$U_2(z) = Ae^{-ik_{z2}z} + Be^{ik_{z2}z}. \quad (3.59)$$

olarak önerilip, $k_{z2} = k'_{z2} + ik''_{z2}$ ifadesi çözümde yerine koyulursa

$$U_2(z) = Ae^{-i(k'_{z2} + ik''_{z2})z} + Be^{i(k'_{z2} + ik''_{z2})z} = Ae^{-ik'_{z2}z} e^{-k''_{z2}z} + Be^{ik'_{z2}z} e^{-k''_{z2}z} \quad (3.60)$$

elde edilir. Reel ve sanal kısımlar pozitif iken A çarpanlı terim sonsuza gideceğinden ve çözüm fiziksel olmayacağından $A = 0$ olmak üzere, denklem

$$U_2(z) = Be^{ik'_{z2}z} \cdot e^{-k''_{z2}z} \quad (3.61)$$

haline indirgenir. Bu modelde $z = 0$ düzlemi deniz yüzeyi, katman derinliği pozitif z yönü olarak düşünüldüğünden, fiziksel olarak $z = 0$ düzlemi üzerinde bir yayılım olamayacağından bu çözümü doğru olarak kabul edemeyiz. Bu durumda

matematiksel uyumluluk için $k_2^2 = k_{r2}^2 - k_{z2}^2$ olarak alınırsa (r) ve (z) bağımlı eşitlikler aşağıdaki gibi olacaktırlar

$$\frac{1}{rR_2(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_2(r)}{dr} \right) = -k_{r2}^2 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_2(r)}{dr} \right) + k_{r2}^2 R_2(r) = 0, \quad (3.62)$$

$$\frac{1}{U_2(z)} \left[\frac{d^2 U_2(z)}{dz^2} \right] = k_{z2}^2 \Rightarrow \frac{d^2 U_2(z)}{dz^2} - k_{z2}^2 U_2(z) = 0. \quad (3.63)$$

Bu durumda ise $k_{z2} = k'_{z2} + ik''_{z2}$ iken $U_2(z)$ çözümü aşağıdaki gibi bulunur

$$U_2(z) = Ae^{k_{z2}z} + Be^{-k_{z2}z}. \quad (3.64)$$

Burada k_{z2} pozitifdir, ışıma koşulundan $z \rightarrow \infty$ iken $U_2(z) \rightarrow 0$ olacağından $A = 0$ bulunur, çözüm $U_2(z) = Be^{-k_{z2}z}$ 'ye indirgenir. Buradan $k_{z2} = k'_{z2} + ik''_{z2}$ yerine koyulursa çözüm

$$U_2(z) = Be^{-(k'_{z2} + ik''_{z2})z} = Be^{-k'_{z2}z} \cdot e^{-ik''_{z2}z} \quad (3.65)$$

olarak bulunur. Bu çözüm z ekseninin pozitif kısmında yayılan dalgaları ifade eder, bu nedenle aradığımız çözümdür. Buradan n 'inci mod için $u_1(r, z)$ ve $u_2(r, z)$ 'nin (z) bağımlı kısımları $U_{n1}(z)$ ve $U_{n2}(z)$ aşağıdaki gibi bulunur

$$\begin{aligned} U_1(z) &= U_{n1}(z) = A_n \sin(k_{zn1}z), \\ U_2(z) &= U_{n2}(z) = B_n e^{-k_{zn2}z}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

3.3.2. Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi

Katmanlardaki yatay dalga sayıları arasında $k_{rn1}^2 = k_{rn2}^2 = k_{rn}^2$ eşitliği mevcut iken dalga sayıları

$$\begin{aligned} k_1^2 &= k_{zn1}^2 + k_{rn}^2 \\ k_2^2 &= -k_{zn2}^2 + k_{rn}^2 \end{aligned} \quad (3.67)$$

gibi yazılır. Bu durumda $z = h$ 'daki süreklilik koşulları uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left. \frac{dU_{n1}(z)}{dz} \right|_{z=h} &= k_{zn1} A_n \cos(k_{zn1} h) \\ \left. \frac{dU_{n2}(z)}{dz} \right|_{z=h} &= -k_{zn2} B_n e^{-k_{zn2} h} \end{aligned} \quad (3.68)$$

ve $\rho_1 A_n \sin(k_{zn1} h) = \rho_2 B_n e^{-k_{zn2} h}$ iken

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{e^{-k_{zn2} h}}{\sin(k_{zn1} h)} \quad (3.69)$$

olmak üzere, A_n/B_n ifadesi (3.68) süreklilik eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left. \frac{dU_{n1}(z)}{dz} \right|_{z=h} &= \left. \frac{dU_{n2}(z)}{dz} \right|_{z=h} \\ k_{zn1} \cos(k_{zn1} h) \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{e^{-k_{zn2} h}}{\sin(k_{zn1} h)} &= -k_{zn2} e^{-k_{zn2} h} \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$k_{zn1}^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \cot^2(k_{zn1} h) = k_{zn2}^2$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemlerden $k_{zn1}^2 + k_{zn2}^2 = k_1^2 - k_2^2$ olmak üzere k_{zn2} terimi yok edilerek k_{zn1} için aşağıdaki gibi bir dispersiyon denklemi elde edilir

$$k_{zn1}^2 \left[1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \cot^2(k_{zn1} h) \right] = k_1^2 - k_2^2. \quad (3.71)$$

Bu denklemin $k_1^2 - k_2^2 > 0$ iken birkaç çözümü mevcuttur. Bu çözümlerden k_{zn2} 'yi gerçek yapanlar (3.67) denklemi ışığında kılavuzlanmış dalgalarıdır.

3.3.3. Kompleks Özdeğer Hesaplamaları

Dip materyalinin kum veya çamur olmasından dolayı akustik emilimi nedeniyle meydana gelen zayıflama, k_2 kompleks sayı olarak düşünülerek yani $k_2 = \omega/c_2 + i\alpha$ iken hesaplanabilir. Burada c_2 dipteki ses hızı, α ise zayıflama katsayısıdır. Bu durum k_{zn1} , k_{zn2} ve k_{rn} 'nin de kompleks olmasına sebep olacaktır. k_{rn} 'nin sanal kısmı yatay yayılım için zayıflama katsayısıdır. Buna göre dip zayıflamasını küçük varsayarsak yani $\alpha \ll \omega/c_2$ iken $k_{zn1} = a + ib$ olarak gösterildiğinde a ve b katsayıları bulunarak k_{zn1} elde edilecek, bu değerden k_{rn} 'nin sanal kısmı hesaplanacaktır. Bunun için $b \ll a$ kabul edildiği zaman dalga sayıları ifadeleri (3.71) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$(a + ib)^2 \left[1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \cot^2 (ah + ibh) \right] = \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_2} + i\alpha \right)^2 \quad (3.72)$$

$$\left(a^2 + 2aib - b^2 \right) \left[1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \cot^2 (ah + ibh) \right] = \frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - 2i\alpha \frac{\omega}{c_2} + \alpha^2$$

elde edilir. Burada $\alpha \ll \omega/c_2$ ve $b \ll a$ kabullerinden dolayı α^2 ve b^2 ihmal edilmiştir. Yine $\cot (ah + ibh)$ ifadesinin b civarında Taylor serisi açılımının üçüncü teriminden itibaren b^2 çarpanı geleceğinden

$$\cot (ah + ibh) = \cot (ah) + ibh \csc^2 (ah) + \dots$$

$$\cot^2 (ah + ibh) = \cot^2 (ah) - 2ibh \cot (ah) \csc^2 (ah) - \cancel{b^2 h^2 \csc^4 (ah)} \quad (3.73)$$

olmak üzere, açılım ilk iki terimiyle ifade edilebilir. Buradan (3.73) eşitliği (3.72) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& (a^2 + 2aib) \left[1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \left(\cot^2(ah) - 2ibh \cot(ah) \csc^2(ah) \right) \right] \\
& = \frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - 2i\alpha \frac{\omega}{c_2}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

halini alır. Köşeli parantez açılarak eşitlik

$$\left[a^2 + a^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \cot^2(ah) - a^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 2ibh \cot(ah) \csc^2(ah) + 2aib + \right. \tag{3.75}$$

$$\left. \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 2aib \cot^2(ah) - 4ab^2h \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \cot(ah) \csc^2(ah) \right] = \frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - 2i\alpha \frac{\omega}{c_2}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlikte b^2 çarpanı içeren terim yine ihmal edilirse, reel kısımların eşitliğinden a için k_{zn1} 'in (3.71) denklemi formunda

$$a^2 \left[1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \cot^2(ah) \right] = \frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} \tag{3.76}$$

olarak bir sonuç bulunur. Bu denklem transandantal bir denklem olup köklerin analitik bulunması zordur. Bu nedenle kökler sayısal olarak Gauss-Newton Metodunu esas alan, lineer olmayan denklemin köklerini bulma algoritması kullanılarak bulunmuştur [Björck, 1996]. (3.75) denkleminde sanal kısımların eşitliğinde, reel kısımların eşitliğindeki

$$\cot(ah) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 a} \right) \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right]^{1/2} \tag{3.77}$$

$$\sin^2(ah) = \left[1 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 a} \right)^2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right) \right]^{-1}$$

trigonometrik ifadeler kullanılarak b için bir eşitlik elde edilecektir. Bu kapsamda (3.75) denkleminin sanal kısımları arasında

$$\cancel{ab} + \cancel{ab} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \cot^2 ah - \cancel{a^2bh} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \cot ah \csc^2 ah = -\cancel{\alpha} \frac{\omega}{c_2} \quad (3.78)$$

eşitliği mevcuttur. Bu eşitlikte (3.77) eşitliklerindeki trigonometrik ifadeler yerlerine yazılarak

$$ab + ab \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 a} \right)^2 \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right] - a^2 bh \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 a} \right) \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right]^{1/2} \quad (3.79)$$

$$\left[1 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 a} \right)^2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right) \right] = -\alpha \frac{\omega}{c_2}$$

eşitliği elde edilir. Buradan parantezler açılıp,

$$ab + \frac{b}{a} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right) - abh \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right]^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 a} \right)^2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right) \right] = -\alpha \frac{\omega}{c_2}$$

sadeleştirmeler yapılırsa

$$ab + \frac{b}{a} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right) - abh \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right]^{1/2} -$$

$$bh \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right]^{1/2} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right) = -\alpha \frac{\omega}{c_2}$$

ve yeniden düzenlenirse

$$ab + \frac{b}{a} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) - ab - abh \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 a} \right)^2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right) \right] = -\alpha \frac{\omega}{c_2} \quad (3.80)$$

k_{zn1} 'in sanal kısmı b için

$$b \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) - ah \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 a} \right)^2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} - a^2 \right) \right] \right\} = -\alpha \frac{\omega}{c_2} \quad (3.81)$$

eşitliği elde edilir. Ancak istenilen, $k_{rn} = k_{rn1} = k_{rn2}$ 'nin sanal kısmının bulunmasıdır. Buradan $k_{rn}^2 = k_1^2 - k_{zn1}^2$ ve $k_{zn1} = a + ib$ ve $b \ll a$ iken

$$k_{rn}^2 = \frac{\omega}{c_1^2} - \left(a^2 + 2aib + b^2 \right) = \frac{\omega}{c_1^2} - a^2 - 2aib$$

olur. $k_{rn}'' \ll k_{rn}'$ iken $k_{rn} = k_{rn}' + ik_{rn}''$ olarak tanımlanırsa $(k_{rn}')^2 + 2ik_{rn}' \times k_{rn}'' = (\omega/c_1^2) - a^2 - 2aib$ olur. Burada sanal ve reel kısımlar eşitlenirse, $k_{rn}' \times k_{rn}'' = -ab$ ve $(k_{rn}')^2 = (\omega/c_1^2) - a^2$ bulunur. İkinci eşitlikten k_{rn}' çekilip birinci eşitlikte yerine yazılırsa k_{rn} 'nin sanal kısmı

$$k_{rn}'' = -ab \left(\frac{\omega}{c_1^2} - a^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \text{Im}(k_{rn}) \quad (3.82)$$

olarak bulunur [Kornhauser and Raney, 1955]. Buradaki b değeri (3.81) denkleminde elde edilir. a değerleri ise (3.76) transandantal denklemin kökleridir. Buradan bilinen terimlerle üst katmandaki dikey dalga sayıları $k_{zn1} = a + ib$ şeklinde yazılır. k_{zn1} değerleri bilindiğinden (3.67) eşitliklerinin birincisinden yatay yöndeki dalga sayısı k_{rn} hesaplanır. Sayısal olarak hesaplanan k_{rn} 'lerin doğruluğu, sanal kısımları (3.82) ile karşılaştırılarak kontrol edilir. Şartı sağlayan değerler, (3.76) transandantal denkleminin kökü olarak kabul edilir. (3.67) eşitliklerinin ikincisinden ise, bilinen k_{rn} değerine karşılık gelen alt katmandaki dikey dalga sayısı k_{zn2} hesaplanır. Çözümün tamamlanması için son olarak A_n katsayıların hesaplanması gerekmektedir.

A_n katsayısının bulunması: Çözümü tam elde edebilmek için gerekli A_n katsayısı (3.44) ortonormalite koşulu

$$\frac{1}{\rho_1} \int_0^h U_n^{(1)}(z) U_m^{(1)}(z) dz + \frac{1}{\rho_2} \int_h^\infty U_n^{(2)}(z) U_m^{(2)}(z) dz = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

uygulanarak elde edilen

$$\frac{1}{\rho_1} \int_0^h A_n^2 \sin^2(k_{zn1} z) dz + \frac{1}{\rho_2} \int_h^\infty B_n^2 e^{-2k_{zn2} z} dz = 1 \quad (3.83)$$

eşitliğinde süreklilik koşulları yardımıyla B_n terimleri yok edilerek

$$A_n = \sqrt{2\rho_1} \left[\left(h - \frac{\sin(2k_{zn1} h)}{2k_{zn1}} \right) + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^3 \frac{(\sin(k_{zn1} h))^2}{k_{zn2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.84)$$

olarak bulunur. Böylece tam çözüm (3.27) ve (3.66) denklemleri kullanılarak

$$u_{ayrık}(r, z) = \begin{cases} \frac{i\pi}{\rho_1} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn1} z_0) \sin(k_{zn1} z) H_0^1(k_{rn} r) & , \quad 0 \leq z \leq h \\ \frac{i\pi}{\rho_2} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn1} z_0) \sin(k_{zn1} h) e^{-k_{zn2}(z-h)} H_0^1(k_{rn} r) & , \quad z \geq h \end{cases} \quad (3.85)$$

şeklinde yazılır. Akustik problemlerde uygulamada genellikle uzak alanda ($k_n r \gg 1$) sonar performans modellerine ihtiyaç duyulduğundan, *Hankel fonksiyonu* için (3.29) asimptotik ifadesi

$$H_0^1(k_{rn} r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_{rn} r}} e^{i(k_{rn} r - \pi/4)}$$

kullanılarak, çözüm

$$u_{ayrık}(r, z) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2\pi} e^{i(\pi/4)}}{\rho_1} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn1} z_0) \sin(k_{zn1} z) \frac{e^{i(k_m r)}}{\sqrt{k_m r}} & , 0 \leq z \leq h \\ \frac{\sqrt{2\pi} e^{i(\pi/4)}}{\rho_2} \sum_{n=1}^N A_n^2 \sin(k_{zn1} z_0) \sin(k_{zn1} h) e^{-k_{zn2}(z-h)} \frac{e^{i(k_m r)}}{\sqrt{k_m r}} & , z \geq h \end{array} \right\} \quad (3.86)$$

olarak bulunur. Burada N yayılan maksimum ayrık mod sayısını gösterir. Buradan (2.19) denklemi kullanılarak sonar performans modellemesi için gereken İletim Kaybı değerleri hesaplanabilir.

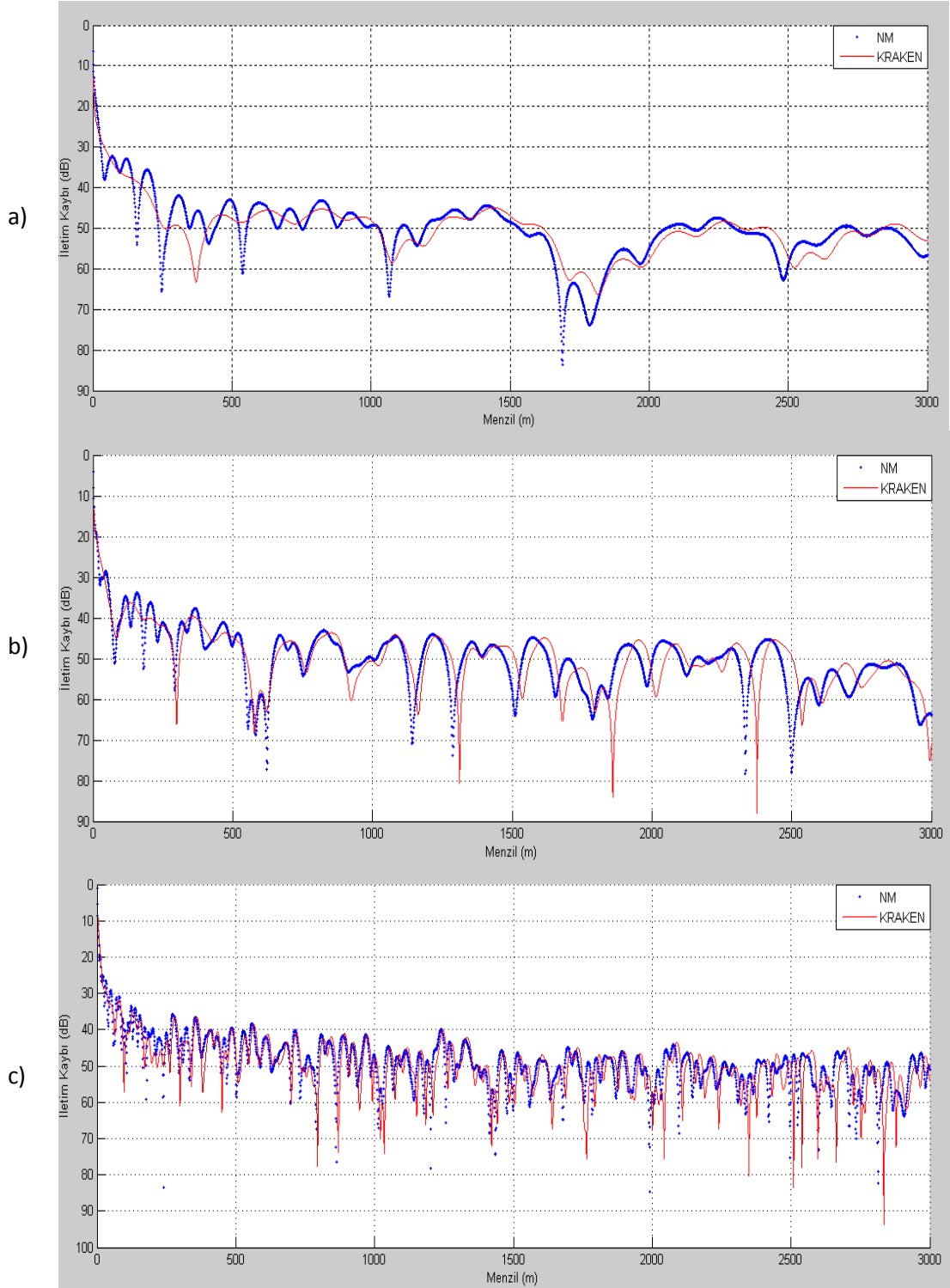
4. SAYISAL SONUÇLAR ve DOĞRULAMA

Normal Mod tabanlı sayısal bir çözüm sunan KRAKEN programı, dalga kılavuzu içerisindeki akustik yayılımı modellemek için kullanılır. KRAKEN sadece reel eksen özdeğerleri içerir ve ortamdaki zayıflama pertürbasyon teorisi ile değerlendirilir. Sürekli spektrumlu modları ve elastik ortamdaki zayıflamayı içermez, yalnız ayırık normal mod setini içerir bu nedenle kısa mesafelerde dik açılı yayılımlarını hesaba katmaz [Porter and Bucker, 1987]. KRAKEN su altı akustik dalga yayılımını frekans uzayında kullanarak İletim Kaybı'nı hesaplayan ve yaygın olarak kullanılan bir programdır. Literatürde doğrulama amaçlı olarak referans verilmekte olup, özdeğerlerin özellikle derin sular ve uzun menzillerde (okyanus ortamı), daha doğru biçimde hesaplanmasına dayalıdır. Söz konusu özdeğerlerde yapılabilecek hatalı hesaplamalar ise menzile-bağımlı akustik dalga çözümlerinde *faz kayma* hataları olarak ortaya çıkmaktadır. Sıvı-Katı probleminin çözümü için KRAKEN'in KRAKENC adında farklı bir sürümü kullanılmıştır. KRAKENC'nin KRAKEN'den farkı dip kayıplı ortamlarda hesap yapabilmesidir.

Bu bölümde MATLAB programı kullanılarak hesaplanan İletim Kaybı sonuçları, KRAKEN yazılımı sonuçları ile karşılaştırılmış ve yüksek oranda uyum gözlenmiştir. Doğrulamalar yapılırken tek frekanslı sinusoidal ve noktasal bir kaynak kullanılacaktır. Üst katman sabit derinlikli, homojen ve sabit ses hızına sahip, alt katman ise yarı sonsuz uzay olup kayıpsız ve kayıplı olduğu durumlar için hesaplamalara ayrı ayrı dahil edilmiştir. Kaynak ve alıcı üst katmanda olup varsayılan değerleri $f = 60 \text{ Hz}$, $h = 100 \text{ m}$, üst ve alt katmandaki ses hızları sırasıyla $c_1 = 1500 \text{ m/sn}$ ve $c_2 = 2000 \text{ m/sn}$, kaynak ve alıcı yeri $h = 25 \text{ m}$ 'dir. Ayrıca ses hızı derinlik değişimi $c(z) = 1500[1 - 0.00737(\bar{z} - 1 + e^{-\bar{z}})]$ olarak verilen MUNK değişken ses hızı profili için de sonuçlar karşılaştırılmıştır. Burada $\bar{z} = 2(z - 1300)/1300$ olarak verilmiştir [Munk, 1974]. Alt katmanın kayıplı olduğu Sıvı-Katı durumunda kayıp katsayısı terimi $\alpha = 0.005 \text{ dB/m}$ olarak alınmıştır. Sırasıyla bir değer değiştirilirken diğer değerler sabit tutularak sonuçlar incelenecektir. Bu kapsamda Şekil 4.1 – 4.4 Sıvı-Sıvı durumu için, Şekil 4.5 – 4.9 Sıvı-Katı durumu için elde edilmiş olup ilerleyen bölümlerde verilmiştir.

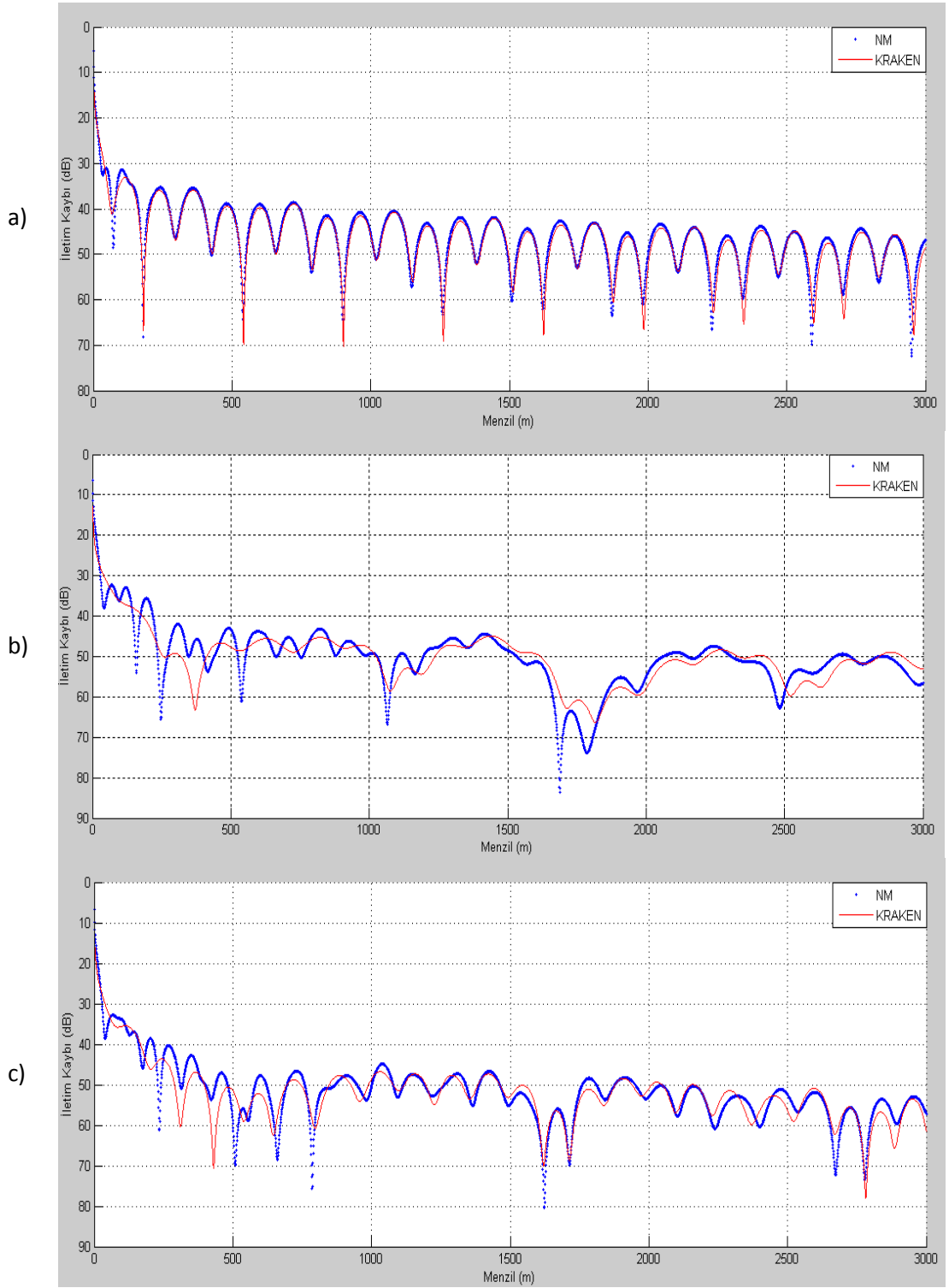
4.1. Sıvı – Sıvı Durumu için Karşılaştırma

4.1.1. Farklı Frekanslar için Karşılaştırmalar



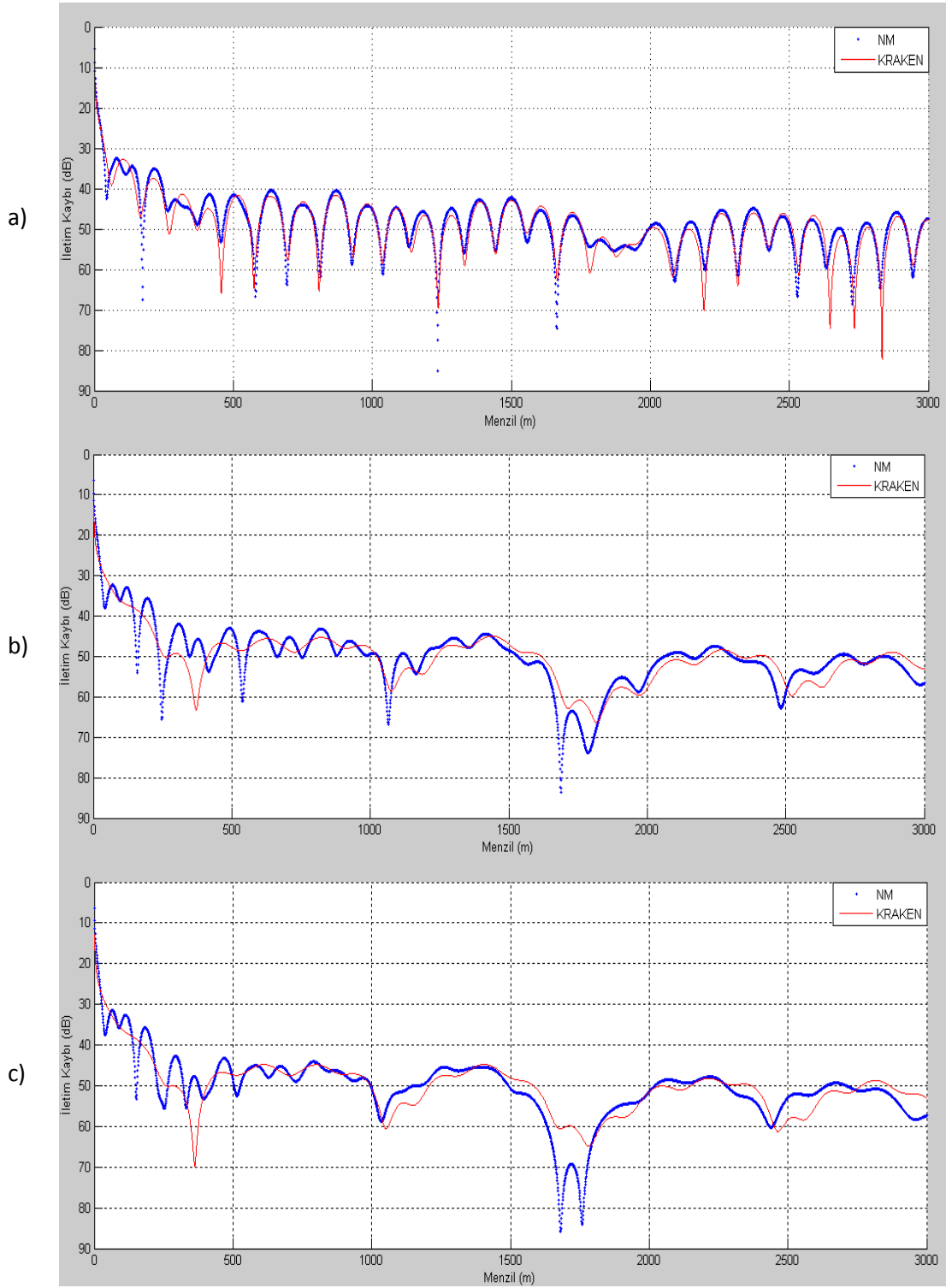
Şekil 4.1. a) $f = 60 \text{ Hz}$, b) $f = 100 \text{ Hz}$, c) $f = 250 \text{ Hz}$ için KRAKEN ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.

4.1.2. Farklı Derinlikler için Karşılaştırmalar



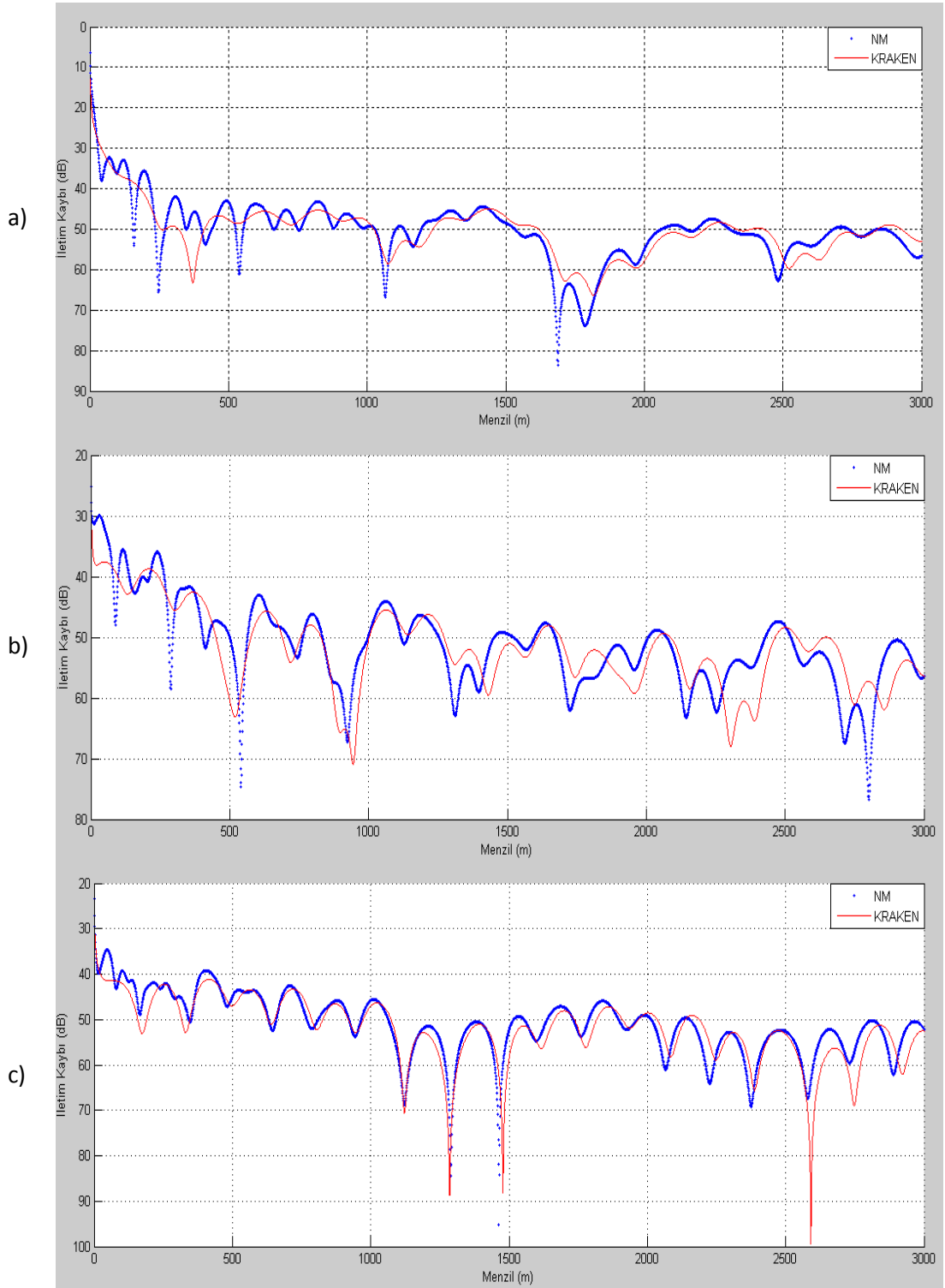
Şekil 4.2. a) $h = 50 \text{ m}$, b) $h = 100 \text{ m}$ c) $h = 150 \text{ m}$ için KRAKEN ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.

4.1.3. Farklı Ses Hızları için Karşılaştırmalar



Şekil 4.3. a) $c_1 = 1400 \text{ m/sn}$, b) $c_1 = 1500 \text{ m/sn}$, c) MUNK değişken ses hızı profili için KRAKEN ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.

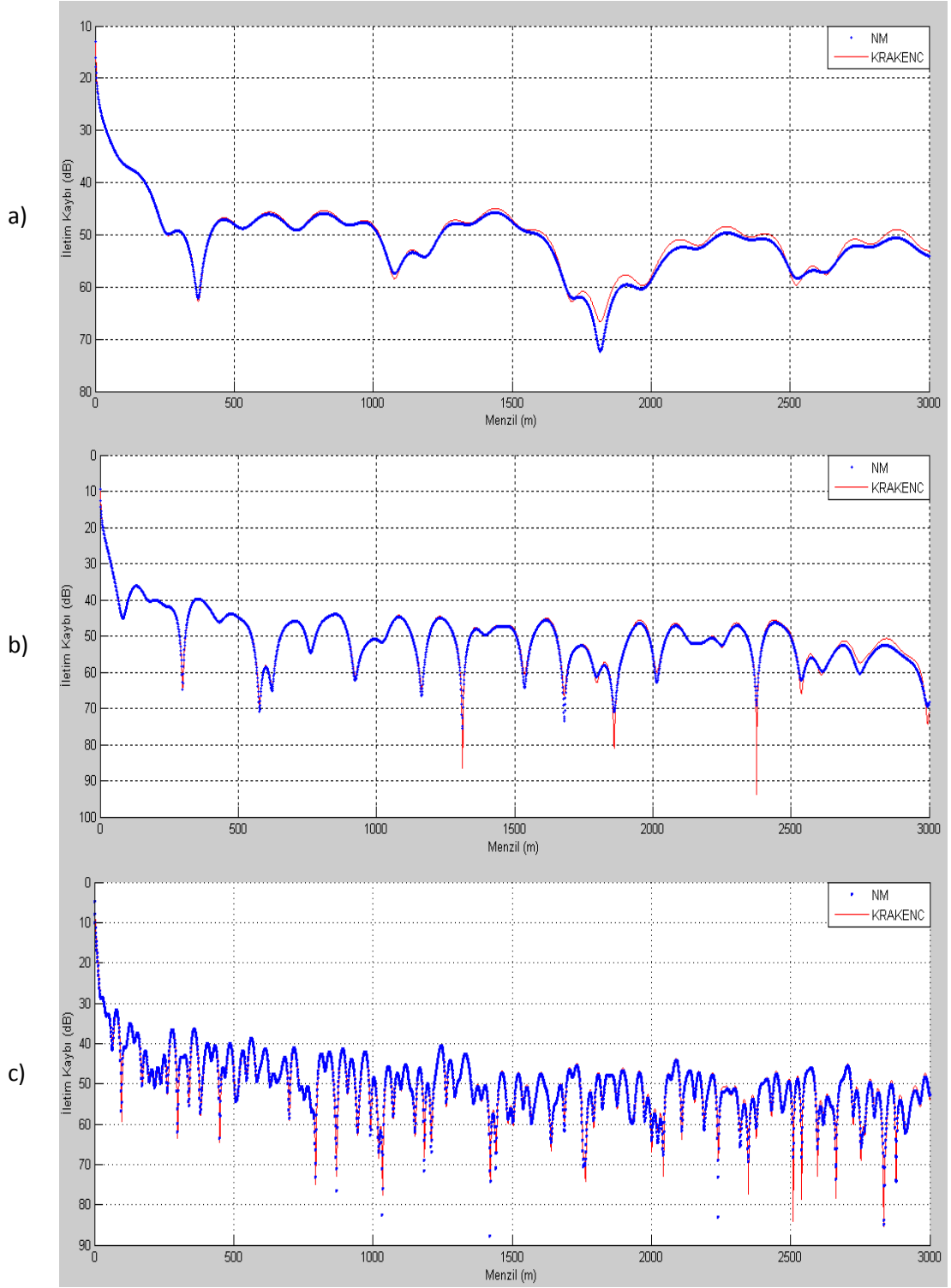
4.1.4. Farklı Kaynak Yerleri için Karşılaştırmalar



Şekil 4.4. a) $z_0 = 25$ m, b) $z_0 = 50$ m, c) $z_0 = 75$ m için KRAKEN ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.

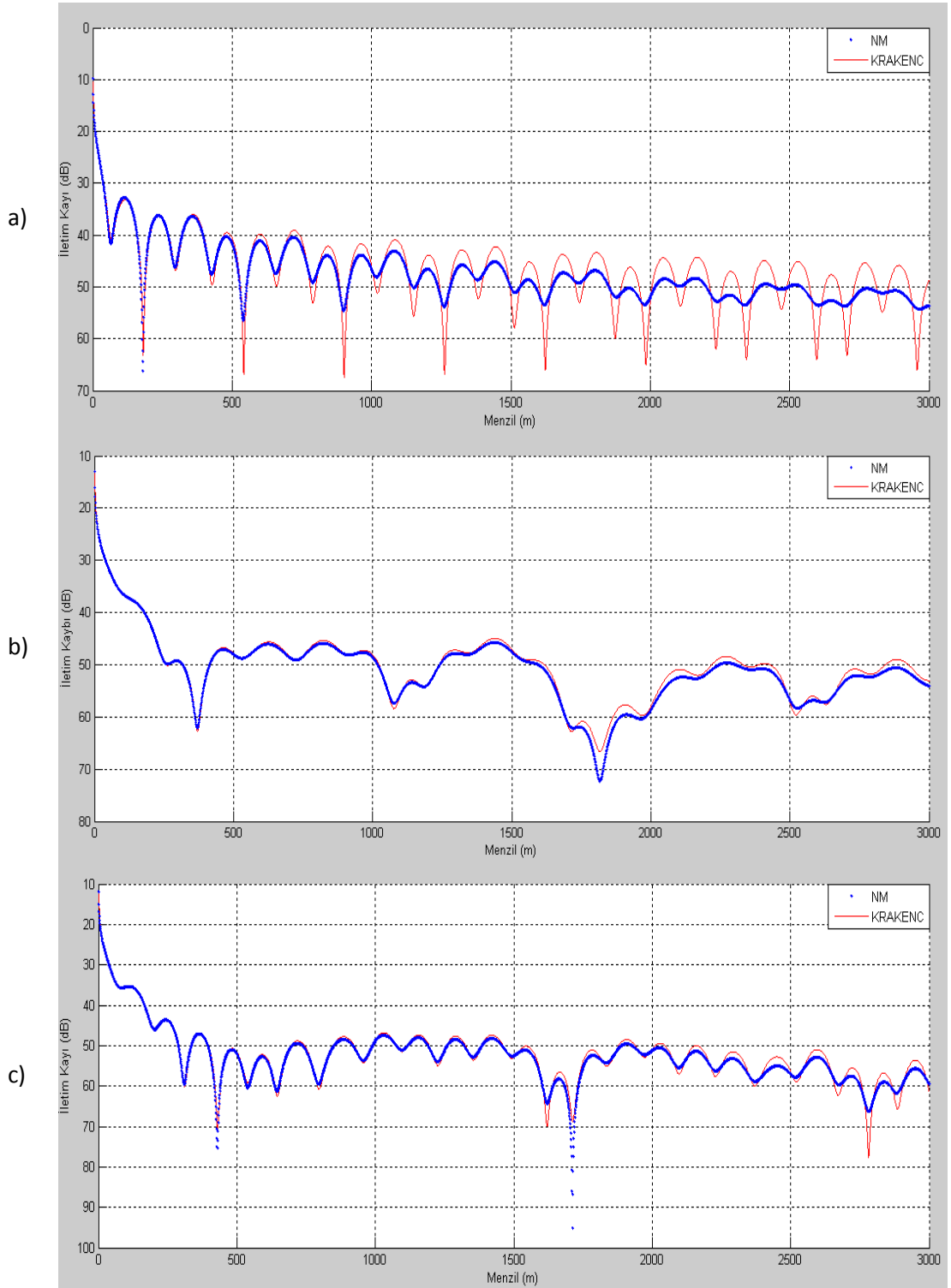
4.2. Sıvı – Katı Durumu için Karşılaştırma

4.2.1. Farklı Frekanslar için Karşılaştırmalar



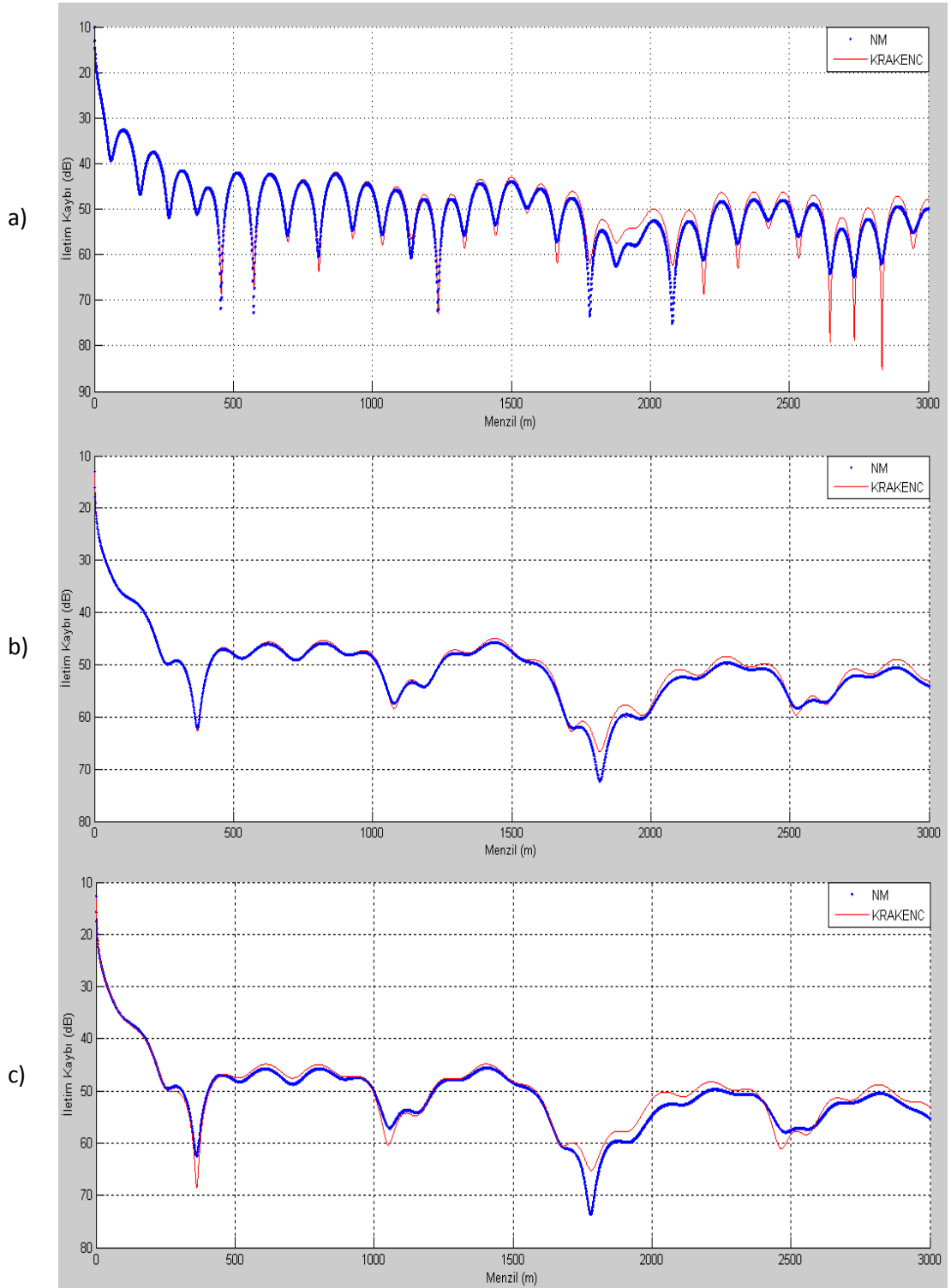
Şekil 4.5. a) $f = 60 \text{ Hz}$, b) $f = 100 \text{ Hz}$, c) $f = 250 \text{ Hz}$ için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.

4.2.2. Farklı Derinlikler için Karşılaştırmalar



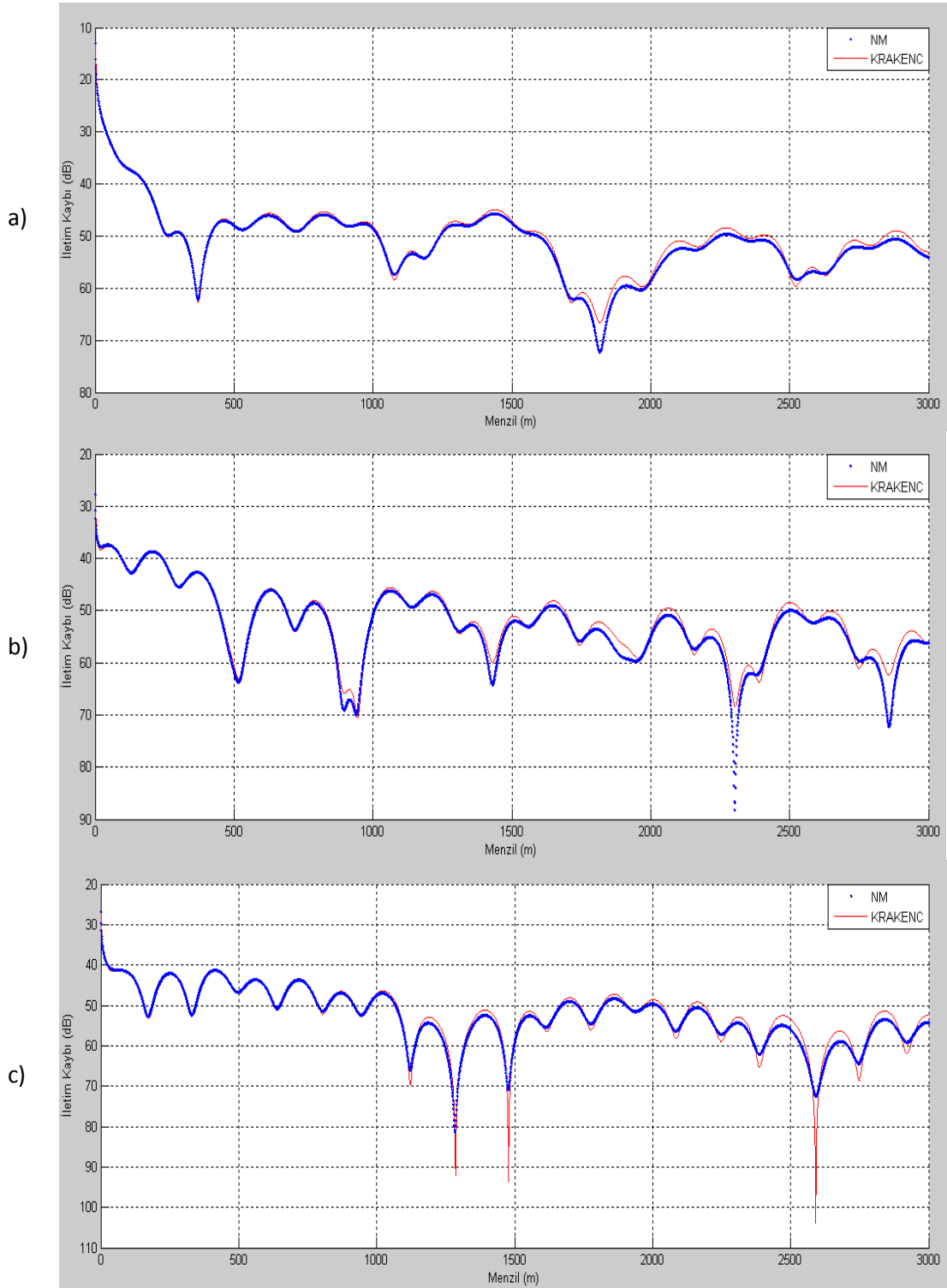
Şekil 4.6. a) $h = 50$ m, b) $h = 100$ m, c) $h = 150$ m için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.

4.2.3. Farklı Ses Hızları için Karşılaştırmalar



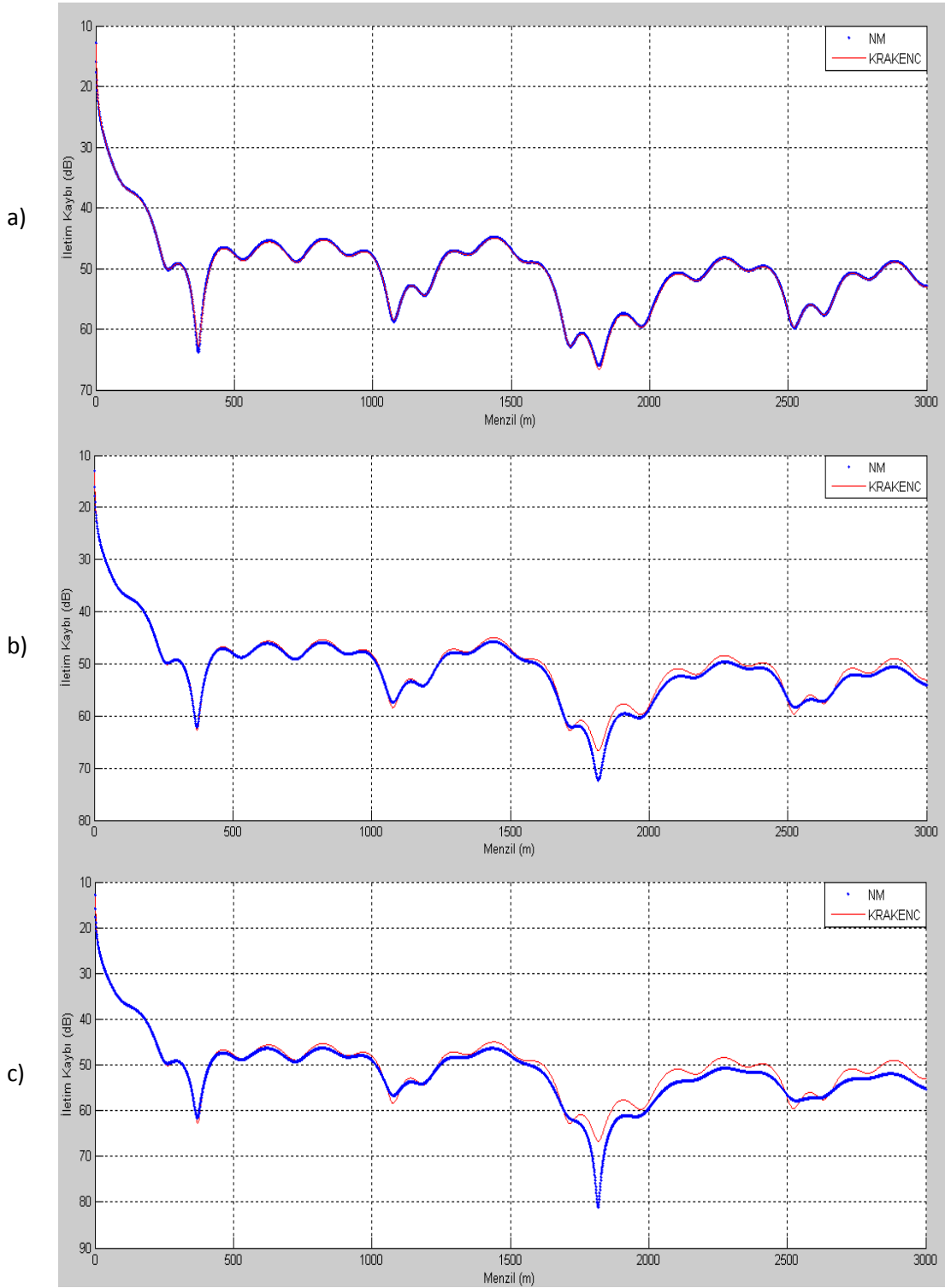
Şekil 4.7. a) $c_1 = 1400 \text{ m/sn}$, b) $c_1 = 1500 \text{ m/sn}$, c) MUNK değişken ses hızı profili için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.

4.2.4. Farklı Kaynak Yerleri için Karşılaştırmalar



Şekil 4.8. a) $z_0 = 25 \text{ m}$, b) $z_0 = 50 \text{ m}$, c) $z_0 = 75 \text{ m}$ için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.

4.2.5. Farklı Kayıp Katsayıları için Karşılaştırmalar



Şekil 4.9. a) $\alpha = 0.0001 \text{ dB/m}$, b) $\alpha = 0.005 \text{ dB/m}$, c) $\alpha = 0.01 \text{ dB/m}$ için KRAKENC ve Normal Mod (NM) yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması.

Kayıp katsayısı arttıkça, $\alpha \ll \omega/c_2$ kabulünden dolayı çözümün uyumu azalmaktadır.

5. SONUÇLAR ve YORUMLAR

Bu tez çalışmasında dip kayıplı olarak modellenen iki katmanlı su altı akustik problemi iki boyutlu eksenel simetrik silindirik koordinatlarda ele alınarak Helmholtz denklemine dayalı ve analitik olarak çözülmüştür. Deniz yüzeyi basınçtan arındırılmış sınır koşulu ile modellenirken, dip bölgesi derinlik boyunca yarı sonsuz düzlem olarak modellenmiştir. Sıvı-Katı arayüzünde süreklilik koşullarının uygulanması ile elde edilen transandantal denklemin köklerinin sayısal olarak hesaplanması ile İletim Kaybı'nın karakteristiği üzerine dip kaybının etkisi incelenmiştir. Sıvı-Sıvı ve Sıvı-Katı problemi çözümleri, sonuçların doğruluğunu kontrol etmek için sırası ile KRAKEN ve KRAKENC program sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar neticesinde, az sayıda modun yayıldığı düşük frekans ve çok sayıda modun yayıldığı, kaybın daha fazla olduğu yüksek frekans karşılaştırmalarında ve diğer karşılaştırmalarda oldukça iyi bir uyum gözlenmiştir. Ayrıca MUNK değişken ses hızı profili için de karşılaştırmalar sunulmuş ve iyi bir uyum gözlenmiştir.

Kaynak yeri ve derinlikler değiştirilerek yapılan karşılaştırmalarda, kaynak, kanal derinliğinin tam ortasına yerleştirildiğinde, göze çarpan bir uyumsuzluk gözlenmiştir. Ayrıca Sıvı-Katı problemi sonuçlarının karşılaştırılmasında, problemin çözümünde $\alpha \ll \omega/c_2$ kabülü yapıldığından, kayıp katsayısı arttırıldığında uyumluluğun azaldığı gözlenmiştir. Yapılan karşılaştırmalarda görülen diğer uyumsuzlukların, KRAKEN programının problemi sayısal olarak çözmesinden kaynaklandığı değerlendirilmektedir.

Gelecekte bu çözüm, dalga sayılarının reel ve sanal kısımlarının birbirleriyle kıyaslanabileceği yüksek dip kaybı durumuna genişletilebilecektir. Ayrıca dipte kayba neden olan özellikler (enlemsel dalgalar, iç sürtünme v.b.) özel olarak tespit edilip, sürekli modlar kapsamında etkileri araştırılabilecektir.

6. KAYNAKLAR

1. Abramowitz M. and Stegun I. A., (1970), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Cambridge, Massachusetts.
2. Aksoy S., (2010), *Su Altı Akustik Dalga Yayılımı ve Sonar Sistemleri Ders Notları*, Elektronik Mühendisliği Bölümü, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Gebze, Kocaeli.
3. Apostol T. M., (1967), *Calculus Volume I, One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, 2nd ed., John Wiley and Sons Inc, New York.
4. Björck A., (1996), *Numerical Methods for Least Squares Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
5. Brekhovskikh L. M., (1960), *Waves in Layered Media*, Academic Press Inc., New York.
6. Brekhovskikh L. M. and Lysanov Y., (1982), *Fundamentals of Ocean Acoustics*, Springer – Verlag, Berlin.
7. Brekhovskikh L. M. and Yu L. P., (2003), *Fundamentals of Ocean Acoustics*, Springer.
8. Bronson R., (2003), *Differential Equations*, Schaum's Easy Outlines, Mc Graw-Hill.
9. Bucker H. P. and Morris H. E., (1965), *Normal-Mode intensity calculations for a constant-depth shallow-water channel*, Journal of the Acoustical Society of America, 37, 1010-17.
10. Bucker H. P., (1970), *Sound propagation in a channel with lossy boundaries*, Journal of the Acoustical Society of America, 48, 1187-94.
11. Buckingham M. J. and Giddens E. M., (2006), *On the acoustic field in a Pekeris waveguide with attenuation in the bottom half-space*, Journal of the Acoustical Society of America, 119, 123-42.
12. Buckingham M. J. and Giddens E. M., (2006), *Theory of sound propagation from a moving source in a three-layer Pekeris waveguide*, Journal of the Acoustical Society of America, 120, 1825-41.
13. Carey W. M., Pierce A. D. and Evans R. E., (2008), *On the exponent in the power law for the attenuation at low frequencies in sandy sediments*, Journal of the Acoustical Society of America, 124 (5), EL271-77.

14. Chew W. C., (1990), *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, Von Nostrand Reinhold, New York.
15. Clay C. S. and Medwin M., (1977), *Fundamentals of Acoustical Oceanography*, Wiley, New York.
16. Duffy D.G., (2001), *Green Functions with Applications*, Chapman and Hal/CRC.
17. Ellis D. D. and Chapman D. M. F., (1985), *A simple shallow water propagation model including shear wave effects*, Journal of the Acoustical Society of America, 78, 2087-95.
18. Ewing C. M., Jardetsky W. M. and Press F., (1957), *Elastic Waves in Layered Media*, Mc Graw-Hill, New York.
19. George V. F., (1994), *Ocean and Seabed Acoustics*, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
20. Grant B. D., (1997), *Internal friction and boundary conditions in lossy fluid seabeds*, Journal of the Acoustical Society of America, 101 (1), 233-40.
21. Hawker K. E., Williams W. E. and Foreman T. L., (1979), *A study of the acoustical effects of sub-bottom absorption profiles*, Journal of the Acoustical Society of America, 65 (2), 360-67.
22. Ingenito F., (1973), *Measurements of mode attenuation coefficients in shallow water*, Journal of the Acoustical Society of America, 53, 858-63.
23. Kalantar-Zadeh K. and Kamarai M., (1997), *Applying Normal Mode Method for calculation of acoustic wave in the muddy bottom coastal regions*, Canadian Crown Copyrights, 612-17.
24. Kornhauser E. T. and Raney W. P., (1955), *Attenuation in shallow-water propagation due to an absorbing bottom*, Journal of the Acoustical Society of America, 27, 689-92.
25. Munk W. H., (1974), *Sound channel in an exponentially stratified ocean with applications to SOFAR*, Journal of the Acoustical Society of America, 55, 220-26.
26. Pekeris C. L., (1948), *Theory of propagation of explosive sound in shallow water*, Geological Society of America, Memoir 27, 1-117.
27. Pierce A. D., (2009), *Relation of sound absorption and shallow water modal attenuation to plane wave attenuation*, Journal of the Acoustical Society of America, 126 (5), EL153-59.

28. Porter M. B. and Bucker H. P., (1987), *Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields*, Journal of the Acoustical Society of America, 82, 1349-59.
29. Porter M. B. (1992), *The KRAKEN Normal Mode Program*, Technical report, SACLANT Undersea Research Center.
30. Sommerfeld A., (1949), *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York.
31. Stickler D. C., (1975), *Normal-Mode program with both the discrete and branch line contributions*, Journal of the Acoustical Society of America, 57 (4), 856-61.
32. Tindle C. T., (1979), *The equivalence of bottom loss and mode attenuation per cycle in underwater acoustics*, Journal of the Acoustical Society of America, 66 (1), 250-55.
33. Tindle C. T. and Weston D. E., (1980), *Connection of acoustic beam displacement, cycle distances, and attenuations for rays and normal modes*, Journal of the Acoustical Society of America, 65 (5), 1614-22.
34. Tindle C. T. and Zhang Z. Y., (1993), *Continuous modes and shallow water sound propagation*, IEEE, I, 81-86.
35. Tolstoy I., (1955), *Note on the propagation of normal modes in inhomogeneous media*, Journal of the Acoustical Society of America, 27, 274-77.
36. Urlick R. J., (1975), *Principles of Underwater Sound*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York.
37. Weston D. E., (1960), *A Moiré Fringe analog of sound propagation in shallow water*, Journal of the Acoustical Society of America, 32, 647-54.
38. Weston D. E. and Tindle C. T., (1979), *Reflection loss and mode attenuation in a Pekeris model*, Journal of the Acoustical Society of America, 66, 872-79.
39. Williams A. O., (1976), *Hidden depths – Acceptable ignorance about ocean bottoms*, Journal of the Acoustical Society of America, 59, 1175-79.
40. Zhang L., Da L. and Lu X., (2007), *Sound propagation in two-axis underwater channel based on beam-displacement ray-mode theory*, Chinese Journal of Oceanology and Limnology, 25 (3), 300-03.

ÖZGEÇMİŞ

Aslan ÖZKAYA 1981 yılında Erzurum’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul Pendik’te tamamladı. 1999 yılında Sakarya Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü’nde öğrenimine devam etti. 2003 yılında bu bölümden mezun olduktan sonra Türk Deniz Kuvvetleri’nde Su Altı Akustik Sistemleri Elektroniği üzerine çalışmaya başladı. Çalışmalarına halen Gölcük’te devam etmektedir.

