

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



SES DALGALARININ İÇ YÜZEYİ YUTUCU
BİR TABAKA İLE KAPLANMIŞ DAİRESEL
SİLİNDİRİK BİR OYUKTAN KIRINIMI

Ahmet DEMİR

109940

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

Prof.Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

GEBZE

2001

.....Ahmet DEMİR.....'ın tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik
ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 16.01.2001..... tarih ve
.....2001/1.2..... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından
.....Ma. Lemar..... Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi
olarak kabul edilmiştir.



JÜRİ

ÜYE
(Tez Danışmanı)

ÜYE

Prof. Dr. Gökhan UZGÖREN

ÜYE

Doç. Dr. Ali ALKUMRU

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
.....29.01.2001..... tarih ve 2001/1.3..... sayılı kararı.



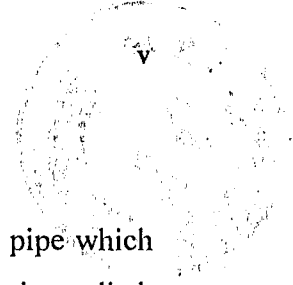
ÖZET

Bu çalışmada, yanal yüzeyi ile oyuk tabanı farklı admitans değerleri ile karakterize edilmiş dairesel silindir kesitli yarı sonsuz bir borudan düzlemsel dalgaların kırınımı Wiener-Hopf tekniği kullanılarak incelenmiştir. $\rho=a, -l \leq z \leq 0$ ile belirli yanal duvarın yüzey admitansı η_1 , $z=-l, \rho \leq a$ ile tanımlı oyuk tabanının admitansı ise η_2 ile gösterilecektir. Borunun dış yüzeyinin rijid olduğu varsayılmıştır.

Bu kırınım problemine ilişkin sınır-değer problemi, borunun dış bölgesinde Fourier dönüşümü yöntemi kullanılarak, borunun içinde ise Dini serileri yardımı ile bir Wiener-Hopf denkleme indirgenmiştir. Bu denklemin içerdiği sonsuz bilinmeyenli sonsuz sayıdaki lineer cebirsel denklem sistemi ise, çok küçük bir hata payı ile belirli bir sayıda kesilerek sayısal olarak hesaplanmıştır.

Bu denklem sisteminin sayısal çözümü borunun yarıçapı, oyukun derinliği, yanal duvar admitansı ve oyuk tabanı admitansının değişik değerlerine göre bulunarak, bu parametrelerin ortaya çıkardığı rezonans etki grafiklerle gösterilmiştir.

SUMMARY



In this work, the scattering of plane waves by semi-infinite hollow pipe which has different admittances for its lateral surface and bottom of the cavity is studied. The lateral wall of the pipe at $\rho=a, -l \leq z \leq 0$ is assumed to be characterized by a relative surface admittance η_1 while the relative surface admittance of bottom of the cavity is η_2 at $z=-l, \rho \leq a$. The diffraction problem associated with the boundary value problem is formulated into a Wiener-Hopf equation of the second kind and then solved approximately. The solution contains an infinite set of constants satisfying infinite system of linear algebraic equation. Numerical solution of this system is obtained for various values of the lateral surface admittance, bottom of the cavity admittance, radius of the pipe and depth of the cavity. The effects of these parameters on resonance is demonstrated.

TEŞEKKÜR

Belirtmeliyim ki, bu tezin hazırlanması esnasında birçok kişinin maddi ve manevi desteği beni daha çok çalışmaya, bu gücü yitirdiğim anlarda daha azimle işe koyulmaya yöneltmiştir.

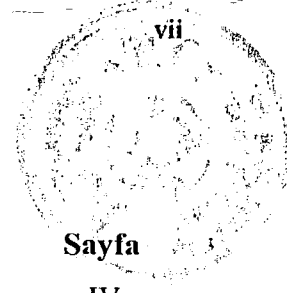
Öncelikle, bilim hayatına atılmamda büyük rol oynayan ve bu çalışmamda gerekli her türlü ortamı bana hazırlayan, hiçbir zaman yardım ve tavsiyelerini esirgemeyen ve bilim adamlığını bir yaşam tarzı olarak benimseyen kişiliği ile daima örnek aldığım tez danışmanım Prof. Dr. Alinur Büyükaksoy'a, değerli hocalarım Prof. Dr. Tahir Aliyev ve Doç. Dr. Yury Tuchkin'e, aynı odayı paylaştığım ve çoğu kez çalışmalarını böldüğüm Yrd. Dç. Dr. Mustafa Nadar'a zahmetime katlandığı için teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm araştırma görevlisi arkadaşlarıma özellikle Fatih Dikmen'e kritik tavsiyeleri sebebiyle teşekkürler.

Ve bu noktaya gelmemde hakkı ödenemez emekleri olan ve öğrenim hayatım boyunca çalışmalarımı etkileyebilecek hiçbir problemin oluşmasına imkan tanımayan ailem. Her zaman yanımdaydınız.

HEPİNİZE SONSUZ TEŞEKKÜRLER.....

İÇİNDEKİLER DİZİNİ



ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
1. GİRİŞ	1
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ	2
2.1 Problemin Formülasyonu	2
2.2 Sınır Koşulları ve Spektral Katsayıların Belirlenmesi	3
2.3 Modifiye Wiener-Hopf Denkleminin Yaklaşık Çözümü	9
2.4 Oyuk İçindeki Alanın Gösterilimi	10
3. SAÇILAN ALANIN ANALİZİ	14
4. SAYISAL UYGULAMALAR VE ÖRNEKLER	15
4.1 Sayısal Hesaplamalar	15
4.2 Sayısal Örnekler	17
5. SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR	29
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	31

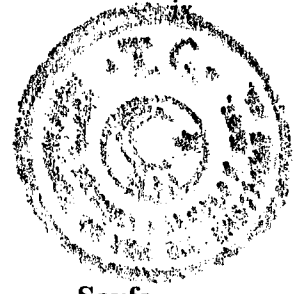
ŞEKİLLER DİZİNİ



Şekil

2.1 Problemin Geometrisi	2
2.2 Kompleks α -düzlemi	4
3.1 Küresel koordinatlar	14
4.1 Toplam Kırınan Alan Genliğinin Kesim Sayısı N 'e Göre Değişimi	16
4.2 Toplam Kırınan Alan Genliğinin Oyuk Derinliği l ile Değişimi	17
4.3 Toplam Kırınan Alan Genliğinin Oyuk Derinliği l 'ye Göre Değişimi	18
4.4 Toplam Kırınan Alan Genliğinin Oyuk Derinliği l 'ye Göre Değişimi	20
4.5 Toplam Kırınan Alan Genliğinin Oyuk Derinliği l 'ye Göre Değişimi	21
4.6 Toplam Kırınan Alan Genliğinin Borunun Yarıçapı a ile Değişimi	22
4.7 Toplam Kırınan Alan Genliğinin ($\eta_1=iX_1$), $X_1>0$ İçin Değişimi	23
4.8 Toplam Kırınan Alan Genliğinin ($\eta_1=iX_1$), $X_1<0$ İçin Değişimi	24
4.9 Toplam Kırınan Alan Genliğinin ($\eta_2=iX_2$), $X_2>0$ İçin Değişimi	25
4.10 Toplam Kırınan Alan Genliğinin ($\eta_2=iX_2$), $X_2<0$ İçin Değişimi	26
4.11 Toplam Kırınan Alan Genliğinin Pozitif Saf Reel η_2 İçin Değişimi	27
4.12 Toplam Kırınan Alan Genliğinin Oyuk Yanal Yüzey Admitansı X_1 'e Göre Değişimi	28

TABLÖLAR DİZİNİ



Tablo

Sayfa

4.1 ka nın Farklı Değerleri İçin ξ_n ve β_n 'ler

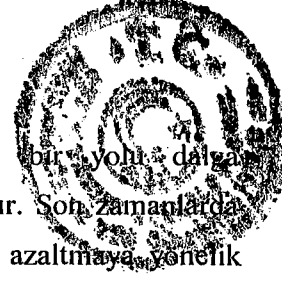
19

4.1 η_1 in Farklı Değerleri İçin ξ_n ve β_n 'ler

19



1. GİRİŞ



Akustik dalga kılavuzlarında yayılan sesi zayıflatmanın bir yolu, dalga kılavuzunun içini akustik olarak yutucu bir malzemeyle kaplamaktır. Son zamanlarda modern turbofan jet motorlarından kaynaklanan gürültü kirliliğini azaltmaya yönelik çabalar gürültünün akustik bakımdan yutucu kaplamalar aracılığı ile azaltılmasını gündeme getirmiş ve bu yöndeki araştırmaların yoğunlaşmasına neden olmuştur. Yutucu kaplamalar uçak motorlarındaki gürültünün azaltılmasında başarı ile kullanılmaktadır. İçi kaplanmış borulara ilişkin yapılan teorik çalışmaların çoğu uzaya radyasyon yapmayan sonsuz uzun borulara kısıtlanmış bulunmaktadır [Morse,1939],[Cremer,1953], [Neyfeh,Kaiser&Telinois,1975], [Lapin,1975]. Oysa pratikte, bu borular sonlu olup ses dalgası borunun ağzından uzaya yayılmaktadır. İçi akustik yutucu bir malzeme ile kaplı yarı sonsuz bir borudan ses dalgalarının radyasyonu A.D.Rawlins [Rawlins,1978] tarafından incelenmiş, daha sonra silindirik borunun kalınlığının sıfır olmadığı ve iç ve dış yüzeylerinin farklı empedanslara sahip olduğu genel durum Büyükaksoy ve Polat tarafından ele alınmıştır [Polat,1996], [Büyükaksoy&Polat,1998]. Diğer bir önemli gürültü kaynağı da yarı sonsuz içi boş boruların içindeki bir sonlandırma ile oluşan oyuklardır(kavite).Bu çalışmada bir düzlemsel akustik dalga kılavuzundan kırınımı incelenecektir. Bu incelemede akustik bakımdan yutucu tabaka bir empedans koşulu ile modellenecektir. Toplam alan dairesel silindirik oyukun içerisinde Dini serileri aracılığı ile, silindirin dışında ise Fourier integralleri ile ifade edilecek ve problem ikinci türden bir Modifiye Wiener-Hopf problemine indirgenecektir. Faktörizasyon ve dekompozisyon tekniklerinin uygulanması sonucunda Modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümü sonsuz bilinmeyenli, sonsuz boyutlu bir cebirsel lineer denkleminin çözümünü gerektirecektir. Bu denklem sistemi çok iyi bir yaklaşıklıkla sayısal olarak çözülecek ve silindirin yarıçapı, oyuk derinliği, oyuk iç yüzey empedansı gibi parametrelerin kırınım olayına etkisi geniş bir biçimde incelenecektir.

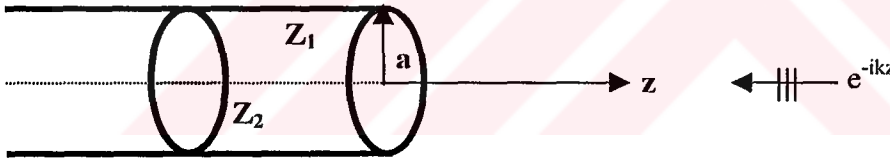
2.PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

2.1 Problemin Formülasyonu

Bu çalışmada (ρ, z) silindirik koordinatları göstermek üzere zamanla harmonik değişen düzlemsel dalgaların $B : \{0 \leq \rho \leq a, z \leq 0\}$ bölgesinde bulunan ve $z = -l$ de bir empedans yüzeyi ile sonlandırılmış silindir kesitli yarı-sonsuz bir borudan saçılması incelenecektir. Silindirin dış yüzeyinin rijid olduğu varsayılacaktır. Bu aşamada, akustik basınca ve hıza, sırası ile, $p = i\omega\rho_0 u$ ve $\vec{v} = \text{grad } u$ bağıntıları ile bağlı u skaler potansiyelini tanımlamak yerinde olacaktır. Burada ρ_0 dış ortamın yoğunluğunu göstermektedir ve ω , açısal frekans olmak üzere potansiyel fonksiyonunun zamanla değişiminin $e^{-i\omega t}$ çarpanı ile karakterize edildiği varsayılmıştır. u hız potansiyeli cinsinden yutucu kaplamayı modelleyen sınır koşulu [Morse&Ingard,1961]

$$\left(ik\eta + \frac{\partial}{\partial n} \right) u(\rho, z) = 0$$

şeklinde olup burada k boş uzaya ilişkin dalga sayısını, $\eta = \rho_0 c / Z$ kaplamanın bağlı admitansını, c ses hızını ve Z akustik empedansı göstermektedir.



Şekil 2.1. Problemin Geometrisi

Oyuğun yanal duvarı ile tabanının farklı yutucu malzemelerle kaplı olduğu varsayılmıştır. Z_0 ortamın karakteristik empedansını göstermek üzere oyuğun $\rho = a - 0, -l \leq z \leq 0$ ile belirli yanal yüzeyinin $\eta_1 = Z_0/Z_1$, $z = -l, 0 \leq \rho \leq a$ ile belirli taban yüzeyinin de $\eta_2 = Z_0/Z_2$ admitansı ile karakterize edildiği kabul edilmektedir.

Bundan sonraki analiz bakımından toplam alan $u(\rho, z)$ yi değişik bölgelerde aşağıdaki gibi ifade etmek uygun olacaktır.

$$u^T = \begin{cases} u_1(\rho, z) + u^i & , \rho > a \\ u_2(\rho, z) + u^i & , \rho < a, z > 0 \\ u_3(\rho, z) & , \rho < a, z < 0 \end{cases} \quad (1a)$$

Burada u^i gelen dalga olup

$$u^i = e^{-ikz}$$

(1b)

ile verilmiştir.

2.2 Sınır Koşulları ve Spektral Katsayıların Belirlenmesi

Amacımız, Helmholtz denklemini aşağıdaki sınır ve süreklilik koşulları altında sağlayan u_1, u_2 ve u_3 alanlarını belirlemek ve analiz etmektir.

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a+0, z) = 0, \quad z < 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a+0, z) - \frac{\partial}{\partial \rho} u_2(a-0, z) = 0, \quad z > 0 \quad (2b)$$

$$u_1(a+0, z) - u_2(a-0, z) = 0, \quad z > 0 \quad (2c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, 0) + \frac{\partial}{\partial z} u^i(\rho, 0) = \frac{\partial}{\partial z} u_3(\rho, 0), \quad \rho < a \quad (2d)$$

$$u_2(\rho, 0) - u_3(\rho, 0) = -1, \quad \rho < a \quad (2e)$$

$$(ik\eta_2 + \frac{\partial}{\partial z})u_3(\rho, -l) = 0, \quad 0 < \rho < a \quad (2f)$$

$$(ik\eta_1 - \frac{\partial}{\partial \rho})u_3(a-0, z) = 0, \quad -l \leq z \leq 0. \quad (2g)$$

Ayrıca çözümün tekliğini garantileyebilmek için $\rho = a, z = 0$ kenarına ilişkin,

$$u_1 = \text{sabit} \quad (3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1 = \mathcal{O}(z^{-1/3}), \quad z \rightarrow +0 \quad (3b)$$

ayrıt koşullarını da göz önüne almak gerekir.

$\rho > a$ iken $u_1(\rho, z)$ fonksiyonu Helmholtz denklemini $z \in (-\infty, \infty)$ aralığında sağlar.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_1(\rho, z) = 0, \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (4)$$

Bu denklemi e^{iaz} ile çarpıp z' e göre $(-\infty, \infty)$ aralığında entegre edersek,

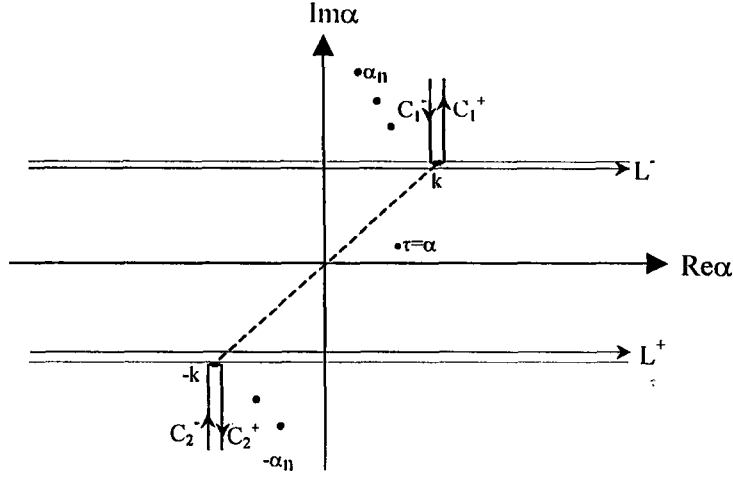
$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) \right] F(\rho, \alpha) = 0 \quad (5a)$$

bulunur. Burada

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (5b)$$

konmuş olup, karekök fonksiyonu Şekil 2.2'deki gibi kesilmiş kompleks α -düzleminde

$K(0) = k$ olacak şekilde tanımlanmıştır.



Şekil 2.2. Kompleks α –düzlemi

(5a) da görülen $F(\rho, \alpha)$ fonksiyonu $u_1(\rho, z)$ in Fourier dönüşümü olup, bu fonksiyonu aşağıdaki gibi uygun iki fonksiyona ayırmak mümkündür.

$$F(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{iaz} dz = F^+(\rho, \alpha) + F^-(\rho, \alpha) \quad (6a)$$

Burada

$$F^+(\rho, \alpha) = \int_0^{\infty} u_1(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (6b)$$

$$F^-(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^0 u_1(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (6c)$$

olarak tanımlanmıştır. Radyasyon koşulu uyarınca

$$u_1(\rho, z) = \mathcal{O}(e^{ik|z|/|z|}), \quad |z| \rightarrow \infty$$

olduğu göz önüne alınırsa, Fourier integralinin bilinen analitik özellikleri nedeniyle, $F^-(\rho, \alpha)$ fonksiyonu $\Im m(\alpha) < \Im m(k)$ yarı-düzleminde, $F^+(\rho, \alpha)$ fonksiyonu da $\Im m(\alpha) > \Im m(-k)$ yarı-düzleminde regüler olan fonksiyonlardır.

(5a) nın radyasyon koşulunu sağlayan çözümü, kolayca

$$F^+(\rho, \alpha) + F^-(\rho, \alpha) = -A(\alpha) \frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Ka)} \quad (7a)$$

olarak belirlenir. Burada

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \quad (7b)$$

n yinci mertebeden birinci tür Hankel fonksiyonu olup $A(\alpha)$ daha sonra belirlenecek spektral katsayıdır. (2a) e^{iaz} ile çarpılıp $-\infty$ dan 0 a entegre edilirse

$$\dot{F}^-(a, \alpha) = 0 \quad (8a)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\partial}{\partial \rho} F^-(a, \alpha) = \dot{F}^-(a, \alpha) \quad (8b)$$

konmuştur. Şimdi (7a) nın ρ ya göre türevini alıp ρ yerine a koyalım. Böylece

$$\dot{F}^+(a, \alpha) + \dot{F}^-(a, \alpha) = A(\alpha) \frac{K(\alpha)H_1^{(1)}(Ka)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Ka)} \quad (9a)$$

bulunur. Bu ifade elde edilirken

$$\frac{\partial}{\partial \rho} H_0^{(1)}(K\rho) = -K(\alpha)H_1^{(1)}(K\rho) \quad (9b)$$

bağıntısı kullanılmıştır. (8a) göz önünde bulundurularak (9a) dan $A(\alpha)$ spektral katsayısı

$$\dot{F}^+(a, \alpha) = A(\alpha) \quad (10)$$

olarak belirlenir. Bunun (7a) da yerine konmasıyla da

$$F^+(\rho, \alpha) + F^-(\rho, \alpha) = -\dot{F}^+(a, \alpha) \frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Ka)} \quad (11)$$

denklemini elde edilir.

$\rho < a, z > 0$ bölgesinde $u_2(\rho, z)$ fonksiyonunun sağladığı Helmholtz denkleminin Fourier dönüşümü alınır

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) \right] G^+(\rho, \alpha) = f(\rho) - i\alpha g(\rho) \quad (12a)$$

yazılır. Burada $G^+(\rho, \alpha)$

$$G^+(\rho, \alpha) = \int_0^\infty u_2(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (12b)$$

şeklinde tanımlanmış olup kompleks α -düzleminin ($\Im m(\alpha) > \Im m(-k)$) ile belirlenmiş üst bölgesinde regüler bir fonksiyon göstermektedir ve

$$f(\rho) = \frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, 0) \quad , \quad g(\rho) = u_2(\rho, 0) \quad (12c,d)$$

olarak tanımlanmıştır. (12a) daki sağ yanlı diferansiyel denklemin $\rho = 0$ da sınırlı ve $\rho = a$ da *Neumann* koşulunu sağlayan bir özel çözümünü bulmak için Green Fonksiyonu Yönteminden faydalanalım. Öncelikle bu sınır koşulları altındaki $\mathcal{G}(\rho, t, \alpha)$ Green fonksiyonunu belirleyelim. (12a) denkleminin *Green* fonksiyonu ,

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) \right] \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = 0, \quad \rho \neq t, \quad \rho, t \in (0, a) \quad (13a)$$

şeklindeki Helmholtz denklemini

$$\mathcal{G}(0, t, \alpha) \text{ sınırlıdır.} \quad (13b)$$

$$\mathcal{G}(t + 0, t, \alpha) = \mathcal{G}(t - 0, t, \alpha) \quad (13c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t + 0, t, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t - 0, t, \alpha) = \frac{1}{t} \quad (13d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(a, t, \alpha) = 0 \quad (13e)$$

koşulları altında sağlar ve $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ ve $\tilde{D}$ de bu koşullar yardımıyla belirlenecek katsayıları göstermek üzere Green fonksiyonu

$$\mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \begin{cases} \tilde{A}J_0(K\rho) + \tilde{B}Y_0(K\rho) & , \quad \rho < t \\ \tilde{C}J_0(K\rho) + \tilde{D}Y_0(K\rho) & , \quad \rho > t \end{cases} \quad (14a)$$

şeklinde yazılır. (13b) ve (13e) koşullarının uygulanması ile

$$\tilde{B} = 0, \quad \tilde{C} = -\tilde{D} \frac{Y_1(Ka)}{J_1(Ka)} \quad (14b)$$

olarak bulunur ve

$$\mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \begin{cases} \tilde{A}J_0(K\rho) & , \quad \rho < t \\ \frac{1}{J_1(Ka)} \tilde{D} [-Y_1(Ka)J_0(K\rho) + J_1(Ka)Y_0(K\rho)] & , \quad \rho > t \end{cases} \quad (14c)$$

yazılır. Şimdi de (13c,d) süreklilik koşullarını kullanacak olursak

$$\tilde{A}J_0(Kt) = \frac{1}{J_1(Ka)} \tilde{D} [-Y_1(Ka)J_0(Kt) + J_1(Ka)Y_0(Kt)] \quad (14d)$$

ve

$$\frac{1}{J_1(Ka)} K(\alpha) \tilde{D} [Y_1(Ka)J_1(Kt) - J_1(Ka)Y_1(Kt)] + K(\alpha) \tilde{A}J_1(Kt) = \frac{1}{t} \quad (14e)$$

elde ederiz. Burada $\tilde{A}$ nın (14d) teki ifadesi çekilip yerine konulursa

$$K(\alpha) \tilde{D} [-Y_1(Kt)] + K(\alpha) \tilde{D} \left[\frac{Y_0(Kt)}{J_0(Kt)} \right] J_1(Kt) = \frac{1}{t} \quad (14f)$$

bulunur. Her iki tarafın $J_0(Kt)$ ile çarpılması ile de

$$\tilde{D} K(\alpha) [-J_0(Kt)Y_1(Kt) + J_1(Kt)Y_0(Kt)] = \frac{J_0(Kt)}{t} \quad (14g)$$

yazılır ve

$$J_{n+1}(Kt)Y_n(Kt) - J_n(Kt)Y_{n+1}(Kt) = \frac{2}{\pi K(\alpha)t} \quad (14h)$$

bağıntısı kullanılarak $\tilde{A}$ ve $\tilde{D}$ katsayıları

$$\tilde{D} = \frac{\pi}{2} J_0(Kl) \quad (15)$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{J_1(Ka)} \frac{\pi}{2} [-Y_1(Ka)J_0(Kl) + J_1(Ka)Y_0(Kl)] \quad (16)$$

şeklinde elde edilir. Bu katsayıların (14c) te yerine konması ile de $\mathcal{G}(\rho, t, \alpha)$ Green fonksiyonu

$$\mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \frac{1}{J_1(Ka)} \mathcal{Q}(\rho, t, \alpha) \quad (17a)$$

$$\mathcal{Q}(\rho, t, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} J_0(K\rho)[J_1(Ka)Y_0(Kl) - Y_1(Ka)J_0(Kl)] & , \rho < l \\ J_0(Kl)[J_1(Ka)Y_0(Kl) - Y_1(Ka)J_0(Kl)] & , \rho > l \end{cases} \quad (17b)$$

olarak elde edilir ve bu fonksiyon yardımıyla (12a) nın çözümü

$$G^+(\rho, \alpha) = -\frac{1}{J_1(Ka)} \left[B(\alpha) \frac{J_0(K\rho)}{K(\alpha)} + \int_0^a \{f(t) - i\alpha g(t)\} \mathcal{Q}(t, \rho, \alpha) t dt \right] \quad (18a)$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada $B(\alpha)$ daha sonra belirlenecek spektral katsayı, $f(t)$ ve $g(t)$ de (12c,d) ile verilmiş olan fonksiyonlardır. Şimdi bu eşitliği ρ ya göre türetelim:

$$\dot{G}^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{J_1(Ka)} \left[B(\alpha) J_1(K\rho) + \int_0^a \{f(t) - i\alpha g(t)\} \dot{\mathcal{Q}}(t, \rho, \alpha) t dt \right] \quad (18b)$$

(2b) deki süreklilik koşulunun Fourier dönüşümünü alındıktan sonra elde edilen

$$\dot{G}^+(a, \alpha) = \dot{F}^+(a, \alpha) \quad (18c)$$

bağıntısı da kullanılırsa, $B(\alpha)$ spektral katsayı

$$B(\alpha) = \dot{F}^+(a, \alpha) \quad (19)$$

olarak belirlenmiş olur. Böylelikle (18a) denklemi

$$G^+(\rho, \alpha) = -\frac{1}{J_1(Ka)} \left[\dot{F}^+(a, \alpha) \frac{J_0(K\rho)}{K(\alpha)} + \int_0^a \{f(t) - i\alpha g(t)\} \mathcal{Q}(t, \rho, \alpha) t dt \right] \quad (20)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin sol tarafındaki $G^+(\rho, \alpha)$ fonksiyonu üst yarı α -düzleminde regülerdir. Dolayısıyla denklemin sağ yanının da aynı bölgede regüler olması gerekir. Ancak, denklemin sağ tarafında $J_1(Ka)$ fonksiyonunun üst yarı α -düzlemindeki sıfırları olan $\alpha = \alpha_m$ noktalarında oluşan kutuplarda bu regülerlik bozulabilmektedir. Bunu önlemek için.

$$J_1(j_m) = 0 \quad , \quad \alpha_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{j_m}{a}\right)^2} \quad , \quad \alpha_0 = k \quad , \quad \Im m(\alpha_m) \leq \Im m(k) \quad (21a,b,c)$$

ile verilmiş olan $\alpha = \alpha_m$ noktalarındaki rezidüleri sıfır yazmak gerekir ve yetiştir. Böylece

$$\dot{F}^+(a, k) = -\frac{1}{a} \int_0^a \{f(t) - ikg(t)\} t dt \quad (22a)$$

ve

$$\dot{F}^+(a, \alpha_m) = \frac{\pi}{2} K_m Y_1(K_m a) \int_0^a \{f(t) - i\alpha_m g(t)\} J_0(K_m t) t dt \quad (22b)$$

ya da bu eşitliklerin indirgenmiş formu olan

$$\dot{F}^+(a, k) = -\frac{a}{2} [f_0 - ikg_0] \quad (23a)$$

ve

$$\dot{F}^+(a, \alpha_m) = -\frac{a}{2} J_0(j_m) [f_m - i\alpha_m g_m] \quad (23b)$$

yazılır. Burada

$$f_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a f(\rho) \rho d\rho \quad , \quad f_m = \frac{2}{a^2 J_0^2(j_m)} \int_0^a f(\rho) J_0\left(\frac{j_m}{a} \rho\right) \rho d\rho \quad (23c,d)$$

$$g_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a g(\rho) \rho d\rho \quad , \quad g_m = \frac{2}{a^2 J_0^2(j_m)} \int_0^a g(\rho) J_0\left(\frac{j_m}{a} \rho\right) \rho d\rho \quad (23e,f)$$

konmuştur.

(2c) koşulu ile verilmiş olan süreklilik bağıntısı göz önüne alınırsa

$$G^+(a, \alpha) = F^+(a, \alpha) \quad (24)$$

yazılır ve $F^+(a, \alpha)$ nın (11) deki $G^+(a, \alpha)$ nın da (20) deki ifadesi (24) de yerine konursa

$$J_{n+1}(Kt) H_n^{(1)}(Kt) - J_n(Kt) H_{n+1}^{(1)}(Kt) = \frac{2i}{\pi K(\alpha) t} \quad (25)$$

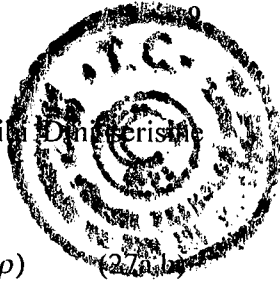
bağıntısının da kullanılması ile

$$\frac{2}{a} \frac{\dot{F}^+(a, \alpha)}{K^2(\alpha) M(\alpha)} - F^-(a, \alpha) = \frac{-1}{a K(\alpha) J_1(Ka)} \int_0^a \{f(t) - i\alpha g(t)\} J_0(Kt) t dt \quad (26a)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$M(\alpha) = \pi i J_1(Ka) H_1^{(1)}(Ka) \quad (26b)$$

olarak belirlenmiştir.



(23c-f) eşitlikleri bize $f(\rho)$ ve $g(\rho)$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi Wiener-Hopf Denklemi açma olanağı verir:

$$f(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m J_0\left(\frac{j_m}{a} \rho\right) \quad , \quad g(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_0\left(\frac{j_m}{a} \rho\right) \quad (27a,b)$$

Şimdi (26a) deki integralde gözükten $f(\rho)$ ve $g(\rho)$ fonksiyonlarının (27a,b) ile verilmiş seri ifadelerini yerlerine koyar ve terim terim entegre edecek olursak

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{aK(\alpha)J_1(Ka)} \int_0^a \{f(t) - i\alpha g(t)\} J_0(Kt) t dt = \\ & \frac{-1}{aK(\alpha)J_1(Ka)} \int_0^a \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} f_m J_0\left(\frac{j_m}{a} t\right) - i\alpha \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_0\left(\frac{j_m}{a} t\right) \right\} J_0(Kt) t dt \\ & = \frac{-1}{aK(\alpha)J_1(Ka)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_m \int_0^a J_0\left(\frac{j_m}{a} t\right) J_0(Kt) t dt - i\alpha \sum_{m=0}^{\infty} g_m \int_0^a J_0\left(\frac{j_m}{a} t\right) J_0(Kt) t dt \right] \\ & = \frac{-1}{aK(\alpha)J_1(Ka)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_m \left\{ \frac{aK(\alpha)J_0(j_m)J_1(Ka)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} \right\} - i\alpha \sum_{m=0}^{\infty} g_m \left\{ \frac{aK(\alpha)J_0(j_m)J_1(Ka)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} \right\} \right] \\ & = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(j_m)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [f_m - i\alpha g_m] \end{aligned} \quad (28)$$

elde edilir. Bu ifadeyi de (26a) de yerine koyarsak $\Im m(-k) < \Im m(\alpha) < \Im m(k)$ bandında geçerli olan aşağıdaki Wiener-Hopf Denklemi bulunmuş olur.

$$\frac{\hat{F}^+(a, \alpha)}{K^2(\alpha)M(\alpha)} - \frac{a}{2} F^-(a, \alpha) = -\frac{a}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(j_m)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [f_m - i\alpha g_m] \quad (29)$$

2.3 Modifiye Wiener-Hopf Denkleminin Yaklaşık Çözümü

(29) de görülen Wiener-Hopf denklemini çözmek için önce bu ifadedeki $M(\alpha)$ çekirdek fonksiyonunu Wiener-Hopf anlamında, yani

$$M(\alpha) = M^+(\alpha)M^-(\alpha) \quad (30)$$

şeklinde ayrıştırmak gerekir. Buradaki $M^+(\alpha)$ ve $M^-(\alpha)$ sırasıyla $\Im m(\alpha) > \Im m(-k)$ ve $\Im m(\alpha) < \Im m(k)$ yarı-düzlemlerinde regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır. $M^+(\alpha)$ nın açık ifadesi [Büyükkaksoy&Polat,1997] şu şekildedir.

$$M^+(\alpha) = \left[\pi i J_1(Ka) H_1^{(1)}(Ka) \right]^{1/2} \exp \left\{ i \frac{\alpha a}{\pi} \left[1 - \gamma + \ln \left(\frac{2\pi}{ka} \right) + i \frac{\pi}{2} \right] - i \frac{ka}{2} \right\}$$

$$\times \exp \left\{ \frac{K(\alpha)a}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK(\alpha)}{k} \right) + q(\alpha) \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m} \right) \exp \left(\frac{i\alpha a}{m\pi} \right) \quad (31a)$$

burada γ Euler sabiti olup $\gamma = 0.57721...$ ile verilmiştir ve $q(\alpha)$ da

$$q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{2}{\pi x} \frac{1}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} \right] \ln \left(1 + \frac{\alpha a}{[(ka)^2 - x^2]^{1/2}} \right) dx. \quad (31b)$$

şeklindeki integral ile tanımlanmış olup burada $\mathcal{P}$, $x = ka$ tekilliğindeki Cauchy asal değerini tanımlamaktadır. Dikkat edersek

$$M^+(\alpha) = M^-(-\alpha) \quad (32)$$

dır ve gösterilebilir ki kendi regülerlik bölgelerinde $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken

$$M^{\pm}(\alpha) \sim (\pm\alpha)^{-1/2} \quad (33)$$

şeklinde. Belirtelim ki $x = ka$ daki logaritmik tekillik “zayıf”tır ve nümerik olarak kolayca hesaplanabilir. (29) nin her iki tarafı $M^-(\alpha)(k - \alpha)$ ile çarpıldıktan sonra

$$\frac{\dot{F}^+(a, \alpha)}{(k + \alpha)M^+(\alpha)} - \frac{a}{2} M^-(\alpha)(k - \alpha) F^-(a, \alpha) = -\frac{M^-(\alpha)(k - \alpha)a}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(j_m)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [f_m - i\alpha g_m] \quad (34a)$$

Wiener-Hopf anlamında dekompoze edilip, Liouville teoremi uygulanırsa

$$\frac{\dot{F}^+(a, \alpha)}{(k + \alpha)M^+(\alpha)} = -\frac{a}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \alpha_m)M^+(\alpha_m)J_0(j_m)}{2\alpha_m(\alpha + \alpha_m)} [f_m + i\alpha_m g_m] \quad (34b)$$

elde edilir.

2.4 Oyuk İçindeki Alanın Gösterilimi

$\rho < a, -l < z < 0$ bölgesinde $u_3(\rho, z)$ Helmholtz denklemini sağlar.

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_3(\rho, z) = 0 \quad (35)$$

Bu denklemi değişkenleri ayırma yöntemi ile çözelim. $u_3(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ yazılırsa (35) denklemi

$$\frac{1}{R\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} R \right) + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z + k^2 = 0 \quad (36a)$$

halini alır.

$$\frac{1}{R\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} R \right) - \lambda^2 = 0 \quad (36b)$$

ve

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z + (k^2 - \lambda^2) = 0 \quad (36c)$$

denklemlerini ayrı ayrı çözecek olursak

$$R(\rho) = DJ_0(\lambda\rho) + EN_0(\lambda\rho) \quad (36d)$$

ve

$$Z(z) = He^{i\beta z} + Ie^{-i\beta z} \quad , \quad \beta = \sqrt{(k^2 - \lambda^2)} \quad (36e)$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$u_3(\rho, z) = [DJ_0(\lambda\rho) + EN_0(\lambda\rho)][He^{i\beta z} + Ie^{-i\beta z}] \quad (37)$$

şeklinde elde edilmiş olur. $\rho = 0$ da bu ifadenin sınırlı olabilmesi ancak $E = 0$ olması ile mümkün olur. (2g) koşulunun da uygulanması ile

$$ik\eta_1 J_0(\lambda a) + \lambda J_1(\lambda a) = 0 \quad (38)$$

denklemini elde edilir ve

$$u_3(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{i\beta_n z} + d_n e^{-i\beta_n z}] J_0\left(\frac{\xi_n}{a} \rho\right) \quad (39)$$

yazmak mümkün olur. Burada ξ_n 'ler (38) denkleminin kökleri olup

$$iak\eta_1 J_0(\xi_n) + \xi_n J_1(\xi_n) = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (40a)$$

şeklinde gösterilebilir. Denkleminde görülen η_1 yerine ileride $\eta_1 = iX_1$ kullanılacaktır. β_n ler ise

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\xi_n}{a}\right)^2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (40b)$$

şeklindedir. (2f) nin (39) e uygulanmasıyla da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[i\left(\eta_2 - \frac{\beta_n}{k}\right) c_n e^{i\beta_n l} + i\left(\eta_2 + \frac{\beta_n}{k}\right) d_n e^{-i\beta_n l} \right] J_0\left(\frac{\xi_n}{a} \rho\right) = 0 \quad (41a)$$

yazılır ve bu ifadede

$$d_n = -\frac{\left(\eta_2 - \frac{\beta_n}{k}\right)}{\left(\eta_2 + \frac{\beta_n}{k}\right)} e^{2i\beta_n l} c_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (41b)$$

bulunur. Bu halde (39) i yeniden düzenleyerek

$$u_3(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\xi_n}{a} \rho\right) \left[e^{-i\beta_n z} - \frac{\left(\eta_2 - \frac{\beta_n}{k}\right)}{\left(\eta_2 + \frac{\beta_n}{k}\right)} e^{i\beta_n (2l+z)} \right] \quad (41c)$$

ve

$$R_n = -\frac{\left(\eta_2 - \frac{\beta_n}{k}\right)}{\left(\eta_2 + \frac{\beta_n}{k}\right)} e^{2i\beta_n l} \quad (41d)$$

koyarak u_3 aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$u_3(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\xi_n}{a} \rho\right) [e^{-i\beta_n z} + R_n e^{i\beta_n z}] \quad (41e)$$

(2d) ve (2e) koşullarından

$$f(\rho) = \frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, 0) = \frac{\partial}{\partial z} u_3(\rho, 0) + ik \quad (42a)$$

$$g(\rho) = u_2(\rho, 0) = u_3(\rho, 0) - 1 \quad (42b)$$

yazılır, (41e) nin $z = 0$ daki ve z 'e göre türetilmiş halinin $z = 0$ konmuş değeri ile (27a-b) (42a-b) de kullanılırsa

$$-i \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta_n [1 - R_n] J_0\left(\frac{\xi_n}{a} \rho\right) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m J_0\left(\frac{j_m}{a} \rho\right) - ik \quad (43a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n [1 + R_n] J_0\left(\frac{\xi_n}{a} \rho\right) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_0\left(\frac{j_m}{a} \rho\right) + 1 \quad (43b)$$

bulunmuş olur. (43a) ve (43b) in her iki tarafını $\rho J_0(j_l \frac{\rho}{a})$ ile çarpıp 0 dan a ya entegre ederek, m (43b) içinde

$$f_0 = ik - 2ikaX_1 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta_n \frac{J_0(\xi_n)}{\xi_n^2} [1 - R_n] \quad (44a)$$

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{-2i}{a^2 J_0^2(j_m)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta_n [1 - R_n] \frac{a^2 \xi_n J_0(j_m) J_1(\xi_n)}{\xi_n^2 - j_m^2} \\ &= \frac{-2i}{J_0(j_m)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta_n [1 - R_n] \frac{\xi_n J_1(\xi_n)}{\xi_n^2 - j_m^2} \\ &= \frac{-2ikaX_1}{J_0(j_m)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta_n \frac{J_0(\xi_n)}{\xi_n^2 - j_m^2} [1 - R_n] \end{aligned} \quad (44b)$$

$$g_0 = -1 + 2kaX_1 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{J_0(\xi_n)}{\xi_n^2} [1 + R_n] \quad (45a)$$

$$g_m = \frac{2kaX_1}{J_0(j_m)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{J_0(\xi_n)}{\xi_n^2 - j_m^2} [1 + R_n] \quad (45b)$$

denklem sistemleri elde edilir. Bu ifadeler çıkartılırken Lommel integralleri olarak bilinen

$$\int_0^a J_0^2(\omega \rho) \rho d\rho = \frac{a^2}{2} \{ [J_0'(\omega a)]^2 + J_0^2(\omega a) \} \quad (46a)$$

$$\int_0^a J_0(\omega_1 \rho) J_0(\omega_2 \rho) \rho d\rho = \frac{a}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} [\omega_1 J_0(\omega_2 a) J_1(\omega_1 a) - \omega_2 J_0(\omega_1 a) J_1(\omega_2 a)] \quad , \quad \omega_{1,2} \text{ sabit} \quad (46b)$$

formülleri kullanılmıştır.

(34b) denkleminde $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ değerlerini yerleştirerek ve (23a,b) denklemleri de kullanılarak bir diğer denklem sistemi

$$\frac{2J_0(j_r)(f_r - i\alpha_r g_r)}{(k + \alpha_r)M^+(\alpha_r)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \alpha_m)M^+(\alpha_m)J_0(j_m)}{\alpha_m(\alpha_r + \alpha_m)} [f_m + i\alpha_m g_m] \quad , \quad r = 0, 1, \dots \quad (47)$$

elde edilir. (44a-b), (45a-b) ve (47) denklem sistemleri bize f_m, g_m ve c_n katsayılarını belirleme olanağı sağlar. Eğer (44a-b) ve (45a-b) (47) içine yerleştirilirse, sadece c_n katsayılarını içeren

$$2ikaX_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\alpha_n) c_n = \begin{cases} 2i/M^+(k) & r = 0 \\ 0 & r \neq 0 \end{cases} \quad (48a)$$

$$C_n(\alpha_n) = J_0(\xi_n) \times \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \alpha_m)M^+(\alpha_m)[\alpha_m(1 + R_n) - \beta_n(1 - R_n)]}{\alpha_m(\alpha_r + \alpha_m)(\xi_n^2 - j_m^2)} + \frac{2[\alpha_r(1 + R_n) + \beta_n(1 - R_n)]}{(k + \alpha_r)M^+(\alpha_r)(\xi_n^2 - j_r^2)} \right\}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (48b)$$

şeklindeki sonsuz bilinmeyenli bir sonsuz denklem takımı elde edilir: (48a) ile verilen bu sonsuz denklem sistemi belirli bir N sayısından sonra kesilerek c_n değerleri yaklaşık olarak belirlenir. Buna bağlı olarak g_m ve f_m değerleri de (44a-b) ve (45a-b) denklemlerinden bulunarak $u_i, i = 1, 2, 3$ alanları çözülür.

3.SAÇILAN ALANIN ANALİZİ

$\rho > a$ bölgesindeki toplam alan $F(\rho, \alpha)$ nın ters Fourier dönüşümü yardımıyla bulunur. (6a) dan

$$u_1(\rho, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Ka)} \dot{F}^+(a, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha, \quad (49)$$

yazılır. Burada $\mathcal{L}$ reel α -eksenine paralel ve $\Im m(-k) < \Im m(\alpha) < \Im m(k)$ bandında uzanan düz bir çizgidir. $H_0^{(1)}(K\rho)$ nun $k\rho \rightarrow \infty$ iken geçerli asimptotik ifadesini göz önünde bulundurarak

$$H_0^{(1)}(K\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi K\rho}} e^{i(K\rho - \pi/4)} \quad (50)$$

(49) deki integralin semer noktası tekniğiyle asimptotik ifadesi f_m ve g_m katsayılarına bağlı olarak

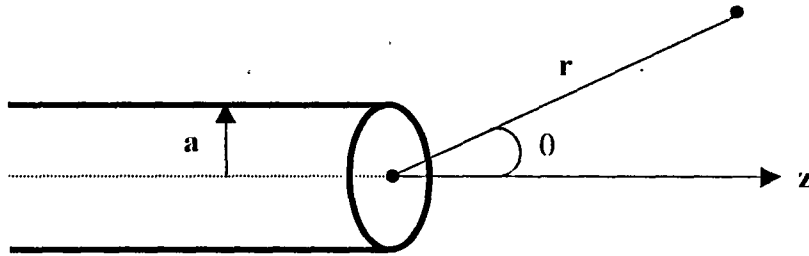
$$u_1(r, \theta) = F(\theta) \frac{e^{ikr}}{kr}, \quad kr \gg 1 \quad (51a)$$

$$F(\theta) = \frac{ka}{4} \frac{\tan(\theta/2) J_1(ka \sin \theta)}{M^+(k \cos \theta)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \alpha_m) M^+(\alpha_m) J_0(j_m)}{\alpha_m (k \cos \theta - \alpha_m)} [f_m + i \alpha_m g_m] \quad (51b)$$

şeklinde bulunmuş olur. Bu denklemde görülen r ve θ küresel koordinatlardır ve ρ ve z de, şekil (3.1) de görüldüğü gibi

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \quad (53)$$

olarak tanımlanmıştır.



Şekil 3.1. Küresel Koordinatlar

4.SAYISAL UYGULAMALAR ve ÖRNEKLER

4.1 Sayısal Hesaplamalar

Bu bölümde, silindirik oyuğun akustik dalgaların kırınımına etkisini ortaya çıkarmak için, toplam kırınmış alanın ($20 \log|u_1 \times kr|$) gözlem açısına göre değişimini gösteren bazı sayısal sonuçlar sunulmuştur ve bu değişimin farklı yanal yüzey admitansları η_1 , oyuk tabanı admitansları η_2 , boru yarıçapları ka ve oyuk uzunlukları kl ile nasıl oluştuğu incelenmiştir.

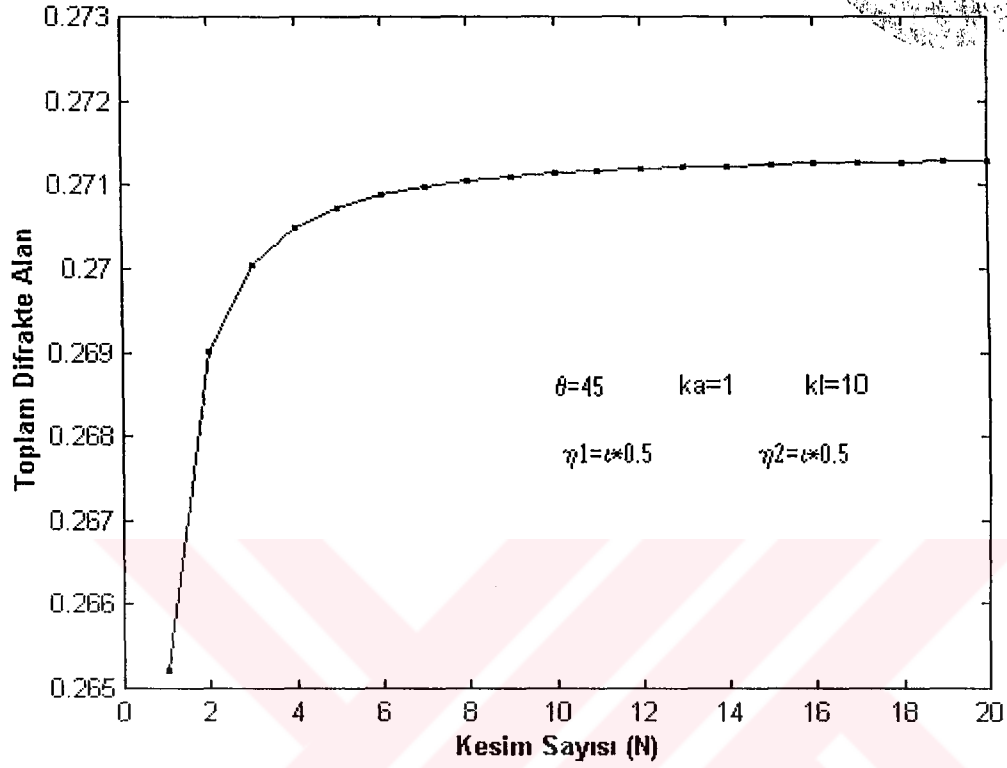
Sayısal sonuçları elde edebilmek için şüphesiz (21a) ve (40a) ile verilmiş olan transadant denklemlerinin j_m , ξ_n ile gösterdiğimiz köklerinin sayısal değerlerini belirlememiz gerekir. Bu bölümdeki tüm hesaplamalarda $\Im m(k) = 0$ olduğu varsayılacaktır.

j_m ve ξ_n köklerinin bulunmasında sayısal analizde yaygın biçimde kullanılan bisection metodundan faydalanılmıştır. Bu hesaplamada, bir ilk değer ataması yapılmış ve bu değer ufak bir miktar ötelenip oluşan aralıkta herhangi bir kök bulunup bulunmadığı bisection metodu ile analiz edilmiştir. Eğer bu aralıkta kök veya kökler belirlenmiş ise, bunlar tanımlanmış bir dizinin elemanları olarak atanarak ve sayıları da bir sayaç tarafından saydırılmak suretiyle de istenen sayıda kökü elde edebilme olanaklı kılınmıştır. Bir sonraki adımda ilk aralığın bitim noktası ilk değer olarak alınmış ve aynı öteleme ile benzer analiz tekrar edilerek bu öteleme, istenen kök sayısının elde edilmesine kadar sürdürülmüştür.

Ayrıca, çekirdek fonksiyonu $M(\alpha)$ nın ayrıştırılması ile ortaya çıkan $M^+(\alpha)$ fonksiyonuna ait ifadede gözüken integrale ilişkin Cauchy asal değeri Simpson metodu kullanılarak çok iyi bir yaklaşıklıkla bulunmuştur. Sonucun doğruluğu ise $M(\alpha)$ nın bir α_0 noktasındaki değerinin, $M^-(\alpha_0)$ da $M^-(\alpha_0) = M^+(-\alpha_0)$ bağıntısı yardımı ile hesaplamak sureti ile $M^-(\alpha_0)M^+(-\alpha_0)$ çarpımı ile mukayese edilmesi ile kontrol edilmiştir.

Tüm bilinmeyenlerin sayısal değerlerinin belirtilen metotlarla belirlenmesinden sonra c_n katsayılarına ilişkin sonsuz boyutlu denklem sistemi de yapılan yakınsaklık analizi ile belirlenen ve sistemin artık duyarsızlaştığı belli bir sayıda kesilerek ve bu yeni sonlu sistem de Gauss-Elimination metodu ile çözülmüştür. c_n katsayılarının bu şekilde bulunması ile f_m ve g_m katsayıları da (44a-b) ve (45a-b) denklemleri kullanılarak elde edilmiştir.

Şekil 4.1. de sabit bir noktada toplam difrakte alanın kesim sayısı N 'e göre değişimi gösterilmiştir.

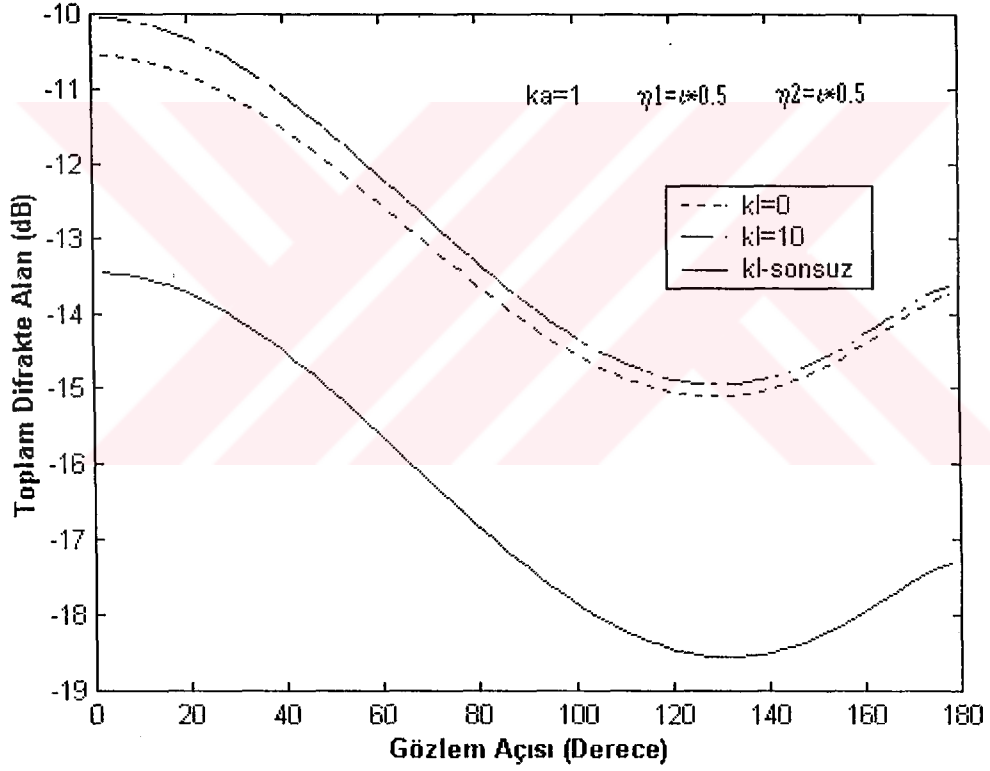


Şekil 4.1. Kesim Sayısı N 'e Göre Toplam Kırınan Alan

Görülüyor ki kesim sayısı N 'in $N \geq 5$, $ka = 1$, $kl = 10$, $\eta_1 = i0.5$, $\eta_2 = i0.5$, değerleri için toplam difrakte alan çok az değişim göstermektedir. Yine de diğer sayısal hesaplamalardan da gelebilecek hata miktarları göz önünde bulundurularak bundan sonraki sayısal örneklerin tamamında $N = 10$ alınmıştır.

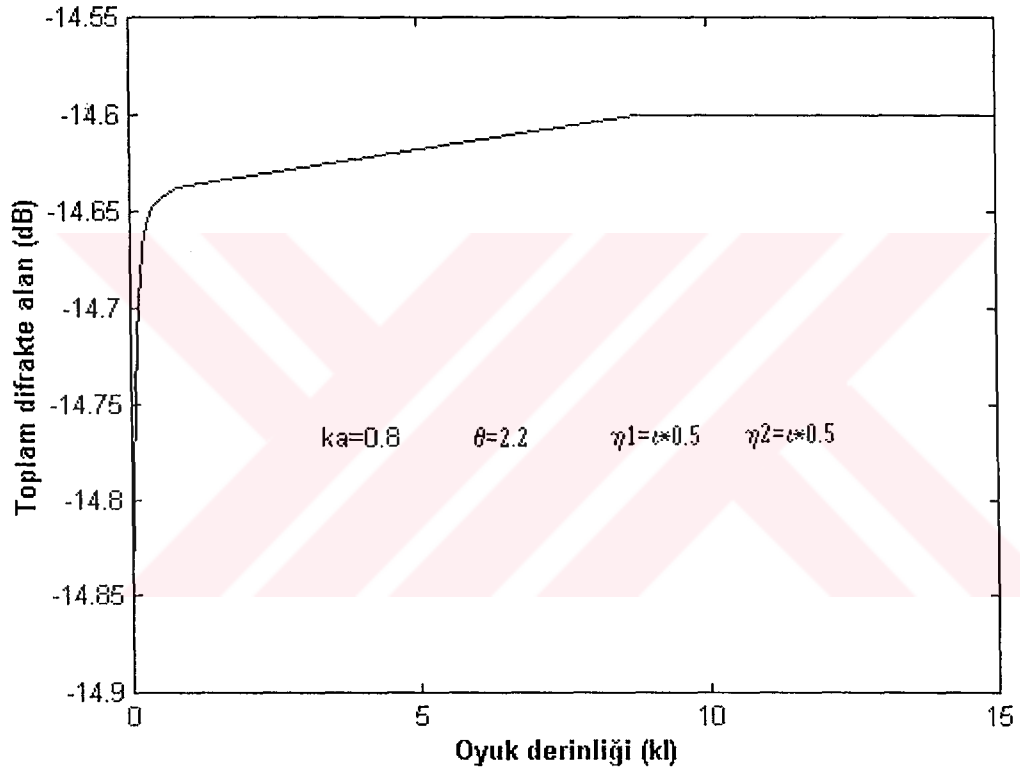
4.2 Sayısal Örnekler

A) Şekil 4.2., toplam difrakte alanın gözlem açısına göre değişimini değişik kavite uzunlukları (kl), için göstermektedir. Görüldüğü gibi kl arttıkça kırınan alanın genliği git gide azalmakta ve minimum değerini $kl \rightarrow \infty$ için almaktadır. Borunun açık olduğu duruma ilişkin sonucu elde etmek için formülasyonda $kl \rightarrow \infty$ ve $R_n = 0$ konmuştur.



Şekil 4.2. Oyuk Derinliği (kl) nin Farklı Değerlerine Göre Kırınan Alanın Değişimi

B) Şekil 4.3., Şekil 4.4. ve Şekil 4.5. toplam difrakte alanın oyuk derinliği (kl) ile değişimini değişik yarıçap değerleri (ka) için göstermektedir. (29b).denkleminde oyuk içindeki modların $\xi_1 > ka$ için yayılmadan söndüğü, dolayısıyla göz önüne alınan örnekte ($\eta_1 = i0.5$) $ka < 0.9$ için rezonans etkisinin olmadığı görülmektedir.



Şekil 4.3 Toplam Kırınan Alanın Oyuk Derinliği (kl) ile Değişimi

Tablo 4.1.'de $\eta_1 = i0.5$ ve değişik yarıçap değerlerine ilişkin ilk 5 ξ_n ve β_n değerleri verilmiştir.

Tablo 4.1. ka nın Farklı Değerleri İçin ξ_n ve β_n 'ler

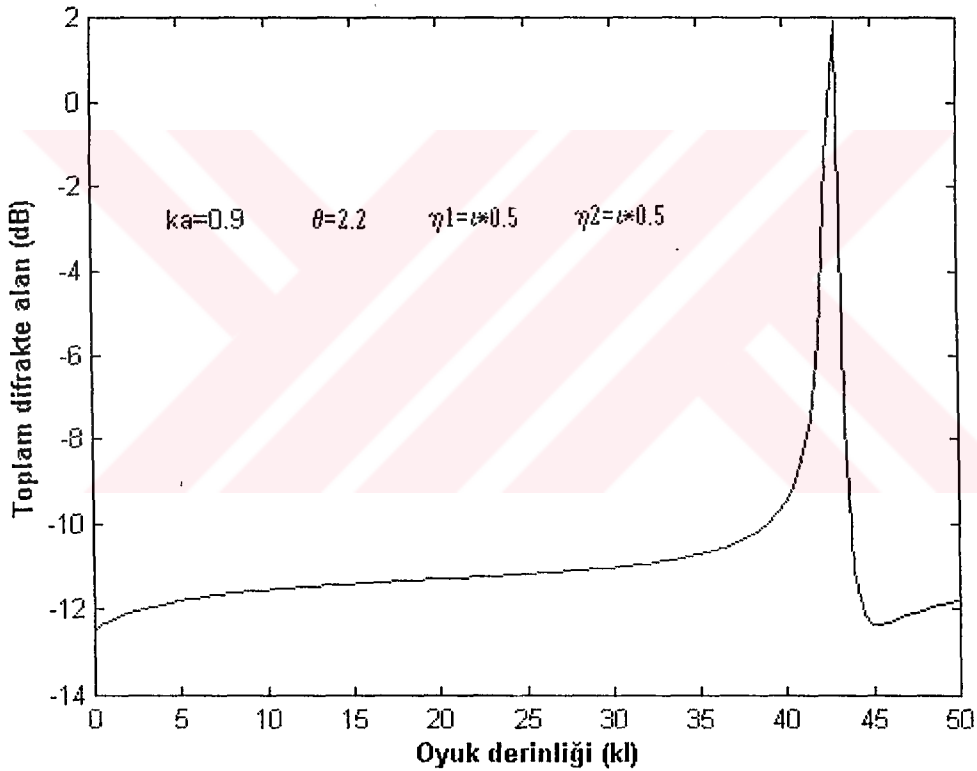
	$ka = 0.5$	$ka = 0.8$	$ka = 0.9$	$ka = 1$	$ka = 2$
ξ_1	0.685588	0.851578	0.897834	0.940771	1.25578
β_1	$i0.938148$	$i0.364833$	0.069344	0.339044	0.778301
ξ_2	3.89632	3.93436	3.9469	3.95937	4.07948
β_2	$i7.7282$	$i4.81521$	$i4.26991$	$i3.83101$	$i1.77779$
ξ_3	7.05112	7.07231	7.07935	7.08638	7.1558
β_3	$i14.0667$	$i8.78365$	$i7.80212$	$i7.01547$	$i3.43531$
ξ_4	10.198	10.2127	10.2176	10.2225	10.271
β_4	$i20.3715$	$i12.7266$	$i11.3087$	$i10.1734$	$i5.03719$
ξ_5	13.3424	13.3537	13.3574	13.3611	13.3984
β_5	$i26.6661$	$i16.6621$	$i14.8078$	$i13.3237$	$i6.62414$

Tablo 4.2.'de ise $ka = 0.9$ ve değişik pozitif ve negatif η_1 değerlerine ilişkin ξ_n ve β_n değerleri verilmiştir.

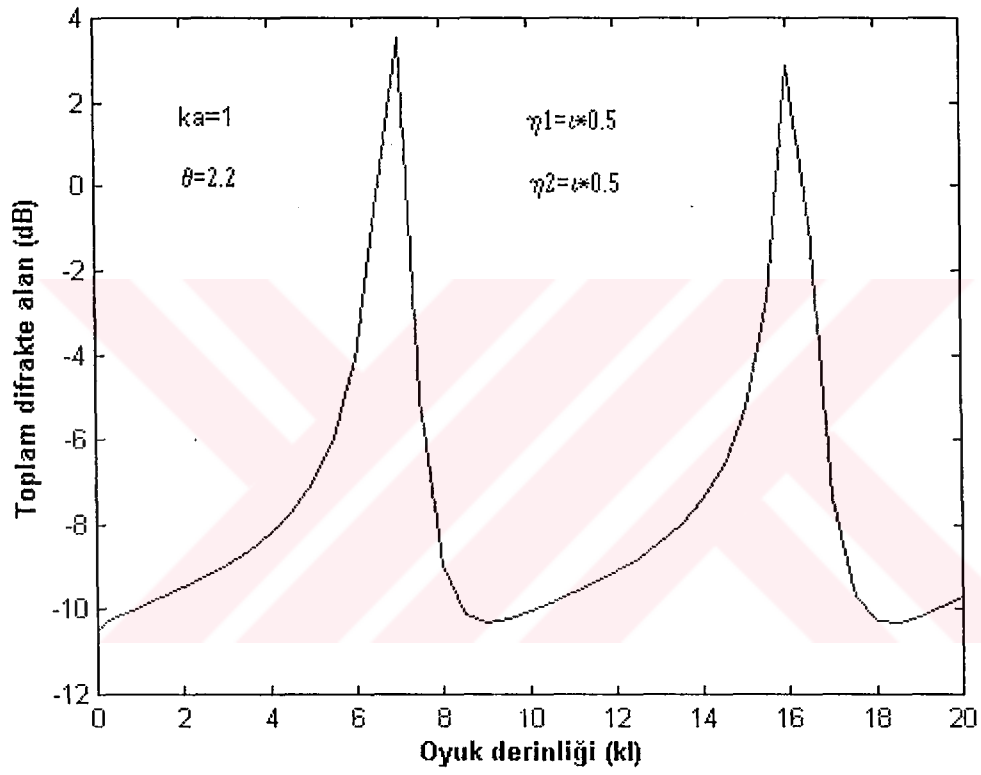
Tablo 4.2. η_1 in Farklı Değerleri İçin ξ_n ve β_n 'ler

	$\eta_1 = i0.1$	$\eta_1 = i0.3$	$\eta_1 = i0.5$	$\eta_1 = i0.7$	$\eta_1 = -i0.3$	$\eta_1 = -i0.5$	$\eta_1 = -i0.7$
ξ_1	0.419536	0.710746	0.897834	1.03992	3.7607	3.71299	3.66523
β_1	0.884705	0.61347	0.069344	$i0.5788$	$i4.05714$	$i4.00251$	$i3.94779$
ξ_2	3.85512	3.90142	3.9469	3.99142	6.97701	6.95124	6.92545
β_2	$i4.1651$	$i4.218$	$i4.26991$	$i4.3207$	$i7.68747$	$i7.65859$	$i7.62969$
ξ_3	7.0284	7.05395	7.07935	7.10459	10.1469	10.1292	10.1114
β_3	$i7.74505$	$i7.77366$	$i7.80212$	$i7.83039$	$i11.2299$	$i11.2101$	$i11.1903$
ξ_4	10.1823	10.2	10.2176	10.2351	13.3034	13.2899	13.2764
β_4	$i11.2694$	$i11.2891$	$i11.3087$	$i11.3283$	$i14.7477$	$i14.7326$	$i14.7176$
ξ_5	13.3304	13.3439	13.3574	13.3709	16.4542	16.4433	16.4324
β_5	$i14.7778$	$i14.7928$	$i14.8078$	$i14.8228$	$i18.2551$	$i18.2429$	$i18.2308$

Tablo 4.1 den görüldüğü gibi $ka \geq 0.9$ için $\xi_1 < ka$ olmaktadır. Bu da Şekil 4.4 ve 4.5 te görülen rezonanslara neden olmaktadır. Beklendiği gibi (ka) büyüdükçe bu osilasyon artmaktadır. ka sabit ve belirli iken rezonans halini ortadan kaldırmak için yüzey admitansını nasıl seçmek gerektiği Tablo 4.2' den görülmektedir. Örneğin $\eta_1 = i0.5$ iken $ka < 0.9$ değerleri için rezonans etki kaybolurken, bu sayı $\eta_1 = i0.1$ için $ka < 0.2$ dir. Fakat, η_1 in negatif değerleri ξ_n ler üzerinde fazla bir değişime sebep olmamaktadır.



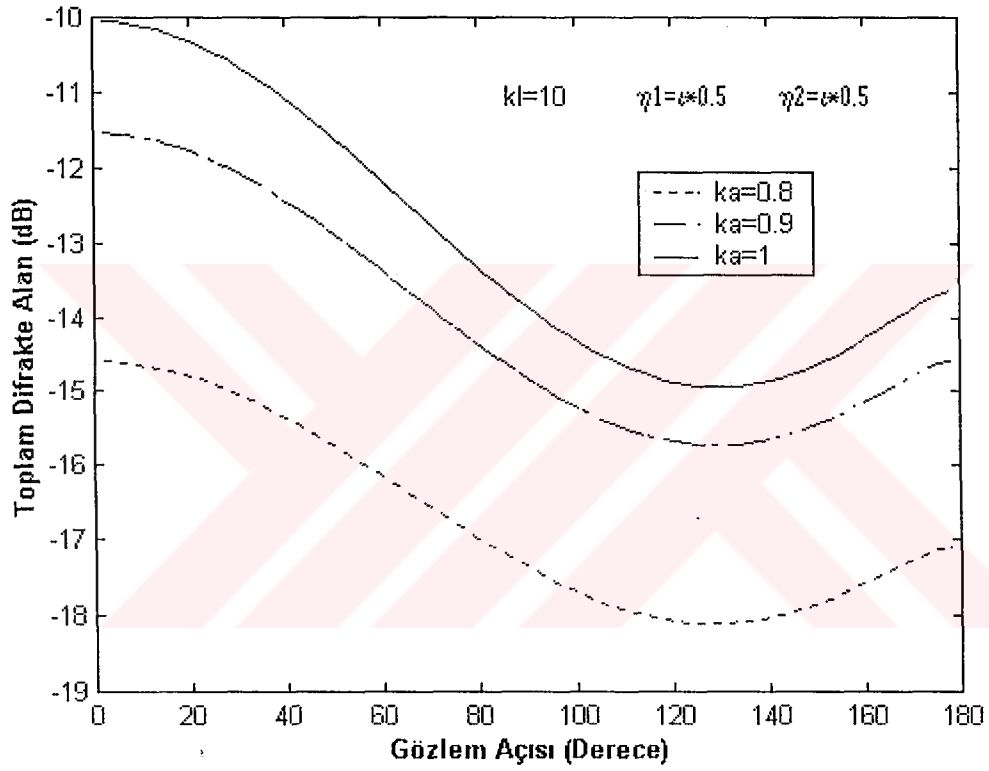
Şekil 4.4. Toplam Kırınan Alanın Oyuk Derinliği (kl) ile Değişimi



Şekil 4.5. Toplam Kırınan Alanın Oyuk Derinliği (kl) ile Değişimi



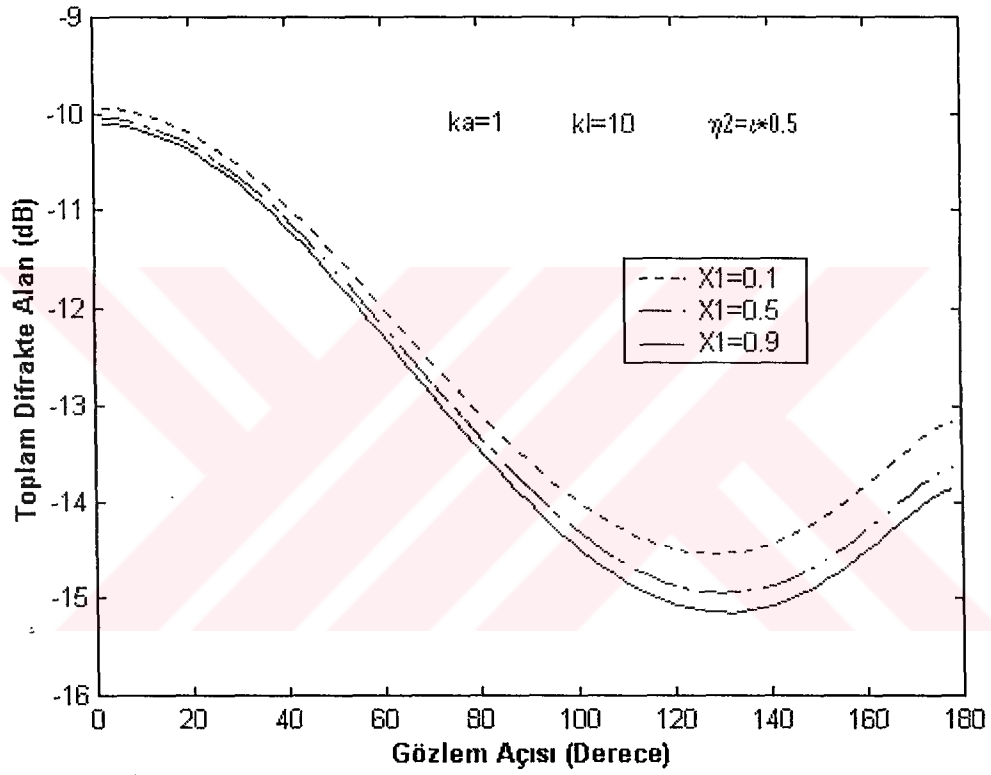
C) Şekil 4.6., toplam difrakte alanın gözlem açısına göre değişimini değişik yarıçap değerleri (ka), için göstermektedir. Beklendiği gibi yarıçap büyüdükçe toplam difrakte alan düzgün bir şekilde artmaktadır.



Şekil 4.6. Boru Yarıçapı (ka) nın Farklı Değerlerine Göre Kırınan Alanın Değişimi

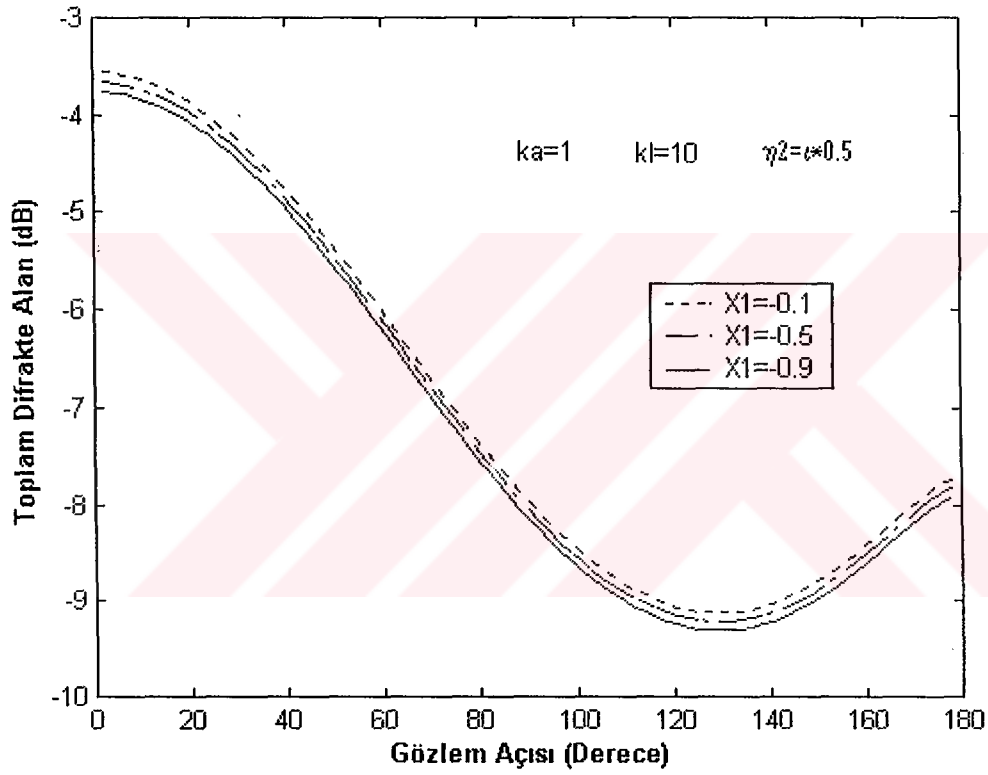


D) Şekil 4.7., ve Şekil 4.8. toplam difrakte alanın gözlem açısına göre değişimini, sırasıyla, değişik saf sanal pozitif ve negatif yanal yüzey admittans değerleri ($\eta_1 = iX_1, X_1 \in \mathbb{R}$), için göstermektedir.



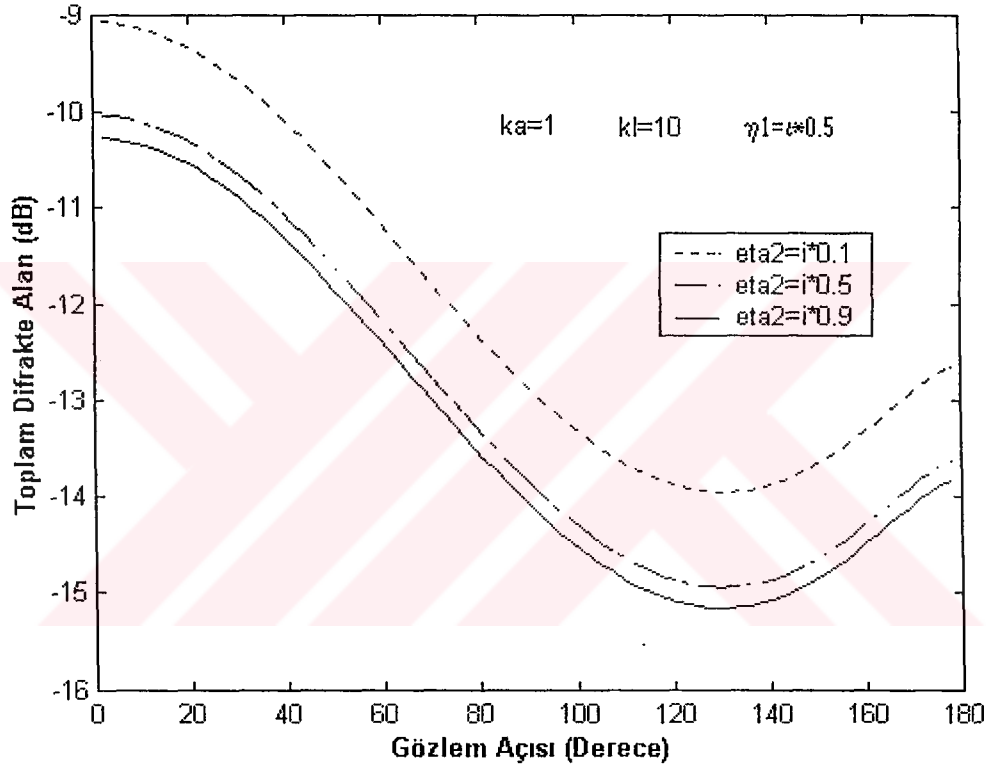
Şekil 4.7. ($\eta_1 = iX_1$), $X_1 > 0$ için Toplam Kırınan Alanın Değişimi

$X_1 > 0$ olduğunda artan admitans değerleri için kırınmış alanın genliği azalmakta, $X_1 < 0$ için de kırınmış alandaki azalma admitansın azalan değeri için gözlenmektedir. Dikkat edilecek olursa kırınmış alanın genliği yanal yüzey admitansıyla değişime $X_1 < 0$ için daha az duyarlı davranmaktadır.



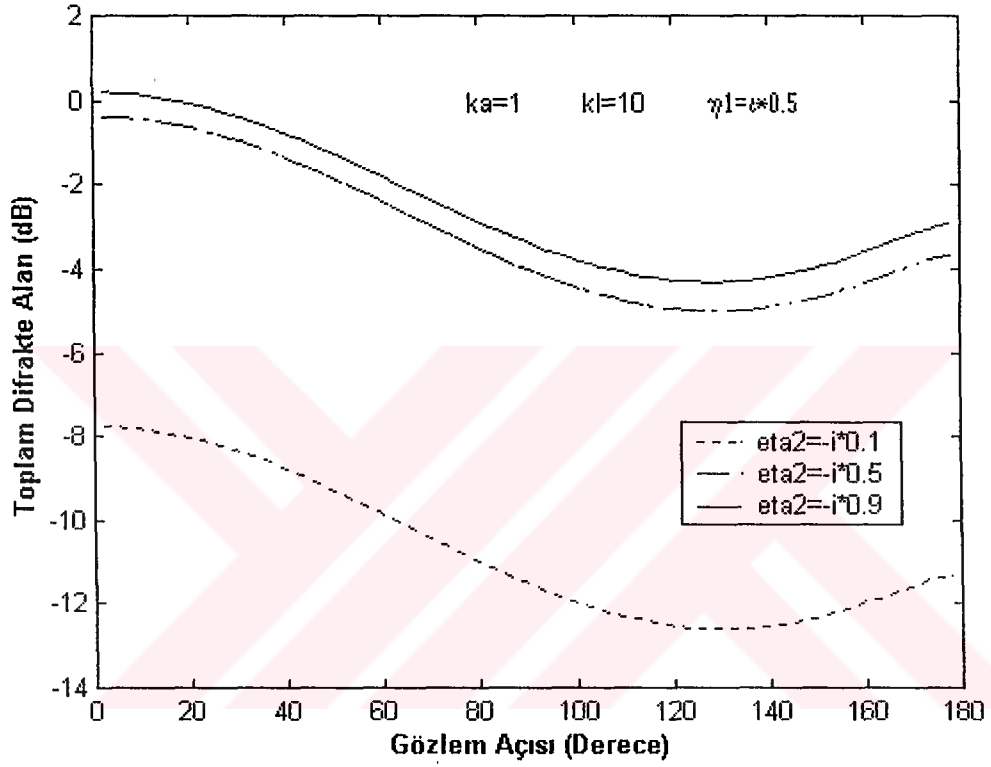
Şekil 4.8. $(\eta_1 = iX_1), X_1 < 0$ için Toplam Kırınan Alanın Değişimi

E) Şekil 4.9., ve Şekil 4.10. toplam difrakte alanın gözlem açısına göre değişiminin, değişik pozitif ve negatif imajiner taban yüzeyi admitans değerleri ($\eta_2 = iX_2, X_2 \in \mathbb{R}$), için göstermektedir.



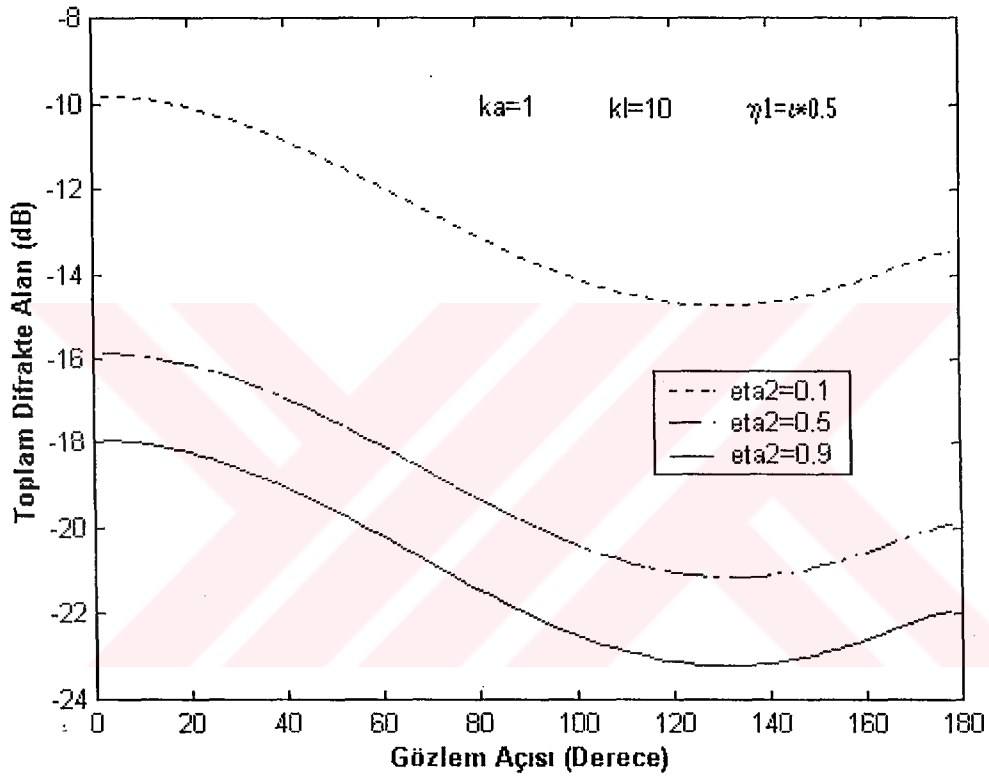
Şekil 4.9. ($\eta_2 = iX_2$), $X_2 > 0$ İçin Toplam Kırınan Alanın Değişimi

Saf sanal taban admitans değerleri söz konusu olduğunda $X_2 > 0$ için kırınım alanının genliği X_2 arttıkça azalmakta, tersine $X_2 < 0$ için X_2 azaldıkça artmaktadır.



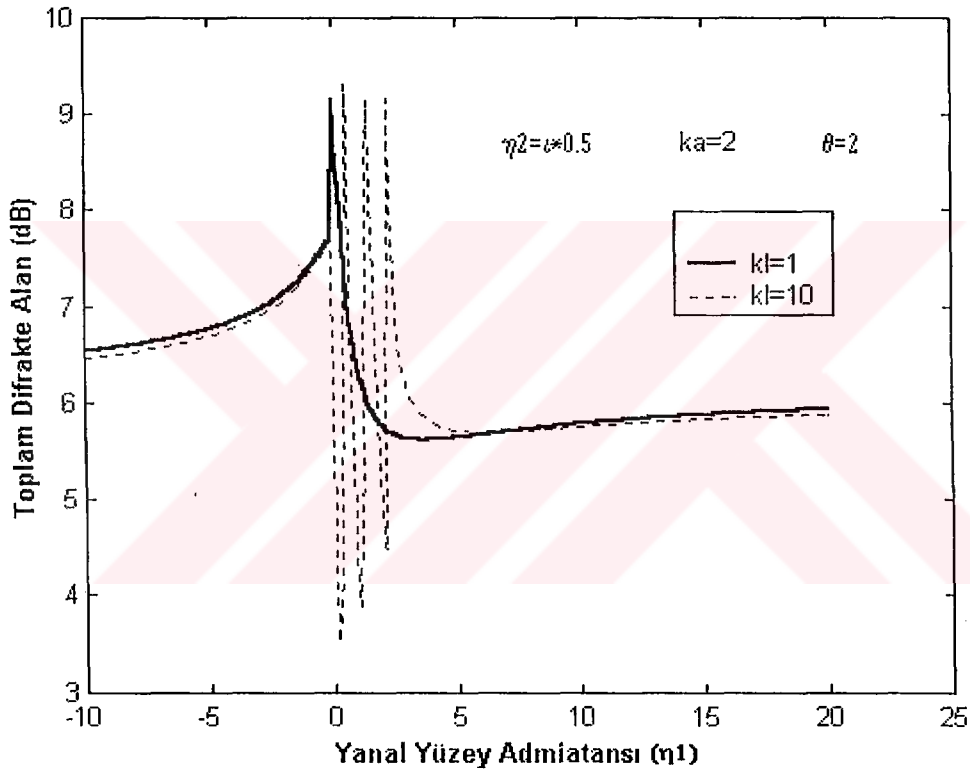
Şekil 4.10. ($\eta_2 = iX_2$), $X_2 < 0$ için Toplam Kırınım Alanının Değişimi

F) Şekil 4.11., toplam difrakte alanın değişik pozitif reel taban yüzeyi admitans değerleriyle (η_2), gözlem açısına göre değişimini göstermektedir. Burada da görülmektedir ki η_2 azaldıkça kırınmış alan genliği artmaktadır.



Şekil 4.11. (η_2) nin Farklı Pozitif Reel Değerlerine Göre Toplam Kırınan Alanın Değişimi

G) Şekil 4.12., toplam difrakte alanın farklı oyuk derinliği (kl) için, yanal yüzey admitansına göre ($\eta_1 = iX_1$) değişimini göstermektedir. Burada da görülmektedir ki X_1 in sıfıra yakın pozitif değerleri için rezonans olayı söz konusu olmasına rağmen bu etki negatif X_1 değerlerinde ve belli değerden büyük X_1 'ler için ortadan kaybolmaktadır.



Şekil 4.12. Toplam Kırınım Alanının Yanal Yüzey Admitansı (η_1) ile Değişimi

5. SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR



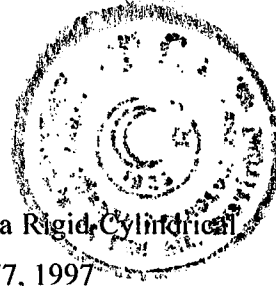
Bu tezde dairesel kesitli silindirik yarı sonsuz, iç yüzeyi akustik bakımdan yutucu bir malzemeyle kaplanmış ve farklı bir yutucu malzeme ile kaplı bir tabanla sonlandırılmış bir borudan düzlemsel dalgaların kırınımı incelenmiştir. Çözümün bulunmasında Bölüm-3 te alan analizindeki asimptotik ifade dışında hiçbir yaklaşık ifade kullanılmamıştır. Bölüm-4 te de oyuk içerisinde özdeğerler sayısal olarak bulunurken yapılan kısıtlama η_1 admitansının ($\eta_1 = iX_1, X_1 \in \mathbb{R}$) saf sanal alınmasıdır.

Bölüm-4 te yanal yüzey ve oyuk tabanının kaplanmış olduğu farklı yutucu malzemelerin, borunun yarıçapı ve oyuk derinliğinin rezonans olayına etkisini ortaya çıkarabilmek için sayısal hesaplamalar yapılmış ve sonuçlar grafiklerle sunulmuştur. Bu grafikler göstermiştir ki; yanal yüzeyin kaplı olduğu yutucu malzemeyi karakterize eden η_1 in değeri pozitif olarak küçüldükçe modların kesime uğradığı ve daha küçük ka değerlerinde rezonans etkisinin daha çok ortaya çıktığı gözlemlenmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar oyuk iç yüzeyinin admitansı negatif saf sanal bir malzemeyle kaplanması durumunda, oyuk yarıçapı ne olursa olsun rezonans etkisinin ortadan kalacağını, sözkonusu malzemenin pozitif saf sanal bir admitansla karakterize edildiği durumda da oyuk yarıçapı büyüdükçe, rezonans etkisinin gözlemlenmemesi için bu admitans değerini büyük seçmek gerektiğini göstermiştir.

Pratik açıdan büyük öneme sahip bu problem temel alınarak ileride çözülebilecek problem türlerinden biri, borunun sonlu ve dış yüzeyin de bir yutucu malzemeyle kaplı olması halinde rezonans olayının incelenmesidir.

KAYNAKLAR



- 1- BÜYÜKAKSOY, A. and POLAT, B., Scalar Wave Diffraction by a Rigid Cylindrical Rod of Finite Length with Impedance Ends, *Z. Angew. Math. Mech.* 77, 1997
- 2- BÜYÜKAKSOY, A. and POLAT, B., Diffraction of Acoustic Waves by a Semi-Infinite Cylindrical Impedance Pipe of Certain Wall Thickness, *Journal of Engineering Mathematics* 33: 333-352, 1998
- 3- CREMER, L., Theorie der Luftschall Dämpfung im Rechteckkanal Mitschluckender Wand und das sich dabei Ergebendehöchste Dämpfungs. *Acoustica* 3, 249-263. 1953
- 4- LAPIN, A. D., Sound Attenuation in Waveguides. *Soviet Phys. Acoust.* 21, 215-222. 1975
- 5- MORSE, P. M., The Transmission of Sound Inside Pipes *J. Acoust. Soc. Am.* 11, 205-210, 1939
- 6- MORSE, P. M. & INGARD, K. V., *Encycl. Phys., Acoustics I.* Berlin: Springer Verlag. 1961
- 7- NEYFEH, A. H. , KAİSER, J. E., & TELİONİS, D. P., Acoustics of Aircraft Engine Duct Systems. *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J.* 13, 130-153. 1975
- 8- POLAT, B., Scalar Wave Diffraction by a Semi-Infinite Cylindrical Pipe, (Doktora Tezi) Istanbul Technical University, 1996
- 9- RAWLİNS, A.D., Radiation of Sound from an Unflanged Rigid Cylindrical Duct with an Acoustically Absorbing Internal Surface, *Proc. R. Soc. Lond. A.* 361, pp. 65-91, 1978

ÖZGEÇMİŞ



Ahmet DEMİR, 1976 yılında İzmit'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmit'te tamamladıktan sonra 1993 yılında girdiği Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden 1998 yılında mezun oldu. 1999 yılı bahar döneminde, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. Şu an halen 1999 yılı Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalında başlamış olduğu Araştırma Görevliliğini sürdürmektedir.

