

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SONSUZ İNCE VE SONLU UZUNLUKTAKİ
ŞERİT SİSTEMİNDEN SKALER DALGA
SAÇILMASI**

Deniz ELMASLI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Gebze
2006

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SONSUZ İNCE VE SONLU UZUNLUKTAKİ
ŞERİT SİSTEMİNDEN SKALER DALGA
SAÇILMASI**

Deniz ELMASLI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı
Doç.Dr.Yury A. TUCHKIN

Gebze
2006

Bu tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla oluşturulan juri tarafından Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS Tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE : Doç.Dr. Yury A.TUCHKIN
(Tez Danışmanı) Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Mühendislik Fak. Elektronik Müh.Bl.m.

ÜYE : Prof.Dr. Tahir AZEROĞLU
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bl.m.

ÜYE : Yrd.Doç.Dr. Serkan AKSOY
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Mühendislik Fak. Elektronik Müh.Bl.m.

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararı

İmza / Mühür

ÖZET

Tez Başlığı: Sonsuz İnce ve Sonlu Uzunluktaki Şerit Sisteminden Skaler Dalga Saçılması.

Yazar Adı: Deniz ELMASLI

Sonsuz ince ve sonlu uzunluktaki şerit sisteminden dalga saçılımı problemini çözmeye matematiksel olarak güçlü ve sayısal olarak etkin olan analitik regülarizasyon yöntemi uygulanacaktır. Regülerleştirme işleminin sonucunda $Ax = b$ tipinde birinci türden bir denklem sistemi, $(I + H)x = b$ biçiminde karesi toplanabilir dizilerin uzayı l_2 'de ikinci türden sonsuz bir lineer cebir denklem sistemine indirgenebilir. Bu denklem sistemi ise sayısal olarak kesme yöntemi kullanılarak istenen doğrulukta çözülebilir.

Kullanılan yöntemin ilk adımı, bilinmeyen fonksiyon çekirdeklerinin Chebyshev polinomlarının oluşturduğu sonsuz seriler biçiminde, yukarıdaki denkleminin sol tarafının ilk integral operatöre ilişkin ters operatörünün de analitik olarak ifade edilmesinden ibarettir. İkinci adım ise bu biçimde elde edilen fonksiyonel denkleme ilişkin iki yanlı regülerleştirme çarpanının oluşturulmasıdır. Sonuçta başlangıçtaki problem özdeşleym l_2 uzayında $(I + H)x = b$, $x, b \in l_2$, biçiminde ikinci türden bir denkleme indirgenmektedir. I ve H sırası ile birim ve kompakt operatörlerdir.

$(I + H)x = b$ tipinde ikinci türden bir denklem nümerik olarak yapılacak simülasyonlar için uygun ve güvenilir veri girişi imkanına olanak sağlayacağı için bilginin sayısal olarak analizi esnasında algoritma ve programlarda işlenmesi uygun olacaktır.

Tezin sonunda verilen sayısal sonuçlar yöntemin verimli, sayısal kararlılığa sahip ve söz konusu sınıfa ait kırınım problemleri için güvenilir olduğunu göstermektedir.

ABSTRACT

Title of Thesis: Scaler Wave Diffraction from infinitely thin and finitely width strip.

Author: Deniz ELMASLI

The Analytical Regularization Method which is powerfull in mathematical meaning and effective in numerical meaning will be applied to the diffraction problem for infinitely thin and finitely width strip system. As a result of this suggested regularization procedure, the initial boundary value problems equavalently reduced to the infinite system of the lineer algebraic equations from $Ax=b$ first kind to the $(I+H)x=b$ second kind equation in the l_2 space of square summable sequences.

The first step of method that is being used based on the representation of unknown functions and kernels as infinite series involving the Chebyshev's polynomials and on analytical construction of the inverse operator to the first integral operator in the left hand side of the equation above. The second step is contruction of the two sided regularizator of thus obtained functional equation. As as result, initial problem is equivalently reduced to the equation of the second kind in l_2 of the form $(I+H)x=b$ $x, b \in l_2$, where I is identical and H is compact operators.

Second kind of equation like $(I+H)x=b$ is convenient and reliable data input for numerical similations that is better to use compute algorithms and programs in data processing.

Numerical results given in the end of this thesis expose that the method is efficient, numerically stable and reliable for considering type of diffraction problems.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması sürecinde gerekli ilgi ve desteği esirgemeyen değerli hocamız Doç.Dr.Yury A.TUCHKIN'e, kapısını her çalışmada elinden geldiğince bana yardımcı olmaya çalışan değerli hocalarım Doç.Dr.A.Arif ERGİN ve Prof.Dr.Oleg A.TRETYAKOV'a, özel sektördeki yoğun çalışma tempom içinde en önemli unsur olan zaman imkanını bana tanıyan firmama, tez çalışması sürecinde yardımlaştığım ve desteğini sürekli olarak hissettiğim saygı değer arkadaşım Soner MUŐ'a, benzer konuda tez çalışmaları hazırladıkları için Dr.Fatih DİK MEN, Ahmet Serdar TÜR K ve Eylem ÖZKAN'A, bana her türlü desteği gösteren aileme, ablam ve abim Ege ve Gökhan YURTEKEN'e ve güler yüzünü, enerjisini, desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen müstakbel eşim Bahar LAKERTA'ya sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

1 GİRİŞ

1.1.Konu ve Önemi	6
1.2 Tezin Amacı ve İçeriği	8
1.2.1. Birinci Türden Bir Denklem Sistemine Ait Operatörün Regülerleştirilerek İkinci Türden Bir Denklem Elde Edilmesi İşleminin Tanımı	10
1.2.2. Birinci ve İkinci Türden Denklemlerin Sayısal Kesme Yöntemi Bakımından Karşılaştırılması	11
1.2.3. Kullanılan Notasyon	11

2 PROBLEMİN FORMÜLASYONU ve ALAN İFADELERİ

2. Problemin Formülasyonu ve Alan İfadeleri	12
2.1. Açık Bölge İçin Green Özdeşliği	12
2.1.1 Genelleştirilmiş İkinci Green Teoremi	12
2.1.2. Helmholtz Denkleminin Temel Çözümü ve Açık Bölge için Üçüncü Green Formülü, Sommerfeld Radyasyon Koşulu	13
2.1.3. Homojen Helmholtz Denkleminin Çözümünün Analitik Devamı: Sobolev Teoremi	17
2.1.4. Dirichlet Problemi ve Saçılan Alanın İntegral İfadesi	20

3 İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

3. İntegral Denklemin Çözümü	25
3.1. Sonsuz İnce Sonlu Uzunluktaki Şerit Sistemi için Dirichlet Sınır Problemi ve Saçılan Alanın İntegral İfadesi	25
3.2. Dirichlet Kırınım Problemi için İntegral Denklemin Parametrize formu	26
3.3. fonksiyonun Lokal Tekil Açılımı	27
3.4. Şerit Sistemine göre İntegral Denklem İfadeleri	30
3.5. İntegral Denkleminin Cebrik Sisteme İndirgenmesi	32
3.5.1. Denklem Terimlerinin Fourier-Chebyshev Açılımları	34
3.5.2. Fourier –Chebyshev Katsayılarının $m, n \rightarrow \infty$ Halinde Davranışları	37
3.5.3. İntegral Denklemin Sonsuz Lineer Cebir Sistemine İndirgenmesi	38
3.5.4. Sonsuz Lineer Cebir Sistemine Analitik Regülerleştirme İşleminin Uygulanması	40

4 PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN SAYISAL OLARAK GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

4. Problemin Çözümünün Sayısal Olarak Gerçekleştirilmesi	42
4.1. Lineer Cebrik Sistemin Oluşturulması	42
4.1.1. İntegral denklemin sol tarafı - Gelen dalga ifadesi	42
4.1.2. Çekirdek $K(u,v)$ 'nin hesabı ve Logaritmik Tekilliğin Kaldırılması	43
4.1.3. Akım Yoğunluğu Fonksiyonu Katsayılarının Hesaplanması	48
4.1.4. Fourier-Chebyshev Katsayılarının Bulunması ve Elde Edilen Lineer Cebir Sisteminin Çözümü	48
4.1.5. Elde Edilen Regülerleştirilmiş Denklem Sisteminin Çözümü	50
4.2. Çoklu Şerit Sistemi İçin Denklem Sistem Çözümleri	51

4.2.1 Çoklu Şerit Sistemi İçin Akım Yoğunluğunun Bulunması	52
4.2.2 Çoklu Şerit Sistemi İçin Saçılan Alan ve Toplam Alanın Bulunması	55
4.3. Uzayda Herhangi Bir Nokta İçin Alan İfadesi	55
4.4. Sayısal Sonuçları Hesaplanan İfadeler, Yakın Alan, Uzak Alan, Faz Alanı, Radar Kesiti (RCS)	56

5 SONUÇLAR

5.0 SONUÇLAR	59
5.1 HAL SAYISI SİSTEM BOYUTU GRAFİKLERİ	61
5.1.1. Hal Sayısının kL Büyüklüğüne Göre Değişimi	64
5.2. CİSİM ÜZERİNDEKİ AKIM YOĞUNLUĞU GRAFİKLERİ	65
5.2.1. Bir adet Şerit için Cisim Üzerindeki Akım Yoğunluğu Grafikleri	65
5.2.2. Bir adet Eğrisel Şerit için Cisim Üzerindeki Akım Yoğunluğu Grafikleri	68
5.2.3. İki adet Şerit için Cisimler Üzerindeki Akım Yoğunluğu Grafikleri	69
5.3. YAKIN ALAN GRAFİKLERİ	71
5.3.1. Bir adet Şerit için Yakın Alan Grafikleri	71
5.3.2. Bir adet Eğrisel Şerit için Yakın Alan Grafikleri	77
5.3.3. İki adet Düzgün Şerit için Yakın Alan Grafikleri	80
5.3.4. Bir adet Düzgün Şerit Bir adet Eğri Şerit için Yakın Alan Grafikleri	82
5.3.5. 4 adet Şerit için Yakın Alan Grafikleri	85
5.4. FAZ ALANI GRAFİKLERİ	86
5.5. UZAK ALAN GRAFİKLERİ	87
5.5.1. Bir adet Şerit için Uzak Alan Grafikleri	87
5.5.2. İki adet Şerit için Uzak Alan Grafikleri	94
5.6. RADAR KESİTİ (RCS-RADAR CROSS SECTION) GRAFİKLERİ	96

A

ABSTRACT	v
----------	---

E

EK-1	
Parametrizasyon	97
EK-2	
R2 Uzay İçin Regularize Green Fonksiyonunun Eldesi	98
EK-3	
Kararlı Türdeki Hankel Fonksiyonundan R2 Uzay için Ragülerize Green Fonksiyonu Eldesi	100
EK-4	
Bessel Neumann ve Hankel Fonksiyonlarının Katsayı Değerleri	102
EK-5	
Chebyshev Polinomları Geri Elde Edilim (Back Recurrence) Formülleri	104
EK-6	
C++ Kaynak Kodları	107
EK-6.1 Gauss-Quadratic Başlık Dosyası "Header File"	107
EK-6.2 Green Fonksiyonu Başlık Dosyası "Header File"	110

Ek-6.3 Regularize (Düzgünleştirilmiş) Green Fonksiyonu Başlık Dosyası “Header File”	111
Ek-6.4 Regularizasyon (Düzgünleştirme) Başlık Dosyası “Header File”	114
Ek-6.5 Functor (Fonksiyon Objeler) Başlık Dosyası “Header File”	117
Ek-6.6 Saçılan Alan Fonksiyon Sınıfı (Scattered Field) Başlık Dosyası “Header File”	121
Ek-6.7 Uzak Alan – Kirchhoff Uzak Alan Fonksiyon Sınıfı (Scattered Field) Başlık Dosyası “Header File”	123

İ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ	1
--------------------	---

K

KAYNAKLAR	126
-----------	-----

Ö

ÖZET	iv
ÖZGEÇMİŞ	130

Ş

ŞEKİLLER DİZİNİ	2
-----------------	---

T

TABLolar DİZİNİ	5
TEŞEKKÜR	vi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Açıklama	Sayfa
1.1	Kartezyen Koordinatlarda Şerit Sistemi Gösterimi	8
2.1	2 Boyutlu V Domain'i gösterimi	14
2.2	Kapalı D bölgesi gösterimi normal dışarı yönde	17
2.3	Kapalı D bölgesi gösterimi normal içeri yönde	17
2.4	Sobolev Teoremi için Domain gösterimi	18
2.5	Dirichlet Sınır Koşulu için grafiksel gösterim	21
5.1	Hal Sayısının Sistem Boyutuna Göre Değişimi $k_L=1$	61
5.2	Hal Sayısının Sistem Boyutuna Göre Değişimi $k_L=PI$	61
5.3	Hal Sayısının Sistem Boyutuna Göre Değişimi $k_L=2PI$	62
5.4	Hal Sayısının Sistem Boyutuna Göre Değişimi $k_L=4PI$	62
5.5	Hal Sayısının Sistem Boyutuna Göre Değişimi $k_L=8PI$	63
5.6	Hal Sayısının Sistem Boyutuna Göre Değişimi $k_L=15PI$	63
5.7	Hal sayılarının cisim boyutlarına göre değişimi	64
5.8a	0.05-2PI boyutundaki cisimler için akım yoğunluğu	65
5.8b	5-15PI boyutundaki cisimler için akım yoğunluğu	65
5.9	0.05-15PI boyutundaki cisimler için akım yoğunluğu	66
5.10a	Noktasal kaynak için akım yoğunluğu $x:PI, y:PI$	67
5.10b	Noktasal kaynak için akım yoğunluğu $x:0, y:PI$	67
5.11a	Eğrisel Şerit için akım yoğunluğu $R=2PI$ yay=120derece Dalga=0	68
5.11b	Eğrisel Şerit için akım yoğunluğu $R=2PI$ yay=120derece Dalga=180	68
5.12a	İki Şerit için akım yoğ. $k_{L1}=2PI$ $k_{L2}=2PI$ Mesafe=4PI Dalga=0	69
5.12b	İki Şerit için akım yoğ. $k_{L1}=2PI$ $k_{L2}=2PI$ Mesafe=4PI Dalga=180	69
5.13a	İki Şerit için akım yoğ. $k_{L1}=2PI$ $k_{L2}=2PI$ Mesafe=400PI Dalga=0	70
5.13b	İki Şerit için akım yoğ. $k_{L1}=2PI$ $k_{L2}=2PI$ Mesafe=400PI Dalga=180	70
5.14	Toplam Alan, $k_L=1$, Dalga Açısı=0, Çözüm Aralığı=5x5	71
5.15	Toplam Alan, $k_L=1$, Dalga Açısı=45, Çözüm Aralığı=5x5	71
5.16	Toplam Alan, $k_L=1$, Dalga Açısı=90, Çözüm Aralığı=5x5	72
5.17	Toplam Alan, $k_L=1$, Dalga Açısı=0, Çözüm Aralığı=20x20	72
5.18	Toplam Alan, $k_L=1$, Dalga Açısı=45, Çözüm Aralığı=50x50	73
5.19	Toplam Alan, $k_L=1$, Dalga Açısı=90, Çözüm Aralığı=50x50	73

5.20	Toplam Alan, $kL=2PI$, Dalga Açısı=45, Çözüm Aralığı=10x10	74
5.21	Toplam Alan, $kL=2PI$, Dalga Açısı=0, Çözüm Aralığı=50x50	74
5.22	Toplam Alan, $kL=4PI$, Dalga Açısı=45, Çözüm Aralığı=20x20	75
5.23	Noktasal Kaynaklı Saçılan Alan, Cisim=2PI, Kaynak (PI,0) 10x10	75
5.24	Noktasal Kaynaklı Saçılan Alan, Cisim=2PI, Kaynak (0,PI) 10x10	76
5.25	Noktasal Kaynaklı Saçılan Alan, Cisim=2PI, Kaynak (PI,PI) 10x10	76
5.26	Noktasal Kaynaklı Toplam Alan, Cisim=2PI, Kaynak (PI,PI) 10x10	77
5.27	Eğrisel Şerit Saçılan $k=0.2$ R=2PI, Dalga=0, Çözüm Aralığı=10x10	77
5.28	Eğrisel Şerit Toplam $k=0.2$ R=2PI, Dalga=0, Çözüm Aralığı=10x10	78
5.29	Eğrisel Şerit Toplam $k=0.2$ R=2PI, Dalga=0, Çözüm Aralığı=40x40	78
5.30	Eğrisel Şerit Toplam $k=0.2$ R=2PI, Dalga=180, Çözüm Aralığı=40x40	79
5.31	Eğrisel Şerit Toplam $k=1$ R=2PI, Dalga=0, Çözüm Aralığı=40x40	79
5.32	Eğrisel Şerit Toplam $k=1$ R=2PI, Dalga=180, Çözüm Aralığı=40x40	80
5.33	Saçılan Alan $L1=2PI$ $L2=2PI$ $k=1$ Mesafe=2PI Çözüm Aralığı=30x30	80
5.34	Saçılan Alan $L1=2PI$ $L2=2PI$ $k=1$ Mesafe=6PI Çözüm Aralığı=30x30	81
5.35	Saçılan Alan $L1=2PI$ $L2=2PI$ $k=1$ Mesafe=4PI Çözüm Aralığı=30x30	81
5.36	Toplam Alan $L1=2PI$ $L2=2PI$ $k=1$ Mesafe=6PI Çözüm Aralığı=30x30	82
5.37	Düzgün Şerit+Eğri Şerit Saçılan Alan, $L1=4PI$ R=2PI 120deg 40x40	82
5.38	Düzgün Şerit+Eğri Şerit Toplam Alan, $L1=4PI$ R=2PI 120deg 40x40	83
5.39	Yakın Açılı Şerit+Eğri Şerit Toplam Alan, $L1=4PI$ R=2PI 120deg	83
5.40	Uzak Açılı Şerit+Eğri Şerit Toplam Alan, $L1=4PI$ R=2PI 120deg	84
5.41	4 Şeritli Sistem Saçılan Alan, $k=0.1$ Çözüm Aralığı=20x20	85
5.42	4 Şeritli Sistem Toplam Alan, $k=0.1$ Çözüm Aralığı=20x20	85
5.43	Tek Şerit Sistemi için Saçılan Alan Faz Açısı $kL=2PI$ Çözüm=40x40	86
5.44	Tek Şerit Sistemi için Toplam Alan Faz Açısı $kL=2PI$ Çözüm=40x40	86
5.45	Uzak Alan – Kirchhoff Uzak Alan – Orta Alan $kL=1$	87
5.46	Uzak Alan – Kirchhoff Uzak Alan – Orta Alan $kL=PI$	88
5.47	Uzak Alan – Kirchhoff Uzak Alan – Orta Alan $kL=2PI$	89
5.48	Uzak Alan – Kirchhoff Uzak Alan – Orta Alan $kL=3PI$	90
5.49	Uzak Alan – Kirchhoff Uzak Alan – Orta Alan $kL=4PI$	91
5.50	Uzak Alan – Kirchhoff Uzak Alan – Orta Alan $kL=8.5PI$	92
5.51	Uzak Alan – Kirchhoff Uzak Alan – Orta Alan $kL=20PI$	93
5.52	İki Şeritli Saçılan Orta Alan-Rezonans durumu $kL=2PI$ mesafe 2PI	94
5.53	İki Şeritli Uzak Alan–Rezonans durumu $kL=2PI$ mesafe 2PI	94

5.54	İki Şeritli Saçılan Orta Alan–Rezonans olmayan $kL=2PI$ mesafe $2.25PI$	95
5.55	İki Şeritli Uzak Alan–Rezonans olmayan $kL=2PI$ mesafe $2.25PI$	95
5.56	Tekli Şerit Sistemi İçin Radar Kesit Grafiği (RCS)	96
Ek-1.1	2 boyutlu ortamda parametrisasyon	97

TABLolar DİZİNİ

Tablo	Açıklama	Sayfa
1.1	Birinci ve ikinci türden denklemlerin sayısal kesme yöntemi bakımından karşılaştırılması.	11
4.1	Bessel ve Neumann Fonksiyonları katsayı değerleri	102
4.2	Hankel Fonksiyonları katsayı değerleri	103

1.Giriş

1.1.Konu ve Önemi

Modern kırınım teorisinde son otuz yıl boyunca, farklı fiziksel ve geometrik özelliklere sahip cisimlerden elektromanyetik dalgaların kırınım problemleri üzerine yapılan araştırmalar önem kazanmıştır. Tezin konusu olan sonsuz ince ve sonlu uzunluktaki şerit sisteminin de dahil olduğu bu gruba ilişkin problemlerin çözümünde modern kırınım teorisinin öngördüğü yöntemler iki ana gruba ayrılabilirler.

Moment yöntemi, sonlu farklar yöntemi gibi yöntemlerin dahil olduğu “direkt yöntemler” ilk grubu, integral dönüşümler ve değişkenlerine ayırıştırma yöntemlerine dayalı “sayısal-analitik yöntemler” ise ikinci grubu oluşturur.

Direkt yöntemler, probleme ilişkin yapılar karmaşıklaştıkça, çözüm sırasında altından kalkması güç sayısal kararsızlıklara neden olmaktadır. Bu durum, direkt yöntemler ile çözülemeyen ve ek olarak karmaşık analitik ve matematiksel çabalar gerektiren, düzlemsel veya dielektrik dairesel dalga klavuzlarındaki süreksizlik problemleri gibi, daha basit yapıdaki problemlerde de aynıdır.

İlk grubun, yani direkt yöntemlerin uygulandığı problemlerin çözümü sonucunda ulaşılan denklem sistemleri, birinci türden denklem sistemleridir. Sözkonusu sistemlerin hal sayısı * keyfi kesme sayısı için sınırlı kalmaz. Bu, sisteme ilişkin doğru çözümün, yuvarlatma hatalarının etkisi ile tahrip olmasına neden olan bir etkidir. Dolayısıyla sayısal hesaplar oldukça büyük sistemler alındığında kararsızdırlar. Bu da yöntemin imkanlarını ve kesinliğini güçlü biçimde sınırlar.

Sayısal analitik yöntemler olarak adlandırılan ve tezde ele alınan yapıya uygulanması açıklanacak olan ikinci türden yöntemler, birinci grubun yukarıda belirtilen sakıncalarından bağımsızdır. Buradan itibaren “Analitik Regülerleştirme Yöntemleri”

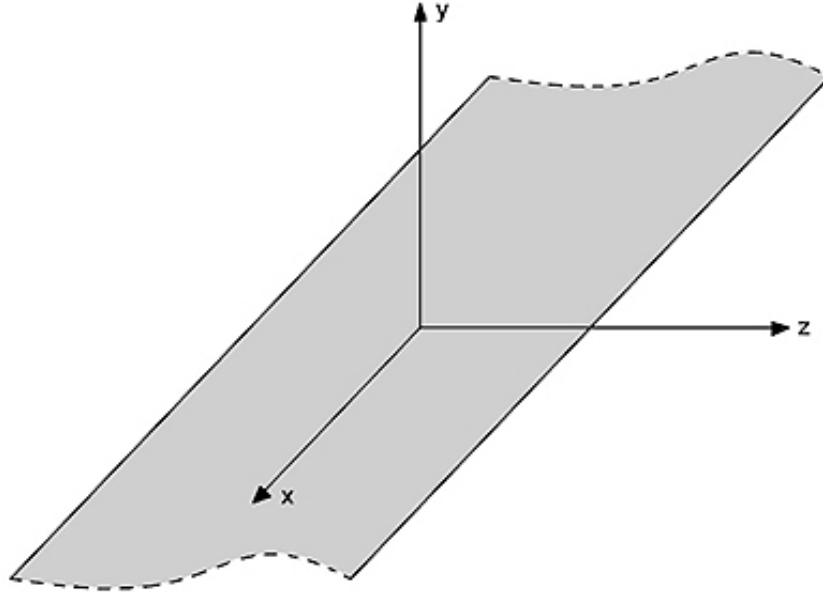
* Bir matrisin hal sayısı (condition number), matrisin ve tersinin normlarının çarpımı olarak tanımlanır.

olarak anılacak bu yöntemler, sözkonusu kırım problemi, matematiksel olarak esas sınır değeri problemine denk düşen, ikinci türden fonksiyonel bir denkleme indirgemektedir. Bu yöntemin uygulandığı sistemin boyutu sonsuza gittiğinde sisteme ilişkin hal sayısının düzgün biçimde sınırlı kaldığı anlamına gelmektedir. Kesme yöntemi uygulanarak çözülecek sistemin bu özelliği, sadece sistemin boyutu sonsuz olduğundaki çözüme yakınsamayı değil, keyfi büyüklükte boyuta sahip lineer cebir sisteminin sayısal kararlılığını da garantilemektedir.

Direkt yöntemlerle elde edilen sonuçlar genelde ilgili deney sonuçları ile sağlama yapılmasını gerektirir; ancak analitik regülerleştirme yöntemlerinin sonuçları, kullanılan sayısal işlemler aritmetik hata içermedikçe, ilgili deneyler için sağlama verisi oluşturarak, deneylerdeki hataların kaynağını belirlemeye yarar. Yöntemler arasındaki temel farklılıkta budur.

1.2 Tezin Amacı ve İçeriği

Sonsuz ince ve sonlu uzunluktaki şeritten oluşan sistemden (Şekil 1.1), saçılan skaler dalgalar Helmholtz dalga denklemini, Dirichlet sınır koşulunu ve Sommerfield radyasyon koşullarını sağlar. Buna ilişkin sınır değer problemi, pratikte kullanım alanı bulan sonlu uçlara sahip diktörgensel yapıda şerit sistemlerin anlaşılmasında ele alınacak teorik problemin ilk ve temel adımı olması bakımından önemlidir.



şekil 1.1

Problemin çözümü sonucunda çıkarımı yapılacak olan şudur; yukarıdaki gibi bir geometriye sahip sistemden saçılan alanın ifadesine ait integral gösterilim, sınır koşulunun ve buna ilişkin, sonsuz ince S yüzeyi üzerindeki Fourier açılımının uygulanması sonucunda,

$$K(u, v) \in C^1(u \in [-1, 1], v \in [-1, 1]); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} K(u, v), \frac{\partial^2}{\partial v^2} K(u, v), \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} K(u, v) \in L_2(u \in [-1, 1], v \in [-1, 1]); \dagger \quad (1.2)$$

[†] L_2 : Hilber Uzayı

özelliklerinin sağlandığı,

$$\int_{-1}^1 \ln(u-v)z(v)dv + \int_{-1}^1 K(u,v)z(v)dv = f(u), u \in [-1,1] \quad (1.3)$$

denkleminde bir denkleme indirgenecektir. Bu denklem, ortogonal polinomlardan Chebyshev polinomları kullanılarak, birinci türden bir lineer cebir denklem sisteminin elde edilmesine elverişlidir. Bu denklem daha sonra uygun analitik regülerleştirme işlemine sokularak, sayısal olarak kararlı çözümün elde edilebildiği, ikinci türden bir denklem sistemine dönüştürülecektir. Teoriye göre Green Fonksiyonun integral gösteriminde, bir alan etkisi altında (gelen dalga) kalan cismin yüzeyinde meydana gelen akım yoğunluğu biliniyorsa; cismin etkisiyle (saçılan alanıyla) uzayda keyfi olarak herhangi bir noktada oluşacak olan alan değerleri bulunabilir.

Sonuçların, karşılaştırılmasının yapıldığı, önceden bilinen yöntem, “Kirchhoff Yaklaşıklığı” olarak bilinen yöntemdir. Bu yöntemin esası, saçılan alan ifadesini, saçıcı cismin gelen dalganın gördüğü yüzeyi üzerinden alınan integral ile ifade edip, gölge bölgesindeki toplam alanı sifıra eşit kabul etmeye dayanmaktadır.

Kirchhoff Yaklaşıklığı uygulamada tekli yapılar için sıkça kullanılmış olan bir yöntemdir. Bu sayede yapılan incelemelerde, sonsuz ince sonlu uzunluktaki şerit sistemi incelenmiştir. Tezin incelediği geometri, bir ve birden fazla sayıda ve keyfi konumlara sahip şeritlerin oluşturduğu bir sistemi içermektedir.

Kirchhoff yaklaşıklığı, şerit boyutunun dalga boyuna oranla büyüdüğü haller ve uzak alan ifadeleri bakımından tatminkar sonuçlar vermektedir. Fakat şerit boyutunun dalga boyuna oranının küçüldüğü durumlar için aynı şey söylenemez. Bu bakımdan Kirchhoff yaklaşıklığının sözkonusu şeridin yakın alanı için geçerli olmayacağı da açıkça bilinmektedir. Tezde kullanılan yöntem ne dalga boyu, ne de cisim boyutu bakımından bir kısıtlama getirmektedir. Bu da yaklaşımın güçlülüğünü ortaya koymaktadır.

1.2.1. Birinci Türden Bir Denklem Sistemine Ait Operatörün

Regülerleştirilerek İkinci Türden Bir Denklem Elde Edilmesi İşleminin

Tanımı

B, B_1, B_2 üç Hilbert uzayı ve A, L_0, R_0 (L_0^{-1}, R_0^{-1} mevcut ve sınırlı) bu uzaylar üzerine şu ilişkilere geçirli opeatörler olsun.

$$A : B_1 \rightarrow B_2 ;$$

$$L_0 : B_2 \rightarrow B ;$$

$$R_0 : B \rightarrow B_1 ;$$

Eğer H , B uzayında kompakt bir operatör ise; $L_0 A R_0 = I + H; (H : B \rightarrow B)$ yazılabiliyorsa, (L_0, R_0) çifti iki-yanlı regülerleştiriciler olarak tanımlanır.

$$Ax = b \quad (x \in B_1, b \in B_2) \quad (1.4)$$

Birinci türden fonksiyonel denklem (1.4) ele alınır, R_0^{-1} sınırlı bir operatör olduğundan herhangi $x \in B_1, y = R_0^{-1} x \in B$ olacak biçimde $x \in R_0, y \in B_1$ yazılabilir. Bu ifade (1.4) de yerine yazılıp her iki tarafa L_0 uygulanırsa ikinci türden olan şu denkleme ulaşılır:

$$(I + H)y = L_0 b; \quad (y \in B, L_0 b \in B) \quad (1.5)$$

Kırınım teorisinde analitik regülerleştirme yöntemi, kırınım sınır değer problemlerine ilişkin sınır değer problemini, probleme ilişkin fiziksel anlamını kesin olarak yansıtan iki yanlı regülerleştiricinin (L_0, R_0) çifti analitik olarak yapılandırması tekniğidir.

1.2.2. Birinci ve İkinci Türden Denklemlerin Sayısal Kesme Yöntemi

Bakımından Karşılaştırılması

Birinci ve ikinci türden denklemlerin sayısal kesme yöntemi bakımından karşılaştırılması.

SORULAR (N : sistemin boyutu, v_N : hal sayısı)	Birinci Türden Sistemler $Ax = b$ x : sistemin gerçek çözümü, x_N : N boyutlu sistemin çözümü. $\ C\ $: C'nin normu	İkinci Türden Sistemler $(I + H)x = b$
$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N \rightarrow x$?	Genelde HAYIR (EVET varsayılarak 2. soru sorulur)	EVET
v_N düzgün sınırlı mı?	$v_\infty = \ A\ \cdot \ A\ ^{-1}$ HAYIR	$v_\infty = \ (I + H)\ \cdot \ (I + H)\ ^{-1}$ EVET

tablo 1.1

1.2.3. Kullanılan Notasyon

Bu tezde kullanılan notasyon, yaygın olarak kullanılan standart notasyon olduğundan ayrıca belirtilmesine gerek duyulmamaktadır. Bununla beraber yeni tanımlandığı düşünülen bir terim için gerekli açıklamalar yerinde yapılacaktır.

2. Problemin Formülasyonu ve Alan İfadeleri

2.1. Açık Bölge İçin Green Özdeşliği

2.1.1 Genelleştirilmiş İkinci Green Teoremi

p , iki boyutlu uzay R^2 'de herhangi bir noktaya ilişkin vektör, $u(p), v(p), f(p)$ skaler ve $A(p), B(p)$ vektörel büyüklükleri göstermek üzere[‡], $div.grad = \Delta$ ve $div(fA) = f.divA + (A, grad f)$ [§], olduğu da dikkate alınarak,

$$div\{v.grad u - u.grad v + u.v.B\} = v\{\Delta u + (B, grad u) + c.u\} - u\{\Delta v - div(vB) + c.v\} \quad (2.1)$$

yazılabilir(c =sabit). L ve M operatörleri (2.1)'e göre,

$$Lu = \Delta u + (B, grad u) + c.u \quad (2.2)$$

$$Mv = \Delta v - div(vB) + c.v \quad (2.3)$$

tanımlanarak (2.1) yeniden yazılırsa;

$$vLu - uMv = div\{v.grad u - u.grad v + u.v.B\} \quad (2.4)$$

bulunur. Gauss-Ostragradski formülü $\int_D divA.dv = \int_S (A, n).dS$ ^{**} (2.4) denklemindeki

ifade için yazılacak olursa;

[‡]Bu alt başlıkta aksi belirtilmedikçe büyük harfler vektörleri temsil edecektir.

[§] Skaler çarpım.

^{**} n burada S yüzeyinden dışarı doğru birim normal vektördür.

$$\begin{aligned}\int_D (vLu - uMv)dv &= \int_S (\{v.grad u - u.grad v + u.v.B\}, n).dS \\ &= \int_S (v \frac{\partial}{\partial n} u - u \frac{\partial}{\partial n} v + u.v(B, n)).dS\end{aligned}\quad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) denklemi, genelleştirilmiş ikinci Green formülü olarak bilinir. Bu formüle göre $B(p) = 0$, $c = k^2$ olan özel hal, $L = M = \Delta + k^2$ operatörü verir (2.2),(2.3).

Denklem ise;

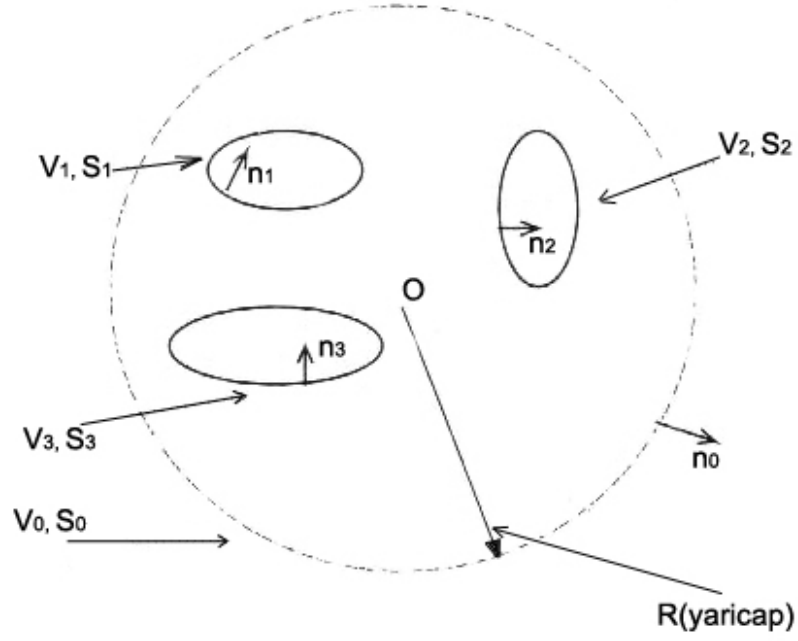
$$\int_D (vLu - uMv)dv = \int_S (v \frac{\partial}{\partial n} u - u \frac{\partial}{\partial n} v).dS \quad (2.6)$$

halini alır.

2.1.2. Helmholtz Denkleminin Temel Çözümü ve Açık Bölge için

Üçüncü Green Formülü, Sommerfeld Radyasyon Koşulu

Sonsuz ince sonlu uzunluktaki şerit sistemi açık bir bölgede bulunduğundan, incelemeyi açık bölge için sürdürmek daha uygun olacaktır. Ancak şunu da belirtmek gerekir ki, ulaşılabilecek ifade radyasyon koşulunu gerektirmeyen yani sonlu olan kapalı bölge için de geçerlidir. V_1, V_2, V_3, \dots kapalı bölgeleri S_1, S_2, S_3, \dots düzgün yüzeyleri ile kuşatılmıştır. V_0 bölgesi bu bölgeleri S_0 yüzeyi ile kuşatan ve incelemenin ileriki aşamalarında sonsuz olacak ve keyfi bir merkez noktasından itibaren R yarıçapına sahip daireden ibarettir. (Şekil 2.1)



şekil 2.1

$$V = R^2 \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \overline{V_3}) \quad (2.7)$$

$$V_R = V_0 \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \overline{V_3}) \quad (2.8)$$

$$S = \partial V \cup_1 \partial V_2 \cup \partial V_3 \quad (2.9)$$

$$S_0 = \partial V_0 \quad (2.10)$$

Eğer bu sınırsız V bölgesine sahipsek, sınırlı V_R bölgesini kurabiliriz. Bunun için merkezi sabit $O \in R^2$ noktası olan R yarıçaplı küresel V_0 bölgesini alırsak, R yarı çapı tüm bölgeleri içine alabilecek kadar büyük olmalıdır.

Şimdi R^2 'de yüzeyi S olan incelenecek basit bağımlı kapalı V_R bölgesinin tanımı Şekil (2.1)e göre şöyle yapılsın: V_0, V_1, V_2, V_3 , açık (sınırları içermeyen) bölgeleri dışında kalan noktaların tümü Şekil (2.1)'de de gösterilmiş, söz konusu açık bölgeler doğrultusundaki normal birim vektörlerin tümü n , bu açık bölgelerin bölgeye dahil olmayan sınırları (S_0 hariç) da S ile temsil edilirse, bu durumda açık bölge için üçüncü Green Teoremi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\int_{S \cup S_0} \left\{ \Psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial \Psi(p)}{\partial n_p} \right\} .dS_p + \int_{V_R} G(q, p) f(p) d\tau_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.11)$$

$$\alpha(q) = \begin{cases} 1, & q \in V_R \\ \frac{1}{2}, & q \in \partial V_R \\ 0, & q \notin V_R \end{cases} \quad (2.12)$$

Eğer $\psi(p)$ skaleri, homojen olmayan Helmholtz denkleminin R^2 'deki D gibi herhangi kapalı bir basit bağımlı bölgedeki çözümü ise aşağıdaki denklem sağlar:

$$L\psi = (\Delta + k^2)\psi(p) = f(p) \quad (2.13)$$

$G(q, p)$ skaleri, sözkonusu uzaya ait iki noktanın (q, p) fonksiyonu olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip olan $G(q, p)$, Helmholtz denkleminin bu iki boyutlu uzaydaki temel çözümü olarak adlandırılır:

$$L_p G(q, p) = L_q G(q, p) = 0 ; q, p \in D, q \neq p \quad (2.14)$$

L_p ve L_q notasyonlarında L operatörü sırası ile $q(x_q, y_q)$ ve $p(x_p, y_p)$ noktalarına etki etmektedir.

$G(q, p)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi bir gösterime sahiptir.

$$G(q, p) = -\frac{1}{2\pi} \ln|q - p| + H(q, p) ; q, p \in D \quad (2.15)$$

$R = |q - p|$, q ve p noktaları arasındaki mesafe olup $H(q, p)$ düzgün^{††} bir fonksiyondur.

(2.10) ve (2.11) denklemleri şöyle elde edilebilir: (2.6) denkleminin ele alınan Helmholtz denklemi ve onun iki çözümü olan $\psi(p)$ ve $G(q, p)$ için aşağıdaki gibi yazılarak,

^{††}Düzgün fonksiyon ile yüksek mertebeden türevlere sahip fonksiyon kastedilmektedir.

$$\int_D \{ \Psi(p) LG(q, p) - G(q, p) L\Psi(p) \} .dv = \int_{S+S_0} \left\{ \Psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n} - G(q, p) \frac{\partial \Psi(p)}{\partial n} \right\} .dS \quad (2.16)$$

önce sol taraftaki integralin içindeki birinci terimin (2.14) formülü nedeniyle sıfıra eşit olduğu göz önünde bulundurulur. D bölgesi içinde, D bölgesi sınırında ($\partial D=S$) ve D bölgesi dışında, $q=p$ durumunu incelemek üzere q 'nun merkez olduğu ε yarıçaplı küre sözü edilen üç hal için de dikkate alınır. ε sıfıra giderken, (2.16)'in sağ tarafındaki integral, birinci halde bu kürenin tüm yüzeyi üzerinden alınarak (2.11)'in ilk koşulu elde edilir. İkinci halde ise D bölgesinin tamamen dışındaki q noktası için integral alınacak yüzey yoktur ve üçüncü koşulun sonucunda sıfır değeri elde edilir.

Bunlara ek olarak Şekil (2.1)'de R sonsuza giderken, $\psi(p)$ ve $G(q, p)$ “Kaynaktan yayılım yapan enerji sonsuza doğru saçılım yapar; sonsuzdan kaynak alanına enerji saçılımı olmaz” diye ifade eden Sommerfeld Radyasyon Koşullarını sağladığı göz önüne alındığı zaman 2 Boyutlu uzay için tanımlanmış Sommerfeld Radyasyon Koşulları aşağıdaki gibidir:

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |p|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \psi(p)}{\partial |p|} - ik\psi(p) \right) = 0 \quad (2.17)$$

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |p|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial G(q, p)}{\partial |p|} - ikG(q, p) \right) = 0 \quad (2.18)$$

(q keyfi seçilmiş sabit bir nokta)

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} |q|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial G(q, p)}{\partial |q|} - ikG(q, p) \right) = 0 \quad (2.19)$$

(p keyfi seçilmiş sabit bir nokta)

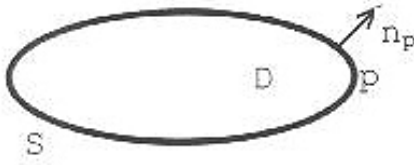
(2.18) ve (2.19) şartları ile aşağıdaki formül elde edilebilir:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_0} \left\{ \Psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial \Psi(p)}{\partial n_p} \right\} dS_p = 0 \quad (2.20)$$

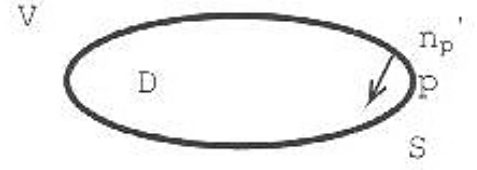
$$\int_S \left\{ \Psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n} - G(q, p) \frac{\partial \Psi(p)}{\partial n} \right\} .dS_p + \int_D G(q, p) f(p) d\tau_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.21)$$

2.1.3. Homojen Helmholtz Denkleminin Çözümünün Analitik Devamı: Sobolev Teoremi

R^2 uzayında, önceki bölümde ele alınan basit bağımlı, düzgün S yüzeyinin kuşattığı kapalı D bölgesi söz konusu olsun (Şekil (2.2)).



şekil 2.2



şekil 2.3

Şekil (2.2) için n_p , D bölgesi için, sınır S üzerindeki bir p noktasından bölge dışına doğrultudaki birim normal vektördür. Homojen Helmholtz denkleminin, kapalı bölge içinde de geçerli (R^2 uzayında, önceki bölümde ele alınan basit bağımlı, düzgün S yüzeyinin kuşattığı kapalı D bölgesi söz konusu olsun (Şekil (2.2)). (2.11) ve (2.21) ifadelerine göre, integral denklem şu biçimi alır;

$$\int_S \left\{ \Psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial \Psi(p)}{\partial n_p} \right\} .dS_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.22)$$

Şekil (2.3)'teki durum göz önüne alındığı zaman Homojen Helmholtz denkleminin Sommerfeld Radyasyon Koşulunu sağladığı D'nin tümleyeni olan $V = R^2 \setminus D$ açık bölgesi için integral ifadesi, S yüzeyi üzerinde, V bölgesinin dışına doğrultudaki p noktasında birim normal n'_p kullanılarak yazılırsa;

$$\int_S \left\{ \Psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n'_p} - G(q, p) \frac{\partial \Psi(p)}{\partial n'_p} \right\} .dS_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.23)$$

$$n'_p = n_p \quad (2.24)$$

Ele alınan iki durumdaki birim normal vektörler arasındaki (2.24) ilişkisi sayesinde, (2.23) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

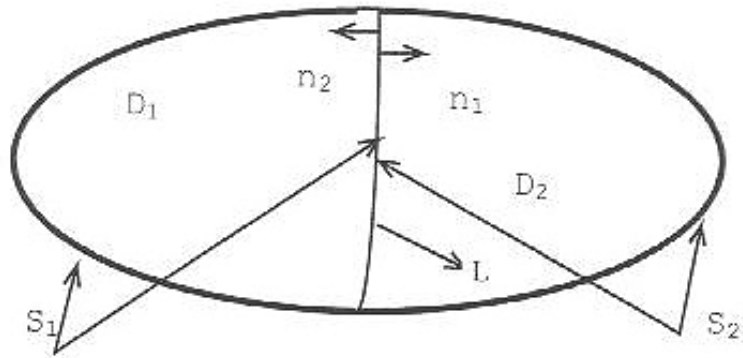
$$-\int_S \left\{ \Psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial \Psi(p)}{\partial n_p} \right\} dS_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (2.25)$$

n_p birim vektörünün, V açık bölgesi için yazılmış denklemde kullanılması, (2.22) 'deki ifadeyi kullanma durumunu ortaya çıkarır. Buna göre (2.22) denklemi S bölgesi için geçerli olduğundan, (2.25) denkleminin geçerli olduğu bölge artık, $V = R^2 \setminus (D \setminus S)$ kapalı bölgesi haline dönüşmüştür. (2.25)'e göre $\psi(p)$, homojen Helmholtz Denkleminin, sözü edilen bu bölgedeki bir çözümüdür.

(2.20)-(2.25) integrallerinin sonucu Sobolev teoremi olarak bilinir. Basit bağımlı kapalı iki bölge D_1 ve D_2 'ye ait sınırlar olan S_1 ve S_2 ortak bir sınır parçası L 'ye sahip olsunlar (Şekil(2.3)). Söz konusu yüzeylerden dışa doğrultudaki birim normal vektörler sırası ile n_1 ve n_2 'dir. $\psi_1(p)$ ve $\psi_2(p)$ aynı numaralı bölgelerde homojen Helmholtz denklemini sağlayan fonksiyonlar olsunlar.

$$(\Delta + k^2)\psi_1(p) = 0 \quad p \in D_1 \quad (2.26)$$

$$(\Delta + k^2)\psi_2(p) = 0 \quad p \in D_2 \quad (2.27)$$



şekil 2.4

$$\psi_1(p) = \psi_2(p) \quad ; p \in L \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \psi_1(p)}{\partial n_1} = -\frac{\partial \psi_2(p)}{\partial n_2} \quad ; p \in L \quad (2.29)$$

$n_1 = -n_2$ olduğundan , (2.29) özelliği, $\psi_1(p)$ ve $\psi_2(p)$ fonksiyonlarının, L yüzeyine göre sabit olacak herhangi bir normal birim vektör bakımından, aynı normal türevlere sahip olmaları anlamına gelir:

$$\frac{\partial \psi_1(p)}{\partial n_j} = -\frac{\partial \psi_2(p)}{\partial n_j} \quad ; p \in L, j = 1, 2 \quad (2.30)$$

Şimdi de,

$$D = (D_1 \cup D_2) \setminus L \quad (2.31)$$

olarak tanımlanan bölgede,

$$\psi(q) = \begin{cases} \psi_1(p), & p \in D_1 \setminus L \\ \psi_2(p), & p \in D_2 \setminus L \end{cases} \quad (2.32)$$

fonksiyonu tanımlansın. D bölgesi içindeki herhangi bir bölgeye (D_1 gibi) ait q noktası için, fonksiyon (2.21) ve (2.25) denklemlerine^{‡‡} göre yazılacak olursa, S_1 yüzeyi üzerinden alınacak integral, fonksiyonun S_1 'in kuşattığı bölge içindeki q noktası S_2 yüzeyinin dışında olduğundan, bu yüzey üzerinden alınacak integral sifıra eşit olacaktır. Bu yüzden $\psi(q)$ 'nun, S_1 ve S_2 yüzeyleri cinsinden bir alan üzerinden, (2.31)'deki gibi tanımlı D bölgesi içindeki tüm noktalar için tek bir integral ile ifade edilebilmesinin mümkün olduğu söylenebilir.

^{‡‡} Denklemdaki S yüzeyi burada S_1 ve S_2 yüzeyleri olarak ayrı ayrı dikkate alınacaktır.

Sözü edilen bölgeye ilişkin alan, S_1 ve S_2 yüzeylerinin arakesiti L üzerinde sağlanan koşullar incelendikten sonra belirlenebilir. Bu takdirde $\psi(q)$ fonksiyonunun L arakesiti üzerinden alınan integrali, S_1 ve S_2 üzerinden alınan integraller sırasında birer kere kendini gösterecektir. (2.28)-(2.30) koşulları dikkate alındığında, bu iki integralin toplamının sıfıra eşit olduğu görülebilir. (2.32) ile tanımlı fonksiyonun D bölgesi içindeki herhangi bir noktadaki değerine ilişkin ifade, $S=(S_1 \cup S_2) \setminus (2L)$ şeklinde tanımlı olup D bölgesinin tümünü kuşatmakta olan alan üzerinden, bu yüzeyin dışına doğrultudaki birim normal vektör (n) kullanılarak yazılacak (2.25) formülü ile elde edilebilir.

$$\psi(q) = \int_S \left\{ \Psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n} - G(q, p) \frac{\partial \Psi(p)}{\partial n} \right\} .dS_p \quad (2.33)$$

Buna göre Sobolev teoremi şu şekilde ifade edilebilir:

Ortak bir sınır parçasına sahip, kapalı iki bölge için farklı iki skaler fonksiyon, ilişkili oldukları bölgelerde homojen Helmholtz denkleminin temel çözümleri olsunlar. Ortak sınır parçasında, fonksiyonların değerleri birbirinin ters işaretlisi ise, söz konusu toplam bölgenin tümünde homojen Helmholtz denklemini sağlayan bir fonksiyon bulunabilir. Bu fonksiyon, bölgelere ait homojen Helmholtz denkleminin çözümü olan fonksiyonların toplam bölgeye analitik devamıdır.

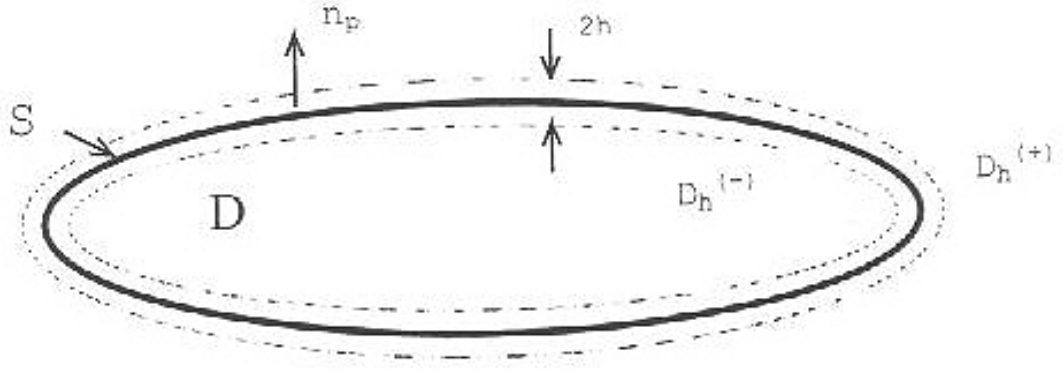
Sobolev teoreminin açık bölgeler için olan genelleştirilmiş formu, farklı açık bölgelerde homojen Helmholtz denklemini sağlayan fonksiyonların, ortak sınır dışında her yerde sürekli ikinci mertebeden türevlere sahip olması halinde, tüm R^2 için geçerli, homojen Helmholtz denklemini sağlayan ifadeye analitik devamının yapılabileceği belirtilir.

2.1.4. Dirichlet Problemi ve Saçılan Alanın İntegral İfadesi

Şekil (2.2)'deki cisme gelen alan $u^i(p)$ olsun. $u^i(p)$ sözkonusu R^2 uzayında, Homojen Helmholtz denklemini sağlar:

$$(\Delta + k^2)u^i(p) = 0 \quad (2.34)$$

Şekil(2.2)'deki şeklin ele alınması $\psi(p)$ 'nin belirlenişinin anlaşılması için önemlidir. $\psi(p)$, S yüzeyi hariç her yerde ikinci mertebeden kısmi türevlere, S yüzeyine içeriden ve dışarıdan yaklaşırken sürekli ifadeleri bulunan birinci türevlere sahip biçimde belirlenecektir. h sıfıra giderken bu değerler düzgün olarak sonlu limitlere yaklaşır.



şekil 2.5

$$S = \partial D \quad (2.35)$$

$$S_h^{(+)} = \{p + h.n_p : p \in S\} \quad (2.36)$$

$$S_h^{(-)} = \{p - h.n_p : p \in S\} \quad (2.37)$$

$$p^{(+)} = \{p + h.n_p\} \quad (2.38)$$

$$p^{(-)} = \{p - h.n_p\} \quad (2.39)$$

Saçılan alan S yüzeyi dışında homojen Helmholtz denklemini ve Sommerfeld radyasyon koşulunu sağlar.

$$(\Delta + k^2)u^s(p) = 0 \quad (2.40)$$

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |p|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u^s(p)}{\partial |p|} - iku^s(p) \right) = 0 \quad (2.41)$$

S yüzeyinin iki yanındaki Dirichlet sınır koşulu ise;

$$u^{s(\pm)}(p) + u^i(p) = 0 \quad p \in S \quad (2.42)$$

şeklinde. (2.34)-(2.42) denklem dizilerinin oluşturduğu sınır değer problemine Dirichlet sınır değer problemi denir.

$S_h^{(+)}$ ve $S_h^{(-)}$, Şekil (2.2)'de belirtilmiş olan $D_h^{(+)}$ dış ve $D_h^{(-)}$ iç bölgelerinin sınır yüzeyleridir. Bu yüzeyler sırası ile $p^{(+)}$ ve $p^{(-)}$ yer vektörlerinin uç noktalarının toplamından oluşmaktadır. (2.38) ve (2.39) denklemlerinde p , S yüzeyi üzerindeki bir noktanın yer vektörü, n_p dışarıya yönelmiş birim normal vektör ve h çok küçük değerinde pozitif bir skaler büyüklüktür.

(2.40) ve (2.41) denklemlerini sağlayan $u^s(p)$ fonksiyonu; (2.22) ve (2.25)'deki integral ifadeler kullanılarak gösterilebilir:

$$\int_{S_h^{(-)}} \left\{ u^s(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial u^s(p)}{\partial n_p} \right\} .dS_p = \begin{cases} u^s(q), & q \in D_h^{(-)} \\ 0, & q \in D_h^{(+)} \end{cases} \quad (2.43)$$

$$- \int_{S_h^{(+)}} \left\{ u^s(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial u^s(p)}{\partial n_p} \right\} .dS_p = \begin{cases} 0, & q \in D_h^{(-)} \\ u^s(q), & q \in D_h^{(+)} \end{cases} \quad (2.44)$$

$2h$ kalınlığındaki $S_h^{(+)}$ ve $S_h^{(-)}$ yüzeylerinin arasındaki cidar D_h haricinde, herhangi bir yerde sabit bir q noktası düşünölsün. Söz konusu bölgenin her yerinde $u^s(p)$ 'nin, kendisinin, birinci türevlerinin sürekli olduğu ve h 'nin çok küçük bir pozitif sayı olduğu halde bu değerlerin S üzerinde limitlerinin bulunduğu belirtilmişti. Seçilen q noktası bakımından $G(q, p)$ 'de sonsuz düzgün bir fonksiyondur. Bu yüzden, (2.43) ve (2.44) denklemlerinin sol taraflarında $h \rightarrow 0$ yapılırsa, aynı integraller S yüzeyi üzerinden ve ilişkin limit fonksiyonlar olan $u^{s(\pm)}$ ve $\frac{\partial}{\partial n} u^{s(\pm)}$ cinsinden olacak biçimde geçerlidir:

$$\int_S \left\{ u^{s(-)}(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial u^{s(-)}(p)}{\partial n_p} \right\} .dS_p = \begin{cases} u^s(q), & q \in (D \setminus S) \\ 0, & q \in R^2 \setminus D \end{cases} \quad (2.45)$$

$$- \int_S \left\{ u^{s(+)}(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial u^{s(+)}(p)}{\partial n_p} \right\} .dS_p = \begin{cases} 0, & q \in (D \setminus S) \\ u^s(q), & q \in R^2 \setminus D \end{cases} \quad (2.46)$$

(2.45) ve (2.46) denklemlerin birleşimiyle ortaya çıkan formül şu şekildedir:

$$u^s(q) = \int_S \left\{ -\delta u^s(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} + G(q, p) \delta \frac{\partial u^s(p)}{\partial n_p} \right\} .dS, \quad q \in R^2 \setminus S \quad (2.47)$$

$$\delta u^s(p) = u^{s(+)}(p) - u^{s(-)}(p) \quad (2.48)$$

$$\delta \frac{\partial u^s(p)}{\partial n} = \frac{\partial u^{s(+)}(p)}{\partial n} - \frac{\partial u^{s(-)}(p)}{\partial n} \quad (2.49)$$

Denklemlerdeki saçılan alanın sahip olduğu uniform limit değerleri aşağıdaki gibidir:

$$u^{s(+)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} u(p + hn_p) \quad ; \quad p \in S \quad (2.50)$$

$$u^{s(-)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} u(p - hn_p) \quad ; \quad p \in S \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^{s(+)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial n_p} u(p + hn_p) \quad ; \quad p \in S \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^{s(-)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial n_p} u(p - hn_p) \quad ; \quad p \in S \quad (2.53)$$

Şu ana kadar elde edilen formüllerde Dirichlet Sınır Koşulu uygulanmamıştır. Bu, $u^s(q) = 0$ elde edilen, (2.48) ve (2.49) denklemlerinin sifıra eşit olduğu durumda da geçerlidir. Bu durum hiçbir saçıcı cismin olmadığı duruma karşı gelmekte olup normal ve doğal bir sonuçtur. Cisim yoksa saçılım ve saçılan alan da meydana gelmez. Sobolev teoreminin açık bölgeler için genelleştirilmiş formu, $u^{s(\pm)}(q)$ (2.40)-(2.41) ve (2.50)-(2.53) denklemlerini sağladıkça geçerlidir.

(2.42) ile verilen Dirichlet koşulu kullanılırsa, (2.48) eşitliğinin sifır olduğu görülebilir. Bu nedenle Dirichlet kırımın probleminde saçılan alan ifadesi aşağıdaki gibi bir integral formülden ibarettir:

$$u^s(q) = \int_S G(q, p) \cdot \delta \frac{\partial}{\partial n} u^s(p) \cdot dS ; q \in R^2 \setminus S \quad (2.54)$$

Saçılan alan için cismin gerekliliği nedeniyle $\delta \frac{\partial}{\partial n} u^s(p) = 0$ olamaz. Çünkü bu saçılan alanın sıfır olması, yani var olmaması anlamına gelmektedir. Dirichlet koşulu(2.54)'ün sağ bölümünü tekrar derlemek için kullanılırsa;

$$-u^i(q) = \int_S G(q, p) \cdot J_D(p) \cdot dS ; q \in S \quad (2.55)$$

bilinmeyen fonksiyon olarak yeni tanımlanan,

$$J_D(p) = \frac{\partial}{\partial n} u^s(p) \quad (2.56)$$

kullanılarak yazılabilir. Denklemin çözümü, $J_D(p)$ bulunduktan sonra, uzayda herhangi bir noktadaki saçılan alan

$$u^s(q) = \int_S G(q, p) \cdot J_D(p) \cdot dS ; q \in R^2 \quad (2.57)$$

şeklinde elde edilebilir. Fakat bilinmelidir ki $J_D(p)$ sürekli fonksiyonlar sınıfından olmalıdır.

3. İntegral Denklemin Çözümü

3.1. Sonsuz İnce Sonlu Uzunluktaki Şerit Sistemi için Dirichlet

Sınır Problemi ve Saçılan Alanın İntegral İfadesi

Sonsuz ince sonlu uzunluktaki şerit sistemi için (Şekil (1.1)), Dirichlet sınır koşulu altında skaler dalga saçılması problemindeki saçılan alan $u^s(p)$ 'nin sağlanması için gereken denklemler aşağıdaki gibidir:

Homojen Helmholtz Denklemi:

$$(\Delta + k^2)u^s(p) = 0 \quad ; \quad p \in \mathbb{R}^2 \setminus S \quad (3.1)$$

Dirichlet Sınır Koşulu:

$$u^{s(\pm)}(p) + u^i(p) = 0 \quad ; \quad p \in S \quad (3.2)$$

Green Özdeşliği ile ulaşılan Saçılan Alan ifadesi:

$$u^s(q) = \int_S J_D(p) \cdot G(q, p) \cdot dSp \quad ; \quad q \in \mathbb{R}^2 \quad (3.3)$$

\mathbb{R}^2 Boş uzayı için Green Fonksiyonu:

$$G(q, p) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|q-p|) \quad ; \quad q, p \in \mathbb{R}^2 \quad (3.4)$$

S yüzeyinde bilinmeyen fonksiyon (akım yoğunluğu):

$$J_D(p) = \frac{\partial}{\partial n} u^s(p) \quad (3.5)$$

3.2. Dirichlet Kırınım Problemi için İntegral Denklemin

Parametrize formu.

$$-u^i(q) = \int_s J_D(p).G(q, p).dS \quad ; \quad q \in S \quad (3.6)$$

ifadesini daha önce elde etmiştik.

$J_D(p)$ bilinmeyen sürekli bir fonksiyondur. $G(q, p)$ ise iki boyutlu boş uzay için Green Fonksiyonu olarak bilinmektedir.

$$G(q, p) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|q-p|) \quad ; \quad q, p \in R^2 \quad (3.7)$$

Her şeyden önce S şeridinin parametrize değerinin aşağıdaki gibi olduğunu göz önünde bulundururuz:

$$\eta: [-\pi, \pi] \rightarrow S \quad (3.8)$$

$$\eta = \eta(\vartheta) \equiv (x(\vartheta), y(\vartheta)) \quad ; \quad \vartheta \in [-\pi, \pi] \quad (3.9)$$

Burada yapmak istediğimiz (3.6) integral denklemini $\eta(\vartheta)$ parametrik ifadesi ile baştan derlemektir. q ve p noktalarının uygun parametrik değerlerle tanımlandığını göz önünde bulunduralım:

$$q = \eta(\vartheta) \quad ; \quad p = \eta(\tau) \quad (3.10)$$

ve bu ifadelerle aşağıdaki $R(\vartheta, \tau)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$R(\vartheta, \tau) = |\eta(\vartheta) - \eta(\tau)| = \left\{ [x(\vartheta) - x(\tau)]^2 + [y(\vartheta) - y(\tau)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

Bilinmeyen $J_D(\vartheta)$ fonksiyonunu ve verilmiş olan $g(\vartheta)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$J_D(\vartheta) = l(\vartheta).J_D(\eta(\vartheta)) \quad , \quad \vartheta \in [-\pi, \pi] \quad (3.12)$$

$$g(\vartheta) = -u^i(\eta(\vartheta)) \quad , \quad \vartheta \in [-\pi, \pi] \quad (3.13)$$

ve $l(\vartheta)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$l(\vartheta) = \left\{ [x'(\vartheta)]^2 + [y'(\vartheta)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} > 0 \quad ; \quad \vartheta \in [-\pi, \pi] \quad (3.14)$$

Kolayca görülebilir ki S şeridinin boyutsal farklılığı aşağıdaki denklige eşittir:

$$ds = l(\vartheta)d\vartheta \quad (3.15)$$

(3.11) ve (3.15) formüllerinin kullanılması ile (3.6) formülü yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_D[kR(\vartheta, \tau)] \cdot J_D(\vartheta) d\tau = g(\vartheta) \quad ; \quad \vartheta \in [-\pi, \pi] \quad (3.16)$$

$$G_D[kR(\vartheta, \tau)] = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR(\vartheta, \tau)) \quad (3.17)$$

(3.16) denkleminin çözümüne başlamadan önce $G[kR(\vartheta, \tau)]$ integralinin tekilliğe sahip yapısını anlamamız gerekir. Bunu bir sonraki bölümde ele alacağız.

3.3. $G_D[kR(\vartheta, \tau)]$ fonksiyonun Lokal Tekil Açılımı

$f(\vartheta)$ fonksiyonu, $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ aralığında tanımlı ve pozitif tam sayılar için $m \geq 0$; $C^m(\vartheta^1)$ sınıfına aittir. Eğer bu fonksiyon 2π periyodikliğinde devamlılığı olan $(-\infty, \infty)$ aralığında $C^\infty(-\infty, \infty)$ sınıfına dahilse;

$$f(\vartheta) \in C^m(\vartheta^1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\vartheta) \in C^m[-\pi, \pi] \\ f^{(k)}(-\pi+0) = f^{(k)}(\pi-0), \quad K = 0, 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Lokal tekilliğe sahip ifade için $G[kR(\vartheta, \tau)]$ fonksiyonu keyfi bir $N \geq 2$ tamsayı değeri için aşağıdaki tekillik açılımı uygulanabilir.

$$G_D[kR(\vartheta, \tau)] = \frac{1}{2\pi} \ln|\delta| \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N A_n(\theta) \delta^n \right\} + F_N(\vartheta, \tau) \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln|\delta| + O(\delta^2 \ln \delta) \quad (3.20)$$

$$\delta = \tau - \vartheta$$

$F_N(\vartheta, \tau)$ fonksiyonu, $|\vartheta - \tau| < 2\pi$ domeninde N'inci dereceye kadar olan türevlere sahip düzgün bir fonksiyon olup;

$A_n(\vartheta)$, reel k ve $A_n(\vartheta) \in C^\infty(Q^1)$ koşullarına dahil olarak reel değerli bir fonksiyondur.

n'e bağımlı olarak elde edeceğimiz;

$$A_2(\vartheta) = -\frac{(kl)^2}{4}; \quad A_3(\vartheta) = -\frac{k^2 P^{1,2}}{4}; \quad (3.21)$$

$$A_4(\vartheta) = -\frac{(kl)^4}{64} - \frac{3k^2 P^{2,2} + 4k^2 P^{1,3}}{48}; \quad (3.22)$$

$$A_5(\vartheta) = -\frac{(kl)^2 (k^2 P^{1,2})}{32} - \frac{k^2 P^{1,4} + 2k^2 P^{2,3}}{48}; \quad (3.23)$$

$$P^{i,j} = P^{i,j}(\vartheta) = x^{(i)}(\vartheta) y^{(j)}(\vartheta) + x^{(j)}(\vartheta) y^{(i)}(\vartheta) \quad (3.24)$$

$$l = l(\vartheta) = [P^{1,1}(\vartheta)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

notasyonları tanımlanmıştır.

Bilindiği üzere sıfıncı mertebeden birinci tür Hankel fonksiyonu:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z) \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilebilir. $J_0(z)$ ve $Y_0(z)$ sırası ile sıfıncı mertebeden Bessel ve Neumann fonksiyonları olup aşağıdaki gibi güç serileri olarak da tanımlanabilir:

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!} \quad (3.27)$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \left[\ln \frac{z}{2} + \gamma \right] - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (3.28)$$

$$\gamma = 0.577215\dots \quad (3.29)$$

(Euler Sabiti)

N=5 olarak seçildiği takdirde, (3.26)-(3.29) formülleri ele alınırsa;

$$H_0^{(1)}(z) = i \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} \left[1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{6} + z^6 \varphi_1(z) \right] + \varphi_2(z) \quad (3.30)$$

$\varphi_1(z)$ ve $\varphi_2(z)$ kompleks düzlemde analitik olarak tanımlı fonksiyonlardır.

Aşağıdaki notasyonları tanımlandıkları gibidirler:

$$x^{(k)} = \frac{\partial^k x(\vartheta)}{\partial \vartheta^k} \quad ; \quad y^{(k)} = \frac{\partial^k y(\vartheta)}{\partial \vartheta^k} \quad (3.31)$$

$$a = \frac{P^{1,2}}{l^2} \quad ; \quad b = \frac{1}{12l^2} (3P^{2,2} + 4P^{1,3}) \quad ; \quad c = \frac{1}{12l^2} (P^{1,4} + 2P^{2,3}) \quad (3.32)$$

$x(\vartheta)$, $y(\vartheta)$ fonksiyonları için Binom Serileri ve Taylor Serilerini kullanmak yoluyla direkt hesaplama yöntemi ile aşağıdaki ifadelere ulaşılabilir:

$$R^2 = R^2(\vartheta, \tau) = \delta^2 l^2 \left[1 + a\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + \delta^4 \varphi_3(\vartheta, \tau) \right] \quad (3.33)$$

$$R^4 = R^4(\vartheta, \tau) = \left[R^2(\vartheta, \tau) \right]^2 = \delta^4 l^4 \left[1 + 2a\delta + \delta^2 \varphi_4(\vartheta, \tau) \right] \quad (3.34)$$

$$\delta = \tau - \vartheta$$

$\varphi_3(z)$ ve $\varphi_4(z)$ sonsuz kere türevleri alınabilir fonksiyonlardır. (3.33) ve (3.34) formüllerinin sağ kesimleri, formülüne yerleştirilirse;

$$H_0^{(1)}(kR) = i \frac{2}{\pi} \ln(kR) \left\{ 1 - \frac{(kl)^2}{4} \delta^2 [1 + a\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + \delta^4 \varphi_3(\vartheta, \tau)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (kl)^4 \delta^4 [1 + 2a\delta + \delta^2 \varphi_4(\vartheta, \tau)] \right\} + \varphi_2(kR) \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.32) formülünden;

$$\ln[kR(\vartheta, \tau)] = \frac{1}{2} \ln \delta^2 + \varphi_5(\vartheta, \tau) = \ln|\delta| + \varphi_5(\vartheta, \tau) \quad (3.36)$$

elde edilebilir. Burada $\varphi_5(\vartheta, \tau)$, $|\tau - \vartheta| < 2\pi$ aralığında sonsuz kere türevleri alınabilen bir fonksiyondur. (3.35) ve (3.36)'dan anlaşılacağı üzere N=5 durumu için (3.19)'un devamındaki özellikleri doğrultusunda $|\tau - \vartheta| < 2\pi$ aralığı için doğruluğu görülebilir.

N=5 koşulu için somut $A_n(\vartheta)$, $n = 3, 4, 5$ hesaplamasından da görüleceği üzere (3.18) -(3.36) aralığındaki ispat ifadeleri $N \geq 2$ için geçerli tüm durumlar için de kullanılabilir. Bu durum (3.18) formülünün doğruluğu ispatı anlamına gelmektedir.

$\tau - \vartheta \rightarrow 2\pi$ durumu için $x(\vartheta), y(\vartheta)$ ifadeleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sonsuz düzgün fonksiyon olarak açılabilir. Yeni tanımlanmış olan değişkenimiz $\tilde{\vartheta} = \vartheta + 2\pi$ ve açık olarak tanımlanmış olan $R(\vartheta, \tau)$ ifademiz $R(\vartheta, \tau) = R(\tilde{\vartheta}, \tau)$ halini alacaktır. (3.19) formülünün türetilmesi ile $A_n(\vartheta) = A_n(\tilde{\vartheta})$ ifadesi kullanılabilir. Sonuç olarak $-\pi \leq \vartheta < \tau \leq \pi$ bölgesinde tekil açılım ifade edilebilir.

Benzer durumlar, $\tau - \vartheta \rightarrow -2\pi$ ($\tilde{\vartheta} = \vartheta - 2\pi$ durumu ile) ifadeleri kullanılabilir. Bu da teorinin ispatı anlamına gelmektedir.

3.4. Şerit Sistemine göre İntegral Denklem İfadeleri

R^2 'de tanımlı herhangi iki nokta olan q ve p için kartezyen koordinatlar aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$q = (x_q, y_q) ; p = (x_p, y_p) \quad (3.37)$$

Bu iki nokta arasındaki uzaklık;

$$|q - p| = \left\{ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

şeklinde ifade edilebilir. Uzayda herhangi bir noktadaki saçılan alan ifadesinin

$$u^s(q) = \int_s J_D(p).G(q, p).dSp \quad ; \quad q \in R^2 \quad (3.39)$$

şeklinde olduğunu daha önceden de görmüştük.

Parametrik ifade altında ele alındığında denklemimiz aşağıdaki şekli almıştı.

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_D[kR(\vartheta, \tau)].J_D(\vartheta)d\tau = g(\vartheta) \quad ; \quad \vartheta \in [-\pi, \pi] \quad (3.40)$$

Dirichlet sınır değer problemine ilişkin Green fonksiyonu ise parametrik ifadeler olan (3.7)-(3.11) ifadeleri göz önünde bulundurulduğu vakit aşağıdaki şekli almıştı:

$$G_D[kR(\vartheta, \tau)] = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR(\vartheta, \tau)) \quad (3.41)$$

$$\eta: [-\pi, \pi] \rightarrow S \quad (3.42)$$

$$\eta = \eta(\vartheta) \equiv (x(\vartheta), y(\vartheta)) \quad ; \quad \vartheta \in [-\pi, \pi] \quad (3.43)$$

$$q = \eta(\vartheta) \quad ; \quad p = \eta(\tau) \quad (3.44)$$

$$R(\vartheta, \tau) = |\eta(\vartheta) - \eta(\tau)| = \left\{ [x(\vartheta) - x(\tau)]^2 + [y(\vartheta) - y(\tau)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.45)$$

Yukarıda ifade edilen $[-\pi, \pi]$ aralığında ifade edilen formüller, integral denklemimizin çözümünde ortogonal polinomlar yönteminin kullanılacak olmasından ötürü $[-1, 1]$ aralığına çekilecektir. Bu çerçevede incelendiği vakit parametrik ifadelerimizi aşağıdaki gibi incelememiz mümkün olacaktır:

$$\eta: [-1, 1] \rightarrow S \quad (3.46)$$

$$\eta = \eta(\vartheta) \equiv (x(\vartheta), y(\vartheta)) \quad ; \quad \vartheta \in [-1, 1] \quad (3.47)$$

$$q = \eta(\vartheta) \quad ; \quad p = \eta(\tau) \quad (3.48)$$

$$u^i(\vartheta) = \int_{-1}^1 G_D[kR(\vartheta, \tau)].J_D(\vartheta)d\tau \quad ; \quad \vartheta \in [-1, 1] \quad (3.49)$$

Bundan sonraki adımda yapılması gereken, (3.45) denkleminde gelen alan ifadesi yordamı ile $J_D(\vartheta)$ 'yi çözmek ve bu denklem yordamı ile saçılan alanı hesaplamaktır.

$$u^s(q) = \int_{-1}^1 G[q, \eta(\tau)] \cdot J(\tau) \cdot d\tau \quad ; \quad \tau \in [-1, 1] \quad (3.50)$$

3.5. İntegral Denkleminin Cebrik Sisteme İndirgenmesi

Bir önceki bölümde (3.49) ve (3.50) denklemlerinin nümerik yollarla incelenebilmesi için cebrik sisteme indirgenmeleri gerekmektedir. (3.49) formülü gelen dalğanın Green özdeşliği ile ifade edilmesi anlamına gelmekte olup bu denklemin kullanılmasındaki temel amaç $J_D(\vartheta)$ ^{§§} bilinmeyen denklemini bilenen bir ifadeye çevirmektir. Aynı $J_D(\vartheta)$ ifadesi saçılan alanın bulunmasında temel teşkil edecektir.

R^2 boş uzayı için geçerli olan Green Fonksiyonu, temeli olan Hankel fonksiyonunu bileşenlerinden sıfıncı mertebeden Neumann fonksiyonunun içerdiği $\ln \frac{z}{2}$ ifadesi sebebiyle $q=p$ noktasında logaritmik tekillik sergilemektedir::

$$G[q, p] = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|q-p|) \quad (3.51)$$

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z) \quad (3.52)$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \left[\ln \frac{z}{2} + \gamma \right] - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (3.53)$$

Bu durumda tekilliği ortadan kaldırabilmek için R^2 Green fonksiyonunun temelini oluşturan Hankel fonksiyonun düzgün kısmının tekillik oluşturan $\ln \frac{z}{2}$ ifadesinden ayrıştırılması gerekmektedir. Bu sayede düzgün çekirdek fonksiyonumuz $K(\vartheta, \tau)$ elde edilecektir. Bu işlemin gerçekleştirilmesi Ek-2'de anlatılmıştır.

^{§§} $J_D(\vartheta)$ denklemini cismin yüzeyindeki akım yoğunluğu fonksiyonu olarak bilinmektedir.

Bu ayrıştırma işlemine regülerleştirme denmektedir. Regülerleştirilmiş 2-boyutlu Green Fonksiyonunun *** düzgün kısmı aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$G^R[z] = \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| \cdot [J_0(z) - 1] + \frac{1}{2\pi} J_0(z) \cdot \gamma - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \right\} - \frac{i}{4} J_0(z) \quad (3.54)$$

Bilindiği üzere $J_0(z)$ sıfırıncı dereceden Bessel fonksiyonu z değerinin 0 olduğu yada bir başka deyişle $|q-p|=0$ olduğu durum için $J_0(0)$, 1 sonucunu verecektir. Bu doğrultudan hareketle (3.54) içinde yer alan $\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| \cdot [J_0(z) - 1]$ ifadesindeki $[J_0(z) - 1]$ sıfır değerini alacağı için $\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| \cdot [J_0(z) - 1]$ ifadesi de sıfır değerine gidecek ve göz ardı edilecektir.

Bu durumda $z = |q-p|=0$ için değeri için regülerleştirilmiş Green Fonksiyonu şu hali alacaktır.

$$G^R[z] = \left\{ \frac{1}{2\pi} J_0(z) \cdot \gamma - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \right\} - \frac{i}{4} J_0(z) \quad (3.55)$$

Sonuç olarak sırası ile Green Fonksiyonu ve Regülerleştirilmiş Green Fonksiyonu;

$$G[k|q-p] = \frac{1}{2\pi} \ln |q-p| + G^R(k|q-p) \quad (3.56)$$

$$G^R[k|q-p] = K(k|q-p) \quad (3.57)$$

(3.51) formülünde logaritmik kısım ile düzgün kısım birbirinden ayrıştırılmıştır.

*** 2 boyutlu ortam için geçerli Green Fonksiyonu bu noktadan sonra Green Fonksiyonu olarak adlandırılacaktır.

$$K(u, v) = -\frac{1}{\pi} \ln|u, v| + G(u, v) \quad (3.58)$$

(3.58)'de tanımlı olan $K(u, v)$, tüm birinci mertebeden kısmi türevleri olan ve ikinci mertebeden türevlerinde sadece $\ln|u-v|$ gibi bir tekilliği bulunan, düzgün bir fonksiyondur. Kısaca:

$$K(u, v) \in C^1(u \in [-1, 1], v \in [-1, 1]) \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} K(u, v), \frac{\partial^2}{\partial v^2} K(u, v), \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} K(u, v), \in L_2(u \in [-1, 1], v \in [-1, 1]) \quad (3.60)$$

3.5.1. Denklem Terimlerinin Fourier-Chebyshev Açılımları

Bir önceki bölümde belirtilen tekillik özelliklerine sahip $K(u, v)$ fonksiyonu ile aşağıdaki ifadelerle sahip $b(u)$ fonksiyonları uygun ortogonal polinom olan Chebyshev polinomları ile ifade edilmeye elverişli ve yeteri kadar düzgün fonksiyonlardır. Şerit sisteminin çözümü için ortogonal polinomlardan Chebyshev polinomlarının seçilmesinin en önemli nedeni Chebyshev polinomlarının lineer sistem kapsamına giren şerit yapılarının uçlarda da verimli çalışmasıdır. Şerit sisteminin de uçlu (köşeli) olduğu göz önünde bulundurulduğu vakit tercih edilen polinomun doğruluğu anlaşılmaktadır.

Birinci tür Chebyshev polinomu:

$$T_n(x) = \cos n\varphi ; x = \cos \varphi ; \varphi = \arccos x \quad (3.61)$$

$$T_0(x) = 1 ; T_1(x) = x \quad (3.62)$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (3.63)$$

ifadeleri ile tanımlanabilir.

Normalleştirilmiş Chebyshev polinomu; Chebyshev polinomunun normunun, karesine bölünmüş hali olarak tanımlanır:

$$d_n^2 = (\|T_n(x)\|)^2 = \begin{cases} \pi/2 & ; n = 1, 2, 3, \dots \\ \pi & ; n = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\hat{T}_n(x) = T_n(x) / d_n \quad (3.65)$$

Normalleştirilmiş Chebyshev polinomları aracılığı ile aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

$$-\frac{1}{\pi} \ln|u-v| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{T}_n(u)\widehat{T}_n(v)}{\gamma_n^2} \quad ; \quad \gamma_0 = (\ln 2)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \gamma_n = |n|^{\frac{1}{2}}, \quad n \neq 0 \quad (3.66)$$

$$X(v) = \left(\frac{1}{1-v^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \widehat{T}_n(v) \quad (3.67)$$

(3.67) denkleminin Fourier-Chebyshev katsayıları $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, problemin çözümü için bulunmalarına çalışılan ve bilinmeyen fonksiyon olan $J_D(\vartheta)$ 'nin bilinen bir yapıya ulaştırılması için gerekli olan katsayılardır. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ katsayıları bir sonraki aşamada ifade edilen $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{k_{nm}\}_{m,n=0}^{\infty}$ katsayılarının matrix ortamına taşınıp genel bir gösterimle;

$$[k_{nm}][x_n] = [b_n] \quad (3.68)$$

yapısındaki $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ katsayıları Gauss-Eleminasyon^{†††} yada LU ayrıştırma gibi matrix çözücü operatörler ile bulunabilir.

$$u^i(\vartheta) = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln|kR(\vartheta, \tau)| + K(kR(\vartheta, \tau)) \right\} J_D(\vartheta) d\tau \quad ; \quad \vartheta \in [-1, 1] \quad (3.69)$$

yine aynı şekilde notasyonda değişiklik yapacak olursak;

$$b(u) = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln|u-v| + K(u, v) \right\} J_D(v) dv \quad ; \quad u \in [-1, 1] \quad (3.70)$$

denklemini tanımlanabilir. (3.49) denkleminin her iki tarafı da Fourier Serisine açılması nümerik olarak çalışma yapılabilmesi için uygun zemin oluşturacaktır. $b(u)$ ve $K(u, v)$ aşağıdaki gibi Fourier – Chebyshev Seri açılımları ile ifade edilebilirler:

$$b(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \widehat{T}_n(u) \quad ; \quad u \in [-1, 1] \quad (3.71)$$

^{†††} Tez'de x_n katsayılarını bulmak için tam pivotlama (full pivoting) özelliğine sahip Gauss Eleminasyon yöntemi kullanılmıştır.

$$K(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{nm} \widehat{T}_m(u) \widehat{T}_n(v) \quad ; \quad u, v \in [-1, 1] \quad (3.72)$$

Yukarıdaki seri ifadelerin Fourier- Chebyshev katsayıları da şu şekilde yazılabilir:

$$\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \quad , \quad \{k_{nm}\}_{m,n=0}^{\infty} \quad (3.73)$$

$$b_n = \int_{-1}^1 \frac{b(u) \widehat{T}_n(u)}{\sqrt{(1-u^2)}} du \quad (3.74)$$

$$= d_n^{-1} \int_0^{\pi} b(\cos \vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta \quad (3.75)$$

$$k_{nm} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(u, v) \widehat{T}_m(u) \widehat{T}_n(v)}{\sqrt{(1-u^2)} \sqrt{(1-v^2)}} du dv \quad (3.76)$$

$$= d_n^{-1} d_m^{-1} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} K(\cos \vartheta, \cos \tau) \cos m\vartheta \cos n\tau d\vartheta d\tau \quad (3.77)$$

(3.74) ve (3.75) tipinde tanımlanan integral denklemlerin çözümü için kullanılan tekniklerden biri de Gauss-Quadratic^{†††} formülleri olarak tanımlanan tekniklerdir. Sözü edilen integral denklemlerinin Gauss-Quadratic Açılımları aşağıdaki gibi olacaktır:

$$b_n = \int_{-1}^1 \frac{b(u) \widehat{T}_n(u)}{\sqrt{(1-u^2)}} du \square \sum_{i=1}^r \omega_i b(x_i) \widehat{T}_n(x_i) \quad (3.78)$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{r} \quad ; \quad x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2r} \pi\right) \quad (3.79)$$

$$k_{nm} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(u, v) \widehat{T}_m(u) \widehat{T}_n(v)}{\sqrt{(1-u^2)} \sqrt{(1-v^2)}} du dv \square \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i^2 K(u_i, v_j) \widehat{T}_m(u_i) \widehat{T}_n(v_j) \quad (3.80)$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{r} \quad ; \quad u_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2r} \pi\right) \quad ; \quad v_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2r} \pi\right) \quad (3.81)$$

şeklinde açılabilir.

^{†††} Bknz: Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.). §25 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, pp.889. Quadratic ifadesi “ikinci dereceden anlamına gelmektedir. Tezin akışında ifade bütünlüğünü korumak için orjinaline bağlı kalınarak “Gauss- Quadratic” terimi kullanılacaktır.

Gelen dalga ifadesi parametrik olarak $u^i(\eta(\vartheta))$ göz önüne alındığı ve $b(u)$ 'nun yerine geçtiği takdirde b_n Fourier-Chebyshev katsayıları şu şekilde yeniden ifade edilebilirler:

$$b_n \square \sum_{i=1}^r \frac{\pi}{r} u^i(\eta(x_i)) \widehat{T}_n(\eta(x_i)) \quad (3.82)$$

Benzer durum k_{mn} katsayıları için de uygulanabilir:

$$k_{mn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(u,v) \widehat{T}_m(u) \widehat{T}_n(v)}{\sqrt{(1-u^2)} \sqrt{(1-v^2)}} du dv \square \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i^2 K(\eta(u_i), \eta(v_j)) \widehat{T}_m(\eta(u_i)) \widehat{T}_n(\eta(v_j)) \quad (3.83)$$

3.5.2. Fourier –Chebyshev Katsayılarının $m, n \rightarrow \infty$ Halinde Davranışları

(3.66) eşitliği, logaritmik tekillik içeren söz konusu (3.69) integral denklemin tekil kısmının değerlendirilmesi açısından önemlidir.

$K_D(\vartheta, \tau)$ çekirdek fonksiyonuna ait $\{k_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$ katsayıları aşağıda belirtilen eşitsizliği sağlamaktadır:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+|s|^2)(1+|m|^2) |k_{ms}|^2 < \infty \quad (3.84)$$

bu denklği sağlamak için (3.59) ve (3.60)'daki türevler uygun değişken dönüşümleri ile aynı değişkenlere sahip hale getirilir. Bu dönüşümler (3.61) bağıntısından elde edilir. Bir sonraki aşamada (3.77) ifadesi hesaplanarak söz konusu türevleri aynı integral altında elde edilmektedir. Daha sonra bu türevler cinsinden ifade edilen Fourier katsayılarının, sağlamaları zorunlu olan Parseval eşitsizliği kullanılarak (3.84) sonucuna ulaşılabilir.

Eğer bir fonksiyon aşağıdaki gibi Fourier serileri ile ifade edilebiliyorsa;

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (3.85)$$

Bessel eşitsizliği Parseval Teoremi olarak bilinen denklğe dönüşür.

3.5.3. İntegral Denklemin Sonsuz Lineer Cebir Sistemine İndirgenmesi

Bu bölümde, 3.4.1. bölümünde elde edilen gösterimler,

$$b(u) = \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln |u-v| + K(u,v) \right\} Z(v) dv ; u \in [-1,1] \quad (3.86)$$

şeklindeki integral denklemde yerine koyulacaktır.

Normalleştirilmiş Chebyshev polinomları aşağıdaki gibi bir integralde kullanılırsa ortogonallik özelliklerinin kullanılmasıyla:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \widehat{T}_n(x) \widehat{T}_m(x) dx = \delta_{m,n} \quad , \quad m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.87)$$

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0; m \neq n \\ 1; m = n \end{cases} \quad (3.88)$$

(3.66) ve (3.67)

$$-\frac{1}{\pi} \ln |u-v| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{T}_n(u) \widehat{T}_n(v)}{\gamma_n^2} \quad ; \quad \gamma_0 = (\ln 2)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \gamma_n = |n|^{\frac{1}{2}} \quad , \quad n \neq 0$$

$$X(v) = \left(\frac{1}{1-v^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \widehat{T}_n(v)$$

formülleri (3.86)'da yerine konulursa:

$$\int_{-1}^1 -\frac{1}{\pi} \ln |u-v| X(v) dv = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} x_n \widehat{T}_n(u) \quad , \quad u \in [-1,1] \quad (3.89)$$

benzer şekilde aynı yerine koyma işlemlerini (3.71) ve (3.72)'de yerine koyarsak;

$$b(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \widehat{T}_n(u) \quad ; \quad u \in [-1,1]$$

$$K(u,v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{nm} \widehat{T}_m(u) \widehat{T}_n(v) \quad ; \quad u, v \in [-1,1]$$

aşağıdaki ifadelerle ulaşırız:

$$\int_{-1}^1 K(u, v) X(v) dv = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{mn} x_n \hat{T}_m(u) \quad (3.90)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} x_n \hat{T}_n(u) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{mn} x_n \hat{T}_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{T}_n(u) \quad (3.91)$$

$\{\hat{T}_n(u)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonlarının oluşturduğu denklem sisteminin, sol ve sağ tarafları Fourier-Chebyshev katsayılarının eşitliği aşağıdaki sonsuz cebirsel lineer denklem sisteminin elde edilmesini sağlar:

$$\frac{1}{\gamma_n^2} x_n + \sum_{m=0}^{\infty} k_{mn} x_m = b_n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.92)$$

Bu denklem, kesme yöntemi ile sonlu cebirsel sistem haline getirilerek çözülebilir. Kesme yöntemi deneysel olarak elde edilmektedir. Regülerleştirilmiş \hat{k}_{nm} katsayılarından oluşan ve Logaritmik tekillik durumu göz önünde bulundurulmuş 2 boyutlu matris, matrisin hal sayısı (condition number) sabit değerleri gördüğü zaman seçilen sistem boyutu ile ifade edilebilir. Bilindiği üzere matrislerde hal sayısının sabit olması sistemin kararlılığının da bir göstergesidir.

$$\frac{1}{\gamma_n^2} x_n + \sum_{m=0}^N k_{nm} x_m = b_n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.93)$$

N sonlu boyutta çözüm sağlanabilmesi için önemli bir parametre olup yukarıdaki paragrafta ifade edildiği üzere sistemin kararlılığını ve hassasiyetini doğrudan etkilemektedir. Bu nedenle yeteri derecede büyük seçilmelidir.

(3.92) ile ifade edilen sistemler birinci türden bir sonsuz lineer cebir denklem takımı oluşmuştur. Bu denkleme kesme yöntemi uygulaması, giriş bölümünde ifade edilmiş olan çözülecek matrisin iyi kurulmamış olmasının getirdiği yüksek mertebede çözümlerde kararsızlık ve yuvarlatma hatalarının yaklaşık çözümün gerçek çözümden

§§§ Logaritmik Tekilliğin Regülerize edilerek hesaplanmasının ardından normalize edilmiş knm matrix'ine eklenmesi ile elde edilen ve diyagonal elemanlarının yaklaşık olarak 1'e eşit olduğu 2 boyutlu matriks.

büyük miktarlarda sapmasına neden olması gibi bir takım istenmeyen ortamların oluşmasına neden olur. Kesme

sayısı istenilen yaklaşıklık için istenilen kadar küçük olamaz. Bu nedenle bir sonraki aşamada ele alınacak olan Regülerleştirme uygulamasının yapılması gerekmektedir.

3.5.4. Sonsuz Lineer Cebir Sistemine Analitik Regülerleştirme İşleminin Uygulanması

Analitik Regülerleştirme Yönteminin kullanılmasındaki temel amaç, ortaya 2.türden denklem takımı çıkarmak ve incelenen birinci türden denklem sistemlerindeki bir önceki bölümde ifade edilen yuvarlatma hataları, sistemde kararsızlık gibi olumsuzluklarla karşılaşmamaktır.

Bu noktadan itibaren yeni katsayılarımız;

$$y_n = \frac{x_n}{\gamma_n} \quad (3.94)$$

tanımlanıp (3.92)'nin her iki tarafı da γ_n ile çarpılırsa;

$$y_n + \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_n \gamma_m k_{mn} y_m = \gamma_n b_n \quad (3.95)$$

ifadeleri bulunur. Yeni katsayılarımız;

$$\widehat{k}_{mn} = \gamma_m \gamma_n k_{mn} \quad ; \quad n, m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad ; \quad \widehat{b}_n = \gamma_n b_n \quad (3.96)$$

yeni matris operatörü;

$$K = \left\{ \widehat{k}_{mn} \right\}_{m,n=0}^{\infty} \quad (3.97)$$

sütun vektörleri;

$$y = \left\{ y_n \right\}_{n=0}^{\infty} \quad ; \quad \widehat{b} = \left\{ \widehat{b}_n \right\}_{n=0}^{\infty} \quad (3.98)$$

ifadeleri yazıldıktan sonra sistemimiz son şeklini almış olur:

$$y_n + \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{k}_{nm} y_m = \widehat{b}_n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.99)$$

Buna yönelik olan denklem ise;

$$(I + \widehat{K})y = \widehat{b}_n ; \quad y, \widehat{b}_n \in l_2 \quad (3.100)$$

şeklindedir. Bu sistem kesme yöntemi ile çözülebilir ve birinci türden olan (3.92) denklemi ile önemli farklılıklara sahiptir. En önemli fark ise çekirdek fonksiyon $K(u, v)$ yeteri derecede düzgün ise, \widehat{K} operatörünün l_2 'de kompakt olmasıdır. Bu nedenle (3.100) denklemi sayısal olarak çözüme daha elverişlidir. Denklemin N boyutu yeteri derecede büyük seçilmiş (sistemin regülerize edilmiş \widehat{k}_{mn} matrisinin hal sayısının düzgünlük sergilediği boyut) ise gerçek çözüm olan $N \rightarrow \infty$ ifadesine yakınsamaktadır. Buna bağımlı olarak (3.100) denklemin daha doğru ve kararlı olduğu açıkça söylenebilir.

(3.94)-(3.100) ifadeleri'nin regülerleştirilmesi için kullanılan katsayılar olan γ_n değerleri aşağıdaki gibidir:

$\widehat{b} = \{\widehat{b}_n\}_{n=0}^{\infty}$ ifadesinde b_n eldesi için:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{\ln|2|}} ; \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad n > 0 \quad (3.101)$$

$$b_0^R = b_0 / \gamma_0 ; \quad b_n^R = b_n / \gamma_n \quad (3.102)$$

$$k_{00}^R = \frac{k_{00}}{(\gamma_0)^2} ; \quad k_{mn}^R = \frac{k_{mn}}{\gamma_m \gamma_n} \quad n, m > 0 \quad (3.103)$$

$N \rightarrow \infty$ ifadesine yakınsamaktadır. Buna bağımlı olarak (3.100) denklemin daha doğru ve kararlı olduğu açıkça söylenebilir. Dikkat edilmesi gereken bir diğer unsur ise (3.101) ile ifade edilen regülerleştirme katsayılarının nereden geldikleridir. Bu katsayılar Chebyshev Polinomlarının Normalizasyonu için kullanılan katsayılar ile aynı katsayılardır.

4. Problemin Çözümünün Sayısal Olarak Gerçekleştirilmesi

4.1. Linear Cebrik Sistemin Oluşturulması

(3.69) denklemi bu bölümde parça parça ele alınacak ve uygulanacak sayısal yöntemler ifade edilecektir.

$$u^i(\vartheta) = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln |kR(\vartheta, \tau)| + K(kR(\vartheta, \tau)) \right\} \cdot J_D(\vartheta) d\tau \quad ; \quad \vartheta \in [-1, 1]$$

4.1.1. İntegral denklemin sol tarafı - Gelen dalga ifadesi

Tez'de kaynak ifadeleri düzlemsel dalga ve noktasal kaynak olarak iki şekilde ele alınmıştır. Bu ifadeler (3.70) ve (3.71) formülleri baz alınarak yerine koyma yöntemi uygulanarak çözülmüştür.

$$b(u) = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln |u - v| + K(u, v) \right\} \cdot J_D(v) dv \quad ; \quad u \in [-1, 1]$$

$$b(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \widehat{T}_n(u) \quad ; \quad u \in [-1, 1]$$

bilindiği üzere iki boyutlu uzay için tanımlı olan sadece x yönünde hareket eden düzlemsel dalga ifadesi e^{ikx} şeklinde olup bu ifadeyi x yönünden bağımsız halde genişletecek olursak ve Euler kuralını uygularsak nümerik olarak daha rahat ifade edilebilecek yeni formülümüze ulaşabiliriz:

$$e^{ik(x.\cos\vartheta + y.\sin\vartheta)} = \cos(k.(x.\cos\vartheta + y.\sin\vartheta)) + i \sin(k.(x.\cos\vartheta + y.\sin\vartheta)) \quad (4.1)$$

burada k dalga sayısını ifade etmekte olup ϑ ise dalganın açısını göstermektedir. Noktasal kaynak için kullanılacak formül ise Green fonksiyonundan ibarettir:

$$G(q, p) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(q, p) \quad (4.2)$$

Her iki kaynak denklemi de, tezde incelenen sonsuz ince sonlu uzunluktaki şerit sistemimizin üzerinde meydana gelen akım yoğunluğunun hesaplanmasında temel teşkil etmektedirler.

4.1.2. Çekirdek $K(u,v)$ 'nin hesabı ve Logaritmik Tekilliğin Kaldırılması

Daha önceki bölümlerde ifade edildiği gibi Green Fonksiyon, kendisini oluşturan Hankel fonksiyonunun Neumann bileşeninin içerdiği logaritmik ifade nedeniyle $z = |q - p| = 0$ durumunda Logaritmik olarak tekillik vermekte olup bu durum çözümsüzlüğe sebep olmaktadır. (3.51)-(3.58) formüllerinde Green Fonksiyonunun Logaritmik ve Düzgün kısımlarının birbirinden ayrıldığını gördük. Düzgün kısım türevleri alınabilir sürekli bir fonksiyon olarak k_{mm} Fourier-Chebyshev katsayılarının bulunmasında kullanılmıştı. Logaritmik kısım ise uygun regüleleştirme işlemleri ile sisteme geri kazandırılmaktadır.

(3.51)-(3.58) formüllerinde ifade edilen Bessel ve Neumann fonksiyonlarının açılımları yüksek dereceli giriş değerlerinde dalgalanmalara ve kararsız sonuçlara neden olabilmektedir. O sebeple işlemlerimizde Hankel fonksiyonlarının, Chebyshev fonksiyonları kullanılmasıyla elde edilmiş olan daha kararlı bir versiyonunu kullanacağız.

Bu formüller x 'in alacağı değerlere göre göre iki kategoriye ayrılmıştır:

$0 < x \leq 8$ için:

$$\begin{aligned}
 J_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{2n} \left(\frac{x}{8} \right) && ; -8 \leq x \leq 8 \\
 Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{x}{8} \right) && ; 0 < x \leq 8 \\
 H_0^{(1)}(z) &= J_0(z) + iY_0(z) && ; 0 < x \leq 8
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$x \geq 5$ için:

$$J_0(x) + iY_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(x-\pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n^* \left(\frac{5}{x} \right) ; x \geq 5 \quad c_n = R(c_n) + iI(c_n) \tag{4.4}$$

olarak ifade edilmektedir. a_n, b_n ve c_n katsayıları Ek bölümündeki tablolarda ve T_{2n} Chebyshev Polinomlarının yeniden elde edilebilir (back recurrence) formülleri verilmiştir.

Sıfıncı mertebeden Bessel fonksiyonu ile Hankel ve regülarize edilmiş Hankel fonksiyonu

$$J_0(x) = 1 + \alpha x^2 \quad (4.5)$$

$$H_0^{(1)}(x) = sbt + \frac{1}{2\pi} \ln(x) + \beta x^2$$

$$(4.6)$$

$$H_0^{(1)R}(x) = sbt + \delta x^2 + O(x^4) \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilebilirler.

$$K(\vartheta, \tau) = A + B(\vartheta - \tau)^2 \quad (4.8)$$

şeklindeki bir gösterimde $(\vartheta - \tau)^2$ ifadesini açacak olursak;

$$(\vartheta - \tau)^2 = \vartheta^2 + \tau^2 - 2\vartheta\tau \quad (4.9)$$

olarak açılabilir. Chebyshev Polinomları vasıtasıyla yerine koyma işlemi uygulanacak olursa.

$$\begin{cases} T_2(\vartheta) = 2\vartheta^2 - 1 \\ T_1(\vartheta) = \vartheta \\ T_0(\vartheta) = 1 \end{cases} \quad (4.10)$$

ve buna istinaden

$$\begin{cases} \vartheta^2 = \frac{1}{2}[1 + T_2(\vartheta)] \\ \vartheta = T_1(\vartheta) \\ 1 = T_0(\vartheta) \end{cases} \quad (4.11)$$

değişken değerlerine ulaşılır.

$$K(\vartheta, \tau) = a_{00}\widehat{T}_0(\vartheta)\widehat{T}_0(\tau) + a_{02}\widehat{T}_0(\vartheta)\widehat{T}_2(\tau) + a_{20}\widehat{T}_2(\vartheta)\widehat{T}_0(\tau) - 2a_{11}\widehat{T}_1(\vartheta)\widehat{T}_1(\tau) \quad (4.12)$$

bu ifade matris formuna dönüştürülürse k_{mn} matrisimiz;

$$\begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & a'_{02} \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

ifadesine ulaşılabilir. Burada matris elemanları (4.11) ifadesindeki $a_{mn} \widehat{T}_m \widehat{T}_n$ anlatımlarını simgelemektedir.

Logaritmik tekillik kısmının ayrıştırılmış olduğu bu matris düzeneğine dışarıdan ek olarak Logaritmik kısmın da ilave edilmesi gerekmektedir. Bu işlemin gerçekleştirilmesi ile elde edilecek yapı aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\ln}_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\ln}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\ln}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & a'_{02} \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\ln}_{00} + a'_{00} & 0 & a'_{02} \\ 0 & \tilde{\ln}_{11} + a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & 0 & \tilde{\ln}_{22} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\ln}_{00} + a'_{00} & 0 & a'_{02} \\ 0 & \tilde{\ln}_{11} + a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & 0 & \tilde{\ln}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Analitik çözümde sistem büyüklüğünün 3 olarak seçildiği yukarıdaki anlatımda, uygun matris çözümler ile bilinmeyen x_n katsayıları çözülebilir.

Tezin hazırlanışı esnasında bu işlemler analitik olarak gerçekleştirilmiş ve nümerik sonuçların doğrulukları analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

(4.3)-(4.4) formüllerine geri dönecek olursak bu formüllerdeki regülerleştirme işlemleri şu şekilde olacaktır:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z) \quad (4.16)$$

eğer $z \geq 5$ ise (4.4) ile ifade edilen formüller için aşağıdaki Regülerleştirme işlemleri uygulanacaktır.

$$Y_0^R = Y_0(z) - \frac{2}{\pi} \ln|z| \quad (4.17)$$

$$H_0^{(1)R}(z) = H_0^{(1)}(z) - i \frac{2}{\pi} \ln|z|$$

$$(4.18)$$

eğer $z < 5$ ise (4.3) ile ifade edilen formüller için aşağıdaki Regülerleştirme işlemleri uygulanacaktır. (4.17) formülünde $Y_0^R = Y_0(z) - \frac{2}{\pi} \ln|z|$ olarak ifade edilmişti.

Bunu göz önüne alırsak:

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \ln|z| + \frac{2}{\pi} \ln|z| [J_0(z) - 1] + \frac{2}{\pi} J_0(z) (\gamma - \ln|2|) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \quad (4.19)$$

$$Y_0^R(z) = \frac{2}{\pi} \ln|z| [J_0(z) - 1] + \frac{2}{\pi} J_0(z) (\gamma - \ln|2|) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \quad (4.20)$$

elde edilir. $z=0$ olduğu durum için ise $[J_0(z) - 1]$ ifadesindeki Bessel fonksiyonu 1 değerini alacak ve ifade sıfıra gidecektir. Bu durumda $z=0$ koşulu için Regülerize edilmiş Neuman fonksiyonu:

$$Y_0^R(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) (\gamma - \ln|2|) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \quad (4.21)$$

şeklini alacaktır.

Burada önemli olan bir diğer nokta ise $Y_0(z)$ 'nin sahip olduğu regülerize edilmiş Neumann ($Y_0^R(z)$) fonksiyonunda dışarı alınmış olan $\frac{2}{\pi} \ln|z|$ ifadesinin çözülmesidir.

Çözümümüzü parametrik ifadelerle yaptığımızı göz önüne alırsak z olarak belirtilen $|q - p|$ ifadesi (3.47)- (3.48) formüllerindeki şekli ile belirtilmelidir.

$$q = \eta(\vartheta) ; \quad p = \eta(\tau)$$

$$\eta = \eta(\vartheta) \equiv (x(\vartheta), y(\vartheta)) ; \quad \vartheta \in [-1, 1]$$

burada ilave edilmesi gereken bir parametrik ifade daha vardır.

$$l(\vartheta) = \left\{ [x'(\vartheta)]^2 + [y'(\vartheta)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.22)$$

buna ek olarak;

$$\begin{aligned} x(\vartheta) - x(\tau) &= x'(\tau)(\vartheta - \tau) + O(\vartheta - \tau)^2 \\ y(\vartheta) - y(\tau) &= y'(\tau)(\vartheta - \tau) + O(\vartheta - \tau)^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

ve,

$$|\eta(\vartheta) - \eta(\tau)| = l(\vartheta) \left\{ |\vartheta - \tau| + O(\vartheta - \tau)^2 \right\} \quad (4.24)$$

ifadelerine sahiptir. Buradan yola çıkarak;

$$\ln |\eta(\vartheta) - \eta(\tau)| - \ln |\vartheta - \tau| = \ln \frac{|\eta(\vartheta) - \eta(\tau)|}{|\vartheta - \tau|} \quad (4.25)$$

$$= \ln \frac{l(\vartheta) \left\{ |\vartheta - \tau| + O(\vartheta - \tau)^2 \right\}}{|\vartheta - \tau|} \quad (4.26)$$

$$= \ln \frac{l(\vartheta) |\vartheta - \tau| \left\{ 1 + O(\vartheta - \tau) \right\}}{|\vartheta - \tau|} \quad (4.27)$$

$$= \ln l(\vartheta) [1 + O(\vartheta - \tau)] \quad (4.28)$$

$$= \ln l(\vartheta) + \ln [1 + O(\vartheta - \tau)] \rightarrow \ln l(\vartheta) \quad (4.29)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \vartheta} \frac{1}{2\pi} \left[\ln |\eta(\vartheta) - \eta(\tau)| - \ln |\vartheta - \tau| \right] = \frac{1}{2\pi} \ln l(\vartheta) \quad (4.30)$$

çözümüne ulaşılır.

Burada yukarıda da belirtildiği üzere $Y_0(z)$ 'nin sahip olduğu $\frac{2}{\pi} \ln |z|$ değeri şu

şekilde :

Eğer $\vartheta \neq \tau$ ise;

$$\ln \left| \frac{\eta(\vartheta) - \eta(\tau)}{\vartheta - \tau} \right| \quad (4.31)$$

Eğer $\vartheta = \tau$ ise;

$$\ln l(\vartheta)$$

$$l(\vartheta) = \left\{ [x'(\vartheta)]^2 + [y'(\vartheta)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

ele alınacaktır.

4.1.3. Akım Yoğunluğu Fonksiyonu Katsayılarının Hesaplanması

(3.4.1) bölümlerde akım yoğunluğu fonksiyonu (3.67) formülü ile aşağıdaki gibi ifade edilmişti:

$$X(v) = \left(\frac{1}{1-v^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \widehat{T}_n(v)$$

formül aşağıdaki şeklini alırsa;

$$j_n(v) = X(v) = (1-v^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \widehat{T}_n(v) \quad (4.33)$$

$$= (1-v^2)^{-1/2} X_n(v) \quad (4.34)$$

olarak belirlenir. Yukarıdaki ifadelerden de anlaşılacağı üzere akım yoğunluğu fonksiyonu matris çözümler ile elde edilen bilinmeyen (çözülünce bilinen değerlere dönüşen) $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ katsayılarının ters Fourier-Chebyshev dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilecektir. Elde edilen akım yoğunluğu fonksiyonu ile şerit sistemimizin üzerindeki (sınırları dahilindeki) parametrik olarak $[-1,1]$ aralığında ifade edilen herhangi bir nokta için akım yoğunluğu değerini bulabiliriz. Teoriye göre Green Fonksiyonu'nun integral gösteriliminden de bildiğimiz üzere eğer cismimizin üzerindeki akım yoğunluğunu biliyorsak uzaydaki herhangi keyfi bir nokta için cismimizden saçılan alan ifadelerini rahatlıkla hesaplayabiliriz. Bu işlem bir sonraki aşamalarda anlatılacaktır.

4.1.4. Fourier-Chebyshev Katsayılarının Bulunması ve Elde Edilen

Lineer Cebir Sisteminin Çözümü

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (4.35)$$

şeklindeki integral ifadelerde nümerik olarak yaklaşık hesabı için kullanılan formüller daha önceki bölümlerde de ifade edildiği üzere Gauss-Quadratic formülleridir.

Bu formül aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$I(f) \approx \frac{\pi}{L+1} \sum_{i=1}^L f(x_i) \quad (4.36)$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{L} \quad ; \quad x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2L}\pi\right) \quad (4.37)$$

Bu formüller $m \leq 2(L+1) - 1 = 2L + 1$ derecesindeki polinomlar için kesin doğruluk sergilemektedir.

Gauss-Quadratic formülleri, (3.74) ve (3.76) tipinde tanımlı olan integral ifadelerin yaklaşık çözümünün nümerik olarak yapılabilmesi için kullanılan yöntemler olarak daha önceki bölümlerde belirtilmişti.

$$b_n = \int_{-1}^1 \frac{b(u) \widehat{T}_n(u)}{\sqrt{(1-u^2)}} du \quad (3.74 \text{ formülü})$$

$$k_{mm} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(u,v) \widehat{T}_m(u) \widehat{T}_n(v)}{\sqrt{(1-u^2)} \sqrt{(1-v^2)}} du dv \quad (3.76 \text{ formülü})$$

Yukarıdaki integral denklemlerin çözümüne uygun Gauss-Quadratic formülleri ise;

$$b_n = \int_{-1}^1 \frac{b(u) \widehat{T}_n(u)}{\sqrt{(1-u^2)}} du \approx \sum_{i=1}^r \omega_i b(x_i) \widehat{T}_n(x_i) \quad (3.78 \text{ formülü})$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{r} \quad ; \quad x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2r}\pi\right)$$

$$k_{mm} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(u,v) \widehat{T}_m(u) \widehat{T}_n(v)}{\sqrt{(1-u^2)} \sqrt{(1-v^2)}} du dv \approx \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i^2 K(u_i, v_j) \widehat{T}_m(u_i) \widehat{T}_n(v_j) \quad (3.80$$

formülü)

şeklinde derlenmişti. Daha önceki sayfada ifade edilen polinomların kesin doğruluk sergileme değerlerini bu formüllere uyguladığımız zaman $m \leq 2(r+1)-1 = 2r+1$ derecesindeki polinomlar için kesin doğruluk sergilemekte olduğu anlaşılabilir.

Buradaki formüllerde toplam (epsilon)'ın parametresi olan r ile belirtilen çözüm aralık sınır değeri, integrasyon işleminin ideale yakın olması açısından çok kritiktir.

r değerini nasıl belirleneceği daha önceki bölümlerde anlatılan \widehat{k}_{nm} matrisinin hal sayısının sabitlendiği noktadaki değer ile ilintilidir. Genel olarak bu değer sistem boyutunun iki katı kadar alınır. r 'nin küçük alınması, sonucu hataya götüreceği gibi çok büyük alınması da işlem süresini oldukça uzatacaktır. Basit bir ifade ile 2 boyutlu bir ortamda PI uzunluğundaki bir sistem için sistem boyutu 10, r aralık sayısı (node sayısı) ise 15-20 aralığında seçilmektedir. Şeridin boyutu büyüdükçe aralık sayısının yetersiz kalacağını göz önünde bulundurmak

gerektiği için büyük boyutlu sistemler için daha fazla aralık sayısı ile hesaplama yapmak gerekecektir.

4.1.5. Elde Edilen Regülerleştirilmiş Denklem Sisteminin Çözümü

(3.4.5) bölümünde Analitik Regülerizasyon uygulamasının yapılışı anlatılmıştı.

$$(I + \widehat{K})y = \widehat{b}_n, \quad y, \widehat{b}_n \in l_2 \quad (4.38)$$

şeklinde 2.tür denklem sistemine indirgenen I (Identical) ve K (Compact) bölümlerin birbirilerinden bağımsız olarak hesaplanması ifade edilmişti. Bulunan ifadelerin ardından uygulanan regülerleştirme işlemi ile (4.1.2.) Çekirdek Fonksiyon $K(u,v)$ 'nin hesabı ve Logaritmik Tekilliğin Kaldırılması bölümünde tarif edilen Logaritmik tekillige**** sahip I bölümünden diyagonal olarak 1 değerine sahip bir matris elde edilecektir.

**** Bu sistem 3x3'lük örnek bir sisteminin analitik çözümü için kullanılmaktadır. Gerçek sonuca yakınsayan değerler için gerekli çözümlerin sistem boyutlarının nasıl hesap edileceği önceki bölümlerde belirtilmiştir.

4.1.2 bölümünde anlatılan ;

$$\begin{pmatrix} \tilde{\ln}_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\ln}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\ln}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & a'_{02} \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\ln}_{00} + a'_{00} & 0 & a'_{02} \\ 0 & \tilde{\ln}_{11} + a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & 0 & \tilde{\ln}_{22} \end{pmatrix}$$

(4.14 formülasyonu)

$$\begin{pmatrix} \tilde{\ln}_{00} + a'_{00} & 0 & a'_{02} \\ 0 & \tilde{\ln}_{11} + a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & 0 & \tilde{\ln}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(4.15 formülasyonu)

matrislerinde regülerleştirme uygulamasını ardından

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & a'_{02} \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a'_{00} & 0 & a'_{02} \\ 0 & 1 + a'_{11} & 0 \\ a'_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

ve daha sonra aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\begin{pmatrix} 1 + \hat{a}_{00} & 0 & \hat{a}_{02} \\ 0 & 1 + \hat{a}_{11} & 0 \\ \hat{a}_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

(4.40)'da elde edilen 2 boyutlu matris, sistemimizin çekirdeğini oluşturmaktadır. Bir sonraki aşamada Gauss Eleminasyon Matris çözüm yöntemi ile, y çözümü bulunur. Regülerleştirilmiş y vektöründen geri doğru gidilerek akım yoğunluğu fonksiyonunun katsayıları bulunur ve (4.1.3) bölümünde anlatılan yöntem ile gelen dalgaya bağımlı olarak cisim üzerinde oluşan akım yoğunluğu değeri bulunur.

4.2. Çoklu Şerit Sistemi İçin Denklem Sistem Çözümleri

Bu bölümde N sayıda şerit sisteminin çözümü için izlenecek yol anlatılacaktır. Önceki bölümlerde incelenen tüm fonksiyon ve parametreler bu bölüm için de geçerlidir. Fonksiyonlara ek olarak yeni matris yapılandırılmaları ve çözümleri ile karşılaşacağız.

4.2.1 Çoklu Şerit Sistemi İçin Akım Yoğunluğunun Bulunması

$$\int_S G(q, p)J(p)dp = -u^i(q) \quad (4.41)$$

olarak tanımlanmış olan tek bir obje için geçerli saçılan alan formülü birden fazla obje durumu olan;

$$S = \bigcup_{j=1}^N S_j \quad (4.42)$$

için aşağıdaki şekli alacaktır:

$$\sum_{j=1}^n \int_{S_j} G(q, p)J_j(p)d_p = -u^i(q) \quad (4.43)$$

$$q \in S_j, j = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^n \int_{S_j} G(q, p)J_j(p)d_p = -u^s(q) \quad (4.44)$$

$$q \in S_j, j = 1, 2, \dots, N$$

$$u_j^i(q) = u^i(q), \quad q \in S_j \quad (4.45)$$

Burada bilinmeyen akım yoğunluk fonksiyonu $\{J_j(p)\}_{j=1}^N$ olup, N sayıda denklem vardır.

$q \in S_j$ ve $q \in S_s$ olmak şartı ile $G_{j_s}(q, p) = G(q, p)$ olacaktır. Bu durumda (4.44) formülümüze geri dönecek ve Green fonksiyonu olan $G(q, p)$ 'nin yerine $G_{j_s}(q, p)$ 'yi yerleştirecek olursak şu çıkarıma ulaşırız;

$$\sum_{j=1}^n \int_{S_j} G_{j_s}(q, p)J_j(p)d_p = -u_j^s(q) \quad (4.46)$$

$$q \in S_s, j = 1, 2, \dots, N$$

Burada;

G_{js} fonksiyonu $j \neq s$ koşulları dahilinde sonsuz düzgün bir fonksiyondur.

G_{jj} fonksiyonu tek bir şerit için tanımlanmış çekirdek fonksiyon olan Regülerleştirilmiş Green Fonksiyonudur.

Formülü genişletecek olursak;

$$\int_{S_s} G_{ss}(q, p) J_s(p) dp + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq N}}^N \int_{S_j} G_{js}(q, p) J_j(p) dp = -u_s^i(q), \quad q \in S_s \quad (4.47)$$

(4.47) formülünün soldaki ilk terimi göz önünde bulundurulduğu zaman tek bir obje (şerit) için geçerli olduğu ve daha önceki bölümlerde ifade edilen logaritmik tekillik nedeniyle bu formülasyonda Regülerize edilmiş Green Fonksiyonu'nun kullanılacağı; öte yandan ikinci toplam ifade integrali için şerit sistemlerinin birbirleri ile olan ilişkileri dahilinde hareket edilecek olmasından ötürü (iki şeridin üst üste binmediği yada çakışmadığı göz önünde

bulundurularak) logaritmik tekillığe gidilmeyeceği ve Green Fonksiyonu'nun kullanılacağı anlaşılabilir. Bu doğrultudan hareketle;

$$\left(I + H_{ss} J_s + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^N H_{js} J_j \right) = b_s, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (4.48)$$

elde edilecektir.

Denklemlerimiz genişleyerek;

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

4.2.2 Çoklu Şerit Sistemi İçin Saçılan Alan ve Toplam Alanın Bulunması

Gauss Eleminasyon yoluyla bulunan $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ katsayıları, “4.1.3 Akım Yoğunluğu Fonksiyonu Katsayılarının Hesaplanması” bölümdeki integrasyon tekniği ile Fonksiyon haline getirilir. Bu noktadan sonra saçılan alan ifadesi için;

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_N \quad (4.55)$$

sistem bütünü göz önünde bulundurularak;

$$U^s = \int_S G(q, p)J(p)dp = \int_{S_1} G(q, p)J_1(p)dp + \int_{S_2} G(q, p)J_2(p)dp + \dots + \int_{S_N} G(q, p)J_N(p)dp \quad (4.56)$$

formülü geçerli olup toplam alan ise şu şekilde olacaktır.;

$$U^t = U^s + U^i \quad (4.57)$$

bir başka deyişle;

$$u^t = u_1^s + u_2^s + \dots + u_N^s + u^i \quad (4.58)$$

4.3. Uzayda Herhangi Bir Nokta İçin Alan İfadesi

Uzayda herhangi bir noktanın alan ifadesini bulmak için kullanacağımız yegane yöntem önceki bölümlerde anlatılan 3.tür Green Teoremi olacaktır. (3.50) formülünde de belirtildiği üzere:

$$u^s(q) = \int_{-1}^1 G[q, \eta(\tau)] \cdot J(\tau) \cdot d\tau \quad ; \quad \tau \in [-1, 1] \quad (3.50 \text{ formülü})$$

q : uzayda herhangi bir nokta,

$\eta(\tau)$: cisim üzerindeki parametrik τ noktası,

$J(\tau)$: cisim üzerindeki parametrik τ noktasına ait akım yoğunluğu,

$G[q, \eta(\tau)]$: q ve $\eta(\tau)$ 'ye ait Green fonksiyonu,

olarak ifade edilebilir.(2.42) formülü ile ifade edilen Dirichlet sınır değer koşulları göz önünde bulundurulduğu vakit, cismin üzerindeki saçılan alan ifadesi gelen dalganın tersi işaretlisi olacaktır.

$$u^{s(\pm)}(p) = -u^i(p) \quad p \in S \quad (4.59)$$

Bunun dışında uzaydaki herhangi bir nokta için alan ifadesi için (3.50) formülü geçerli olacaktır.

Gelen dalga üzerinden akım yoğunluğunu bulurken kullandığımız Gauss-Quadratic formüllerimiz aynı şekilde saçılan alanın ifadesinde de kullanılabilir.

$$u^s(q) = \int_{-1}^1 G[q, \eta(\tau)] \cdot J(\tau) \cdot d\tau = \int_{-1}^1 G[q, \eta(\tau)] \cdot J(\tau) \cdot dl \cdot (1 - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \cdot d\tau \quad ; \quad \tau \in [-1, 1] \quad (4.60)$$

$$u^s(q) \approx \sum_{i=1}^r \omega_i G[q, \eta(x_i)] \cdot J(x_i) \quad (4.61)$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{r} \quad ; \quad x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2r} \pi\right) \quad (4.62)$$

ve yukarıdaki formüllerle ifade edilebilir.

4.4. Sayısal Sonuçları Hesaplanan İfadeler, Yakın Alan, Uzak Alan, Faz Alanı, Radar Kesiti (RCS)

Problemin konusu olan sonsuz ince ve sonlu uzunluktaki şerit sistemi üzerindeki akım yoğunluğu ifadesi bulunduğundan sonra, saçılan alan ifadesinin yanısıra bilinmek istenen bazı diğer özellikleri de incelemek gereklidir. Yakın alan bunların ilkidir.

Yakın alan şerit sisteminin yakınında meydana gelen alan olarak ifade edilebilir. Yakın alan için yapılan nümerik incelemelerde şerit boyutları 1, PI, 2PI, 4PI ve 8PI

olarak seçilmiştir. kL çarpımı sabit olacak şekilde tarama alanı boyutu cisim boyutlarının 5, 10, 20 (yakın alan), 50 ve 100 (orta alan) katı değerler için ele alınmıştır. Yakın alan için gerekli alan değerleri (4.60) formülünün hesabından bulunabilir. q olarak belirtilen uzaydaki herhangi bir nokta istenen çözünürlük değerine göre (örn: cismin boyutu ve taranacak alan göz önünde bulundurularak 10x10'luk bir alan için cismin 1/10'u alınabilir) seçilerek, yakın alanda 2 boyutlu bir matris şeklinde çeşitli q noktaları için tarama yapılır. Tarama sonucun saçılan alan değerleri elde edilir. Toplam alan saçılan alan ile gelen dalga'nın toplamına eşit olacaktır;

$$\mathbf{u}^{total} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^i \quad (4.63)$$

n adet şeridin içinde bulunduğu bir ortam için toplam alanımız benzer şekilde;

$$\mathbf{u}^{total} = \mathbf{u}_1^s + \mathbf{u}_2^s + \mathbf{u}_3^s + \dots + \mathbf{u}_n^s + \mathbf{u}^i \quad (4.64)$$

olacaktır.

Uzak alan, ikinci olarak tanımlanacak büyüklüktür. Herhangi bir kaynak için uzak alan $kr \rightarrow \infty$ olduğu için alan ifadesi olarak tanımlanabilir. Şerit sistemi için uzak alan ifadesi şu formülasyon ile bulunabilir:

$$u^f(q) = \int_{-1}^1 \frac{J(t)}{\sqrt{1-t^2}} e^{ik(\bar{r}, \eta(t))} dt \quad (4.65)$$

$$u^f(q) \approx \sum_{i=1}^N \omega_i e^{ik(\bar{r}, \eta(w_i))} J(x_i) \quad (4.66)$$

$$F(\vartheta) = \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^N J(w_i) \cdot e^{ik(\cos(\eta_x(w_i)) + \sin(\eta_y(w_i)))} \quad (4.67)$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{N} \quad ; \quad x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2N} \pi\right) \quad (4.68)$$

Kirchhoff Yaklaşıklığına göre cisme dik gelen düzlemsel dalga, cisim yüzeyinde $-2u^i$ 'lik bir akım yoğunluğu oluşturur. Buna bağlı olarak Kirchhoff yaklaşıklığındaki uzak alan incelemeleri yukarıdaki formüllerde akım yoğunluğu yerine bu ifadenin getirilmesi ile bulunulacaktır. N adet şeridin içinde olduğu sistemler için Kirchhoff Yaklaşıklığı fazla bir anlam taşımamaktadır. Bu nedenle incelemelerde rezonans yaratabilen yapılar için rezonanstaki uzak alan ve rezonans harici olan durumdaki uzak alan değerleri karşılaştırılmıştır.

Faz alanı da incelemelerin bir başka boyutunu oluşturmaktadır. Düzlemsel dalgalar için yapılan bu incelemede gelen dalga için saçılım sonrası değişen faz açısı gözlenebilir.

Son olarak incelenen ifade ise Radar Kesitidir. Radar kesiti, bir düzlemsel dalganın geliş yönünün tersi yönde, şerit sisteminden saçılan uzak alan enerjisinin, gelen dalganın oranı olarak elde edilir. Yüksek frekanslar için cismin boyutunun projeksiyonu olacaktır. Uygulamada esas alınan formül aşağıdaki gibidir:

$$RCS = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[2\pi r \frac{|u^f|^2}{|u^i|^2} \right] \quad (4.69)$$

5.0 SONUÇLAR

Sonsuz ince ve sonlu uzunluktaki şerit sisteminden skaler dalga saçılımına ilişkin sınır değer problemi Dirichlet sınır koşulu altında Ortogonal Polinomlardan Chebyshev Polinomlarının kullanılması ile nümerik olarak incelenebilmek için birinci tür lineer denkleme indirgenmiştir. $Ax = b$ tipindeki birinci tür bir denklemin çözümünde karşılaşılan problemlerin başında yuvarlatma hataları ve büyük sistemlerde karşılaşılan kararsızlıklar gelmektedir. Bu tip bir denklem sisteminin hal sayısını istenilen kesme sayısı ve istenilen yaklaşıklık için sınırlı tutmak mümkün değildir. Bu nedenle söz konusu çözüm gerçek çözüme yakınsamaz. Analitik regülerleştirme uygulaması ile $Ax = b$ tipinde birinci türden denklem sistemi $(I + K)x = b$ tipinde nümerik olarak çözüme daha elverişli ve kararlı olan ikinci türden bir denklem sistemine indirgenir. İkinci türden denklem sisteminin en önemli özelliği hal sayısı arttıkça bir sabite yakınsamasıdır (Bknz 5.1). Başka bir deyişle cebrik sistemin kesim sayısının direkt olarak hata oranını etkilediği ve Moment Metodu gibi sıkça kullanılan yöntemlerin aksine kesim sayısının artırılmasına paralel olarak hata yüzdesinin de düzenli bir şekilde azaldığı yapılan analizler sonucunda rahatlıkla görülmüştür.

Kaynak değerler için “Düzlemsel dalga” ve “Noktasal Kaynaklar” baz alınarak, yakın alan, uzak alan, faz alanı, radar kesiti, hal sayılarının sistem boyutuna göre değişimleri ve cisim üzerinde meydana gelen akım yoğunlukları incelenmiştir. Sonuç bölümünün alt bölümlerinde tekli şerit, çoklu (2 ila 4 arası) şerit, eğrisel şerit şeklinde çeşitli boyut ve kaynak değerleri için yapılan simülasyon sonuçları yer almaktadır.

Uzak alan ifadesi için Kirchhoff yaklaşıklığı olarak bilinen teknik ile karşılaştırma da yapılmıştır. Bilindiği üzere cisim yüzeyine dik ve paralel gelen dalgalar için Kirchhoff yaklaşıklığı cisim üzerinde meydana gelen akım yoğunluklarını ifade edebilir. 5.5 Uzak Alan İfadeleri bölümünde yer verilen sonuçlar Kirchhoff Yaklaşıklığı, Uzak Alan ve Saçılan Orta Alan karşılaştırmalarına olanak vermektedir. Kirchhoff Yaklaşıklığı ve Uzak Alan arasındaki farklılık cismin köşelerinde oluşan radyasyondan kaynaklanmaktadır. Kirchhoff cisim yüzeyindeki her nokta için eşit akım yoğunluğu değerini öngörmekte olup nümerik olarak elde edilen değerlerde gerçeğe yakın olarak şerit sisteminin köşelerinde radyasyondan kaynaklanan yüksek mertebeli akım

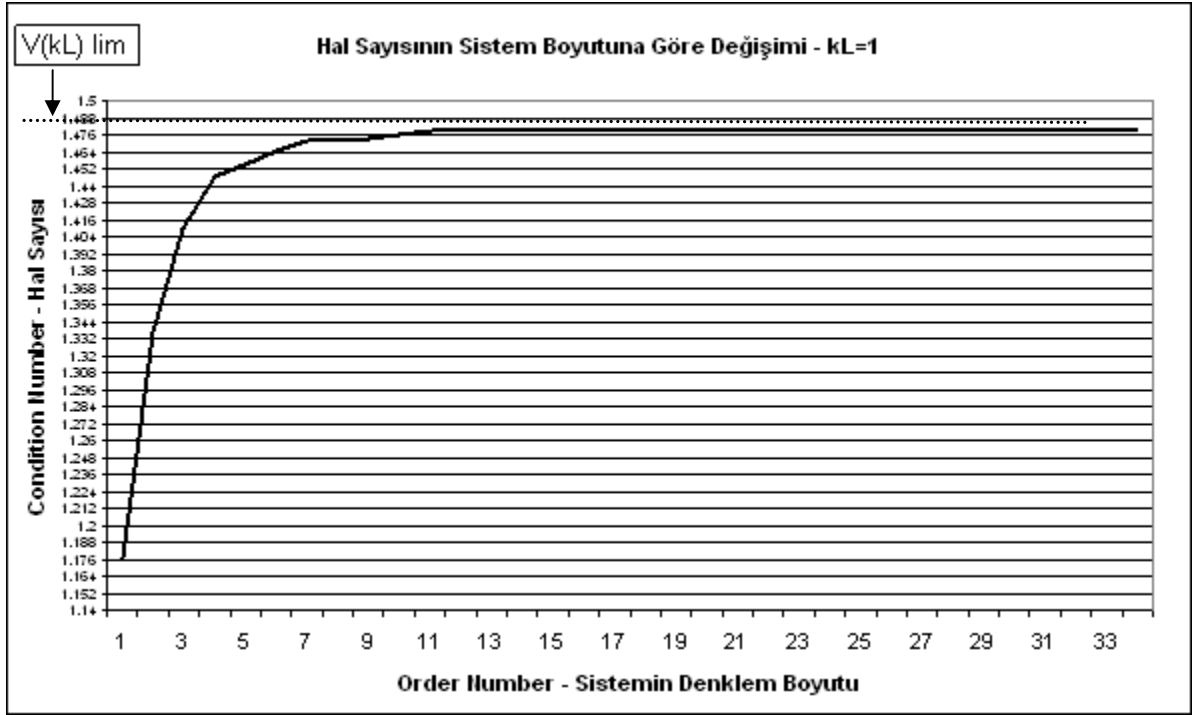
yoğunluğu değeri olduğu anlaşılmaktadır. Cismin boyutu dalga sayısına oranla küçükçükçe (örn: $k=1$ ilen cisim boyutunun 1-PI arasında ideal değer) Uzak alan ve Kirchhoff Yaklaşıklığı'ndan bulunan uzak alan ifadeleri saçılım alanı ifadeleri bakımından birbirlerine yakınsarlar. Fakat cisim dalga boyuna oranla küçükçükçe üzerinde soğurulan enerji de artacaktır. Bunun nedeni dalga boyu, cisim boyu ve akım yoğunluğu arasındaki temel ilişkiye dayanmaktadır.

Nümerik olarak yapılan tüm çalışmalar C++ programlama dili altında geliştirilmiştir. C++ programlama dili nesne tabanlı ve generic programlama özelliği ile gerek hız, gerek esneklik gerekse tezin amacına yönelik olarak obje oluşturma ve veri işleme gibi kritik noktalarda oldukça verimli bir performans sergilemektedir. Kodların sınıflar halinde yazılması ve sınıfların kompakt bir şekilde her türlü ortama kolayca adapte edilebilmesi ise temel kriterlerin başında gelmektedir. Tezin işlenmesinde kritik öneme sahip fonksiyonları içeren C++ başlık dosyaları Ek-6 bölümünde verilmiştir. Bunun yanı sıra kaynak kodların içinde bulunduğu ekli CD'de html formatında (doxygen ile oluşturulmuştur) açıklama dosyaları da bulunmaktadır.

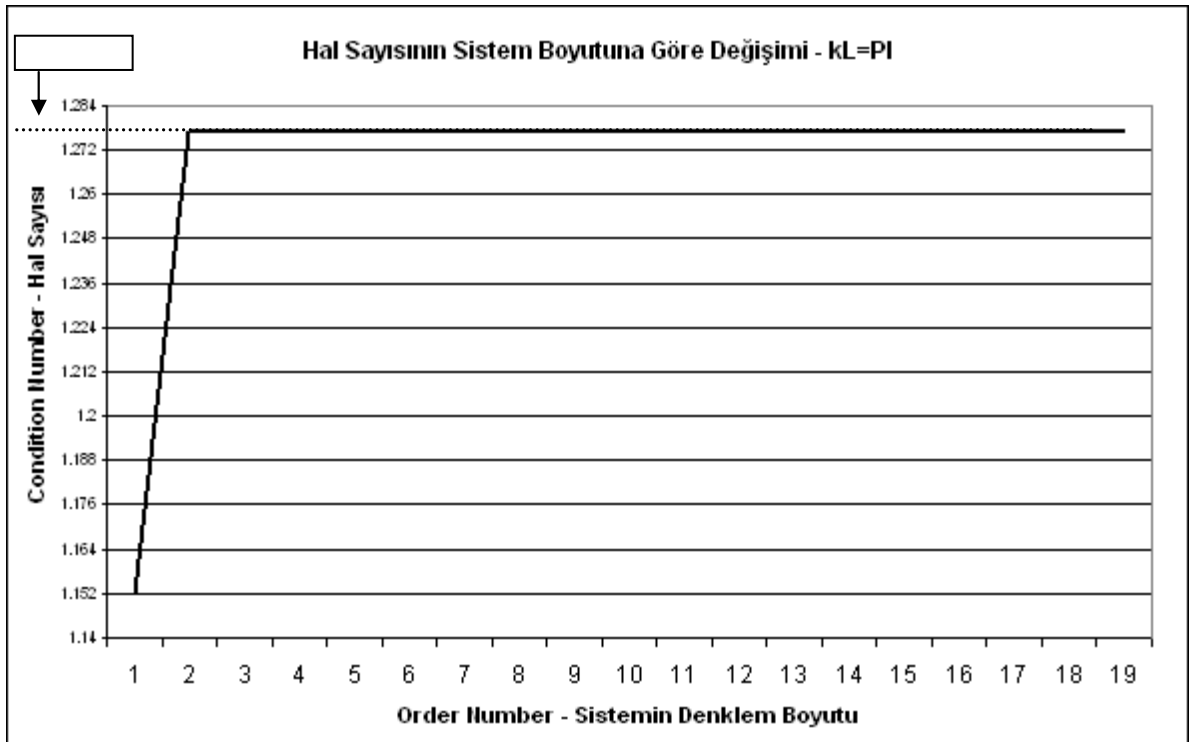
C++ platformu altında yapılan bütün matematiksel işlemlerin sonucunda elde edilen yakın alan, uzak alan, saçılım değerleri gibi matrislerin çıktıları (örn: txt yada xls uzantılı çıktılar) çeşitli grafik uygulama programları ile kullanıcının anlayacağı dile monitör edilebilir; çevrilebilir. Origin 7.5, GNU Plot, Excel yada Matlab'in grafik arayüzleri bu programlara örnek verilebilir. Tezin oluşturulması esnasında verilerin kullanıcının anlayacağı dile aktarımı için Excel ve ağırlıklı olarak Origin 7.5 kullanılmıştır. Ekte verilen CD'de çeşitli dalga boyları ve cisim tipleri için t zaman domeninde incelenmiş olan saçılan alan ve toplam alan animasyonları bulunmaktadır.

Elde edilen sonuçlar alt başlıklar altında yer yer açıklamaları ile birlikte 5.0 nolu "Sonuçlar" başlığı altında verilmiştir.

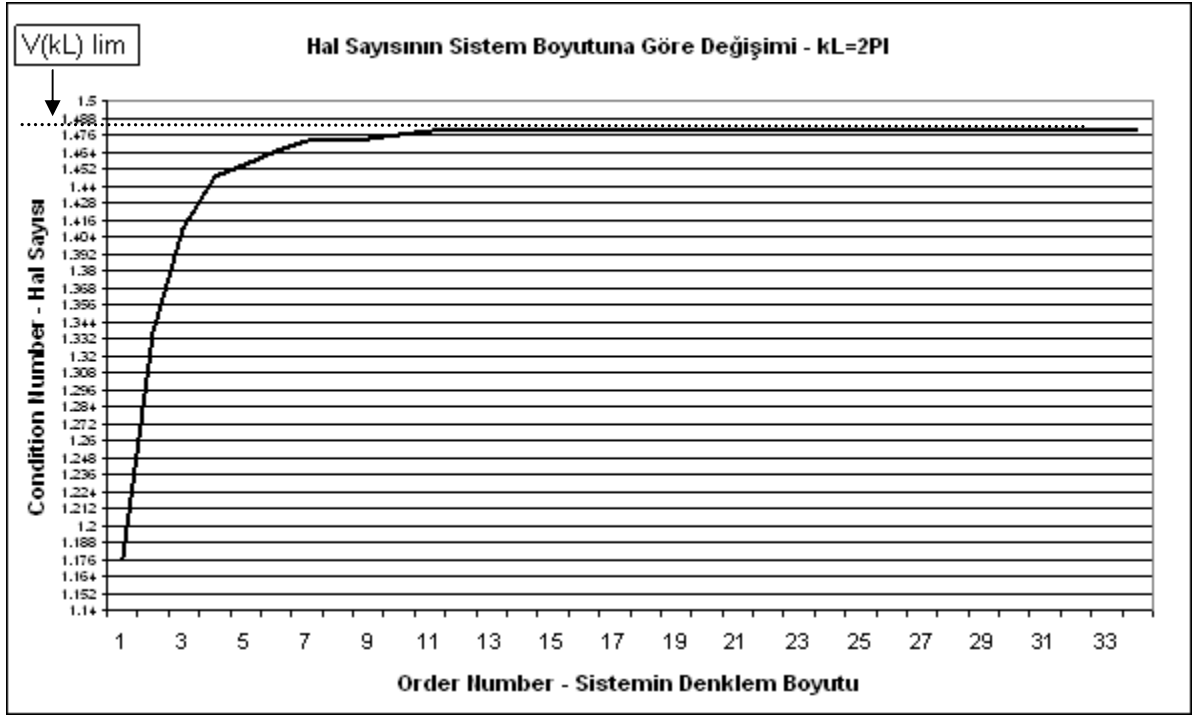
5.1 HAL SAYISI SİSTEM BOYUTU GRAFİKLERİ



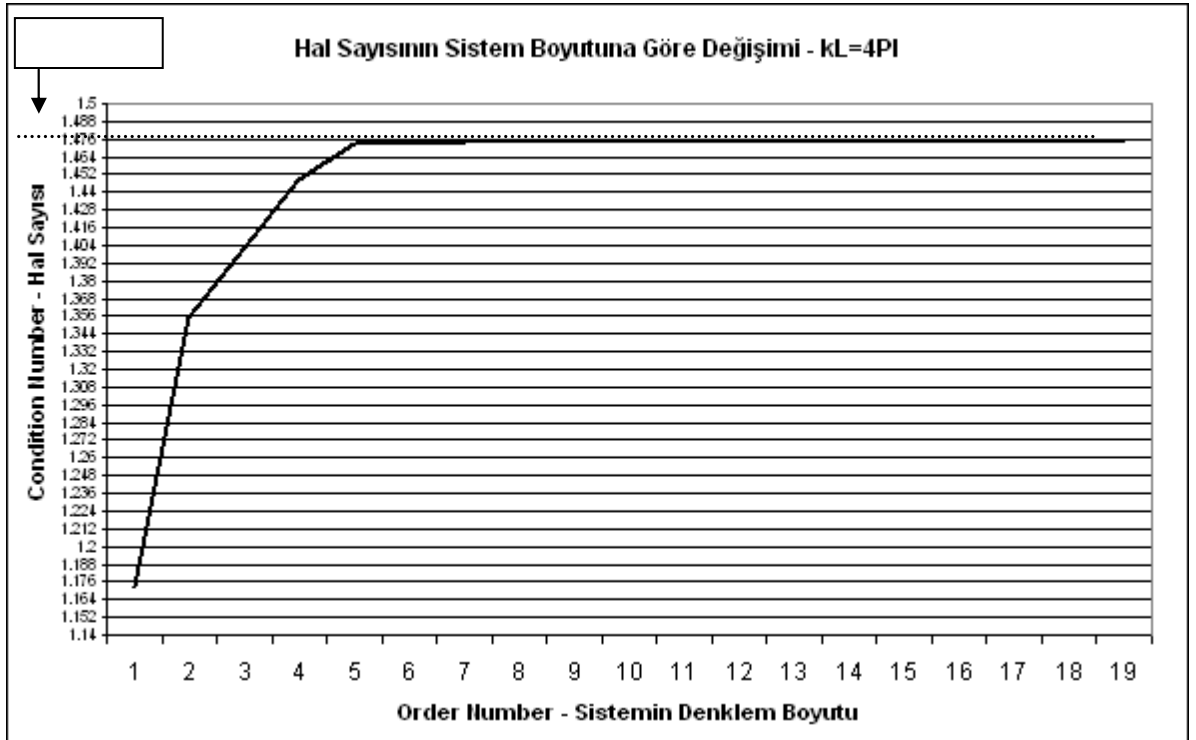
Şekil 5.1



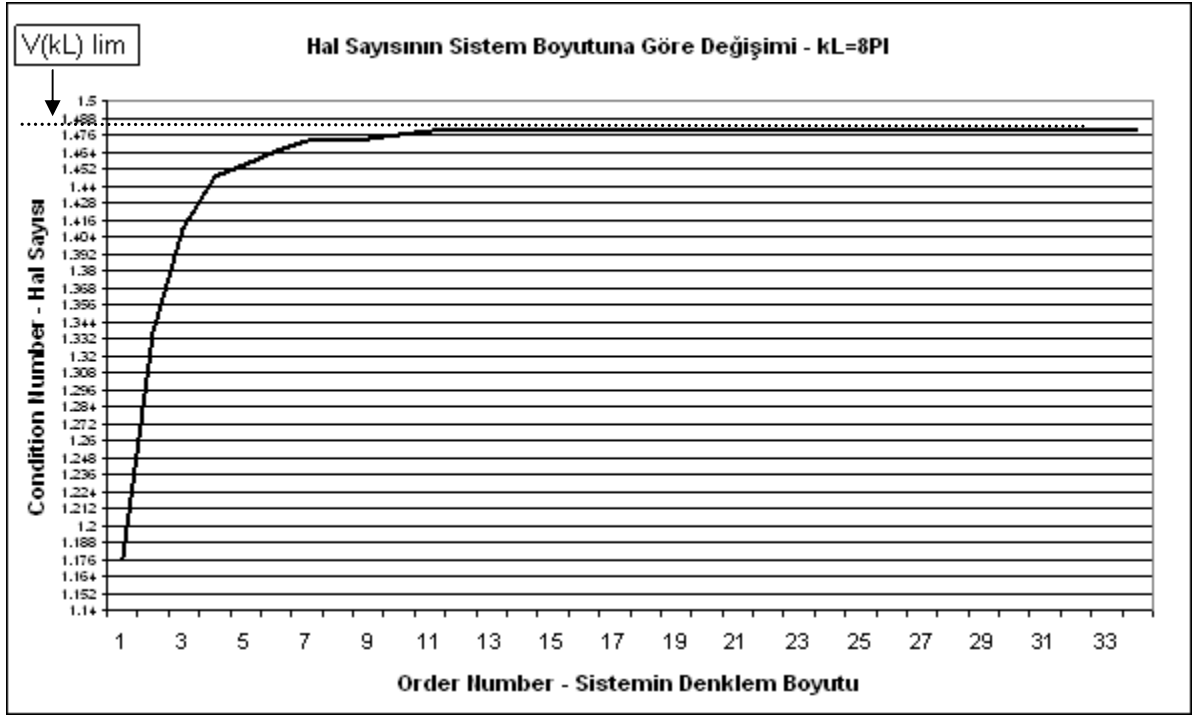
Şekil 5.2



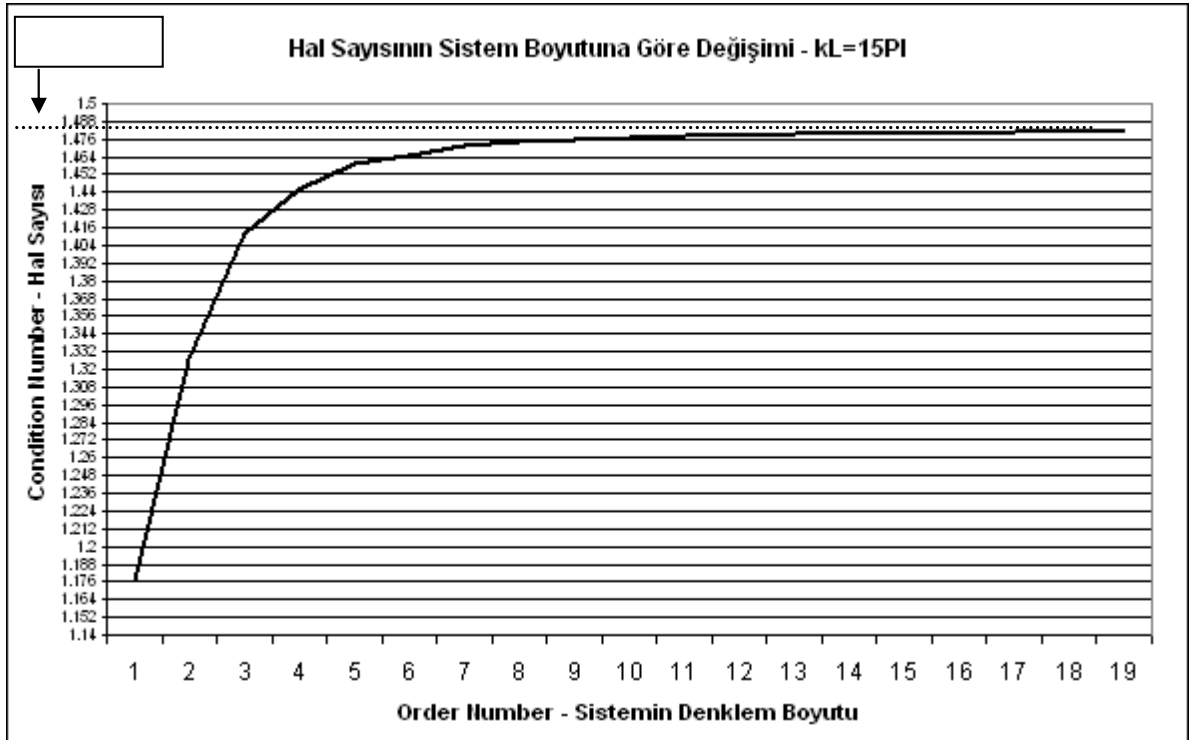
Şekil 5.3



Şekil 5.4



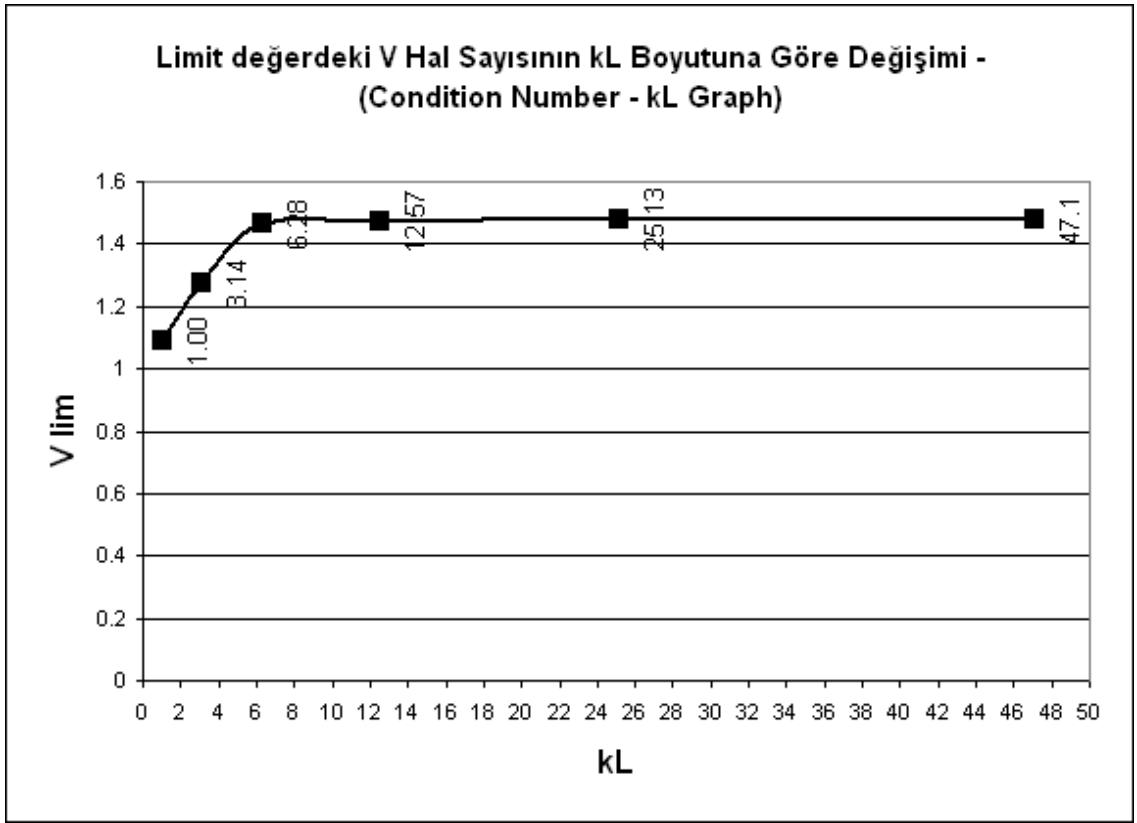
Şekil 5.5



Şekil 5.6

5.1.1. Hal Sayısının kL Büyüklüğüne Göre Değişimi

Şerit Boyutu	KL	Cond No
L1	1.00	1.0913
PI	3.14	1.2771
2PI	6.28	1.4637
4PI	12.57	1.4741
8PI	25.13	1.4788
15PI	47.1	1.4808

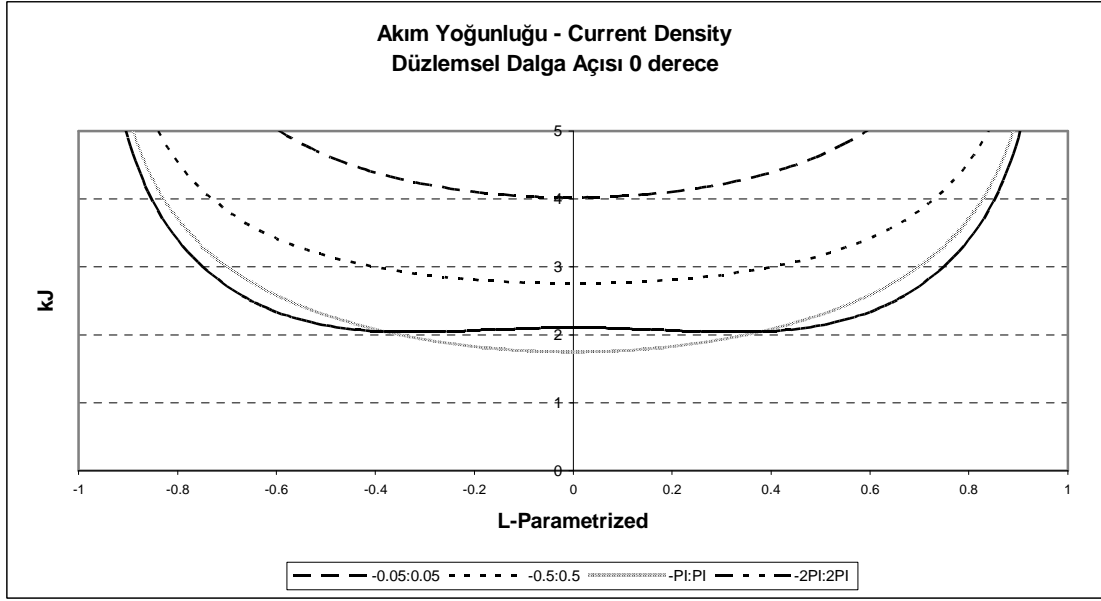


Şekil 5.7

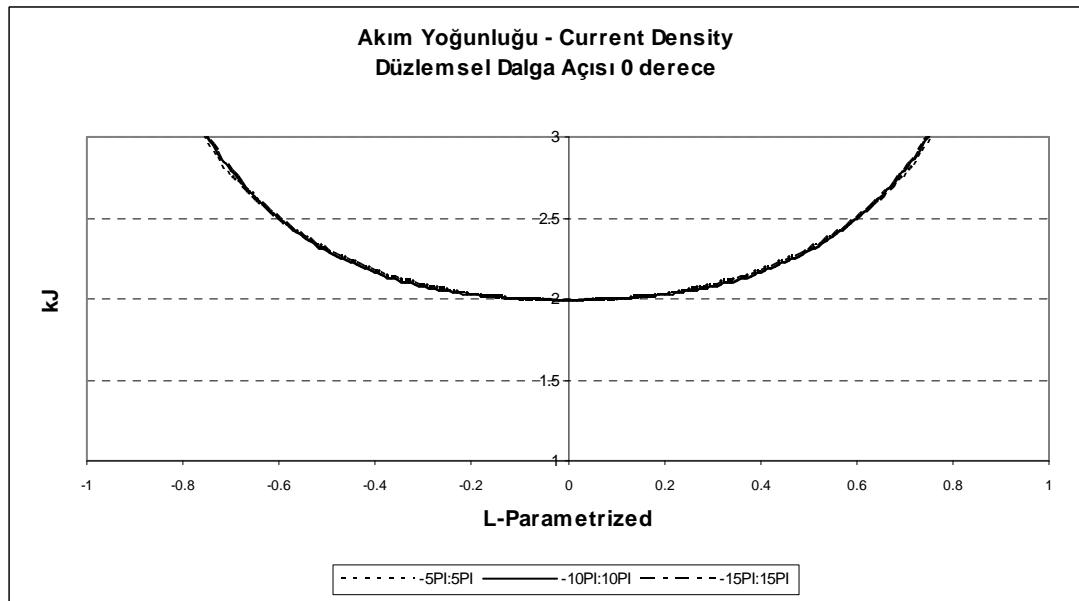
Yukarıdaki grafikte (5.1)-(5.6) şekillerinde Hal sayılarının limit değerlerinin Cismin boyutlarına göre değişimi incelenebilir. Şekil (5.1)-(5.6)'da deneysel olarak 1-15PI aralığındaki cisimler için düzlemsel dalga altında ortaya çıkan (I+K) matrisinin kondisyon sayıları görülebilir. Analitik Regülerizasyon işleminin kararlılığı, eğrilerin limit değerlerine yakınsamalarından rahatlıkla anlaşılabilir.

5.2. CİSİM ÜZERİNDEKİ AKIM YOĞUNLUĞU GRAFİKLERİ

5.2.1. Bir adet Şerit için Cisim Üzerindeki Akım Yoğunluğu Grafikleri



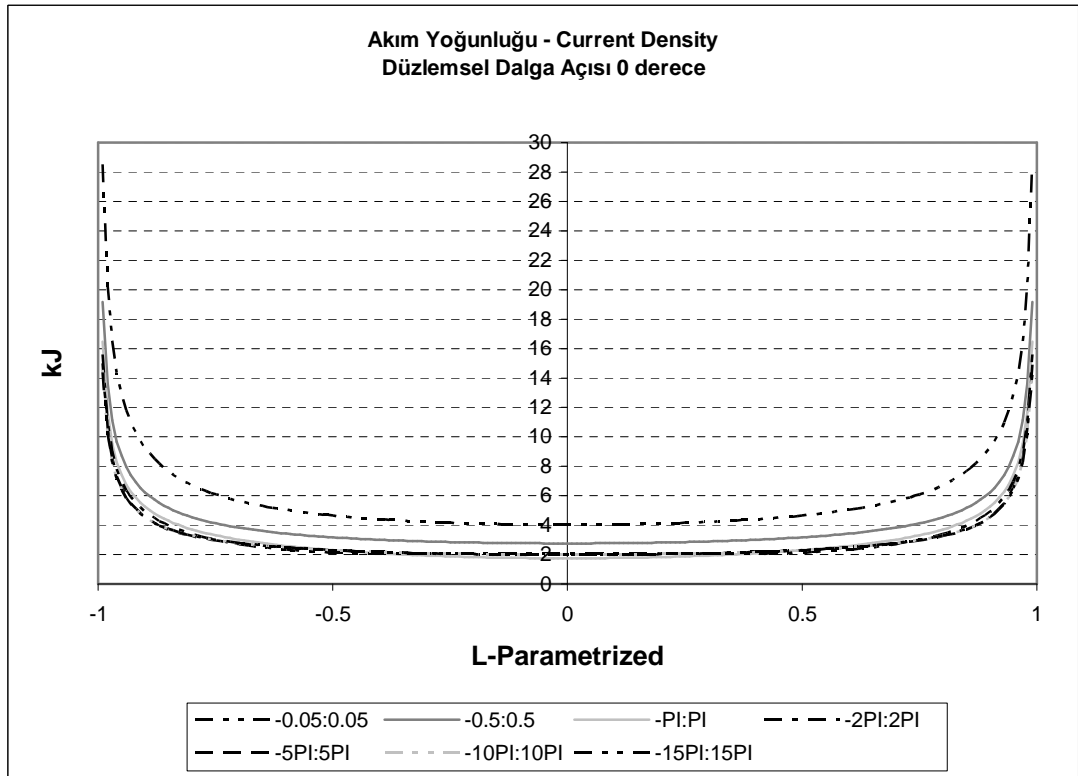
Şekil 5.8a



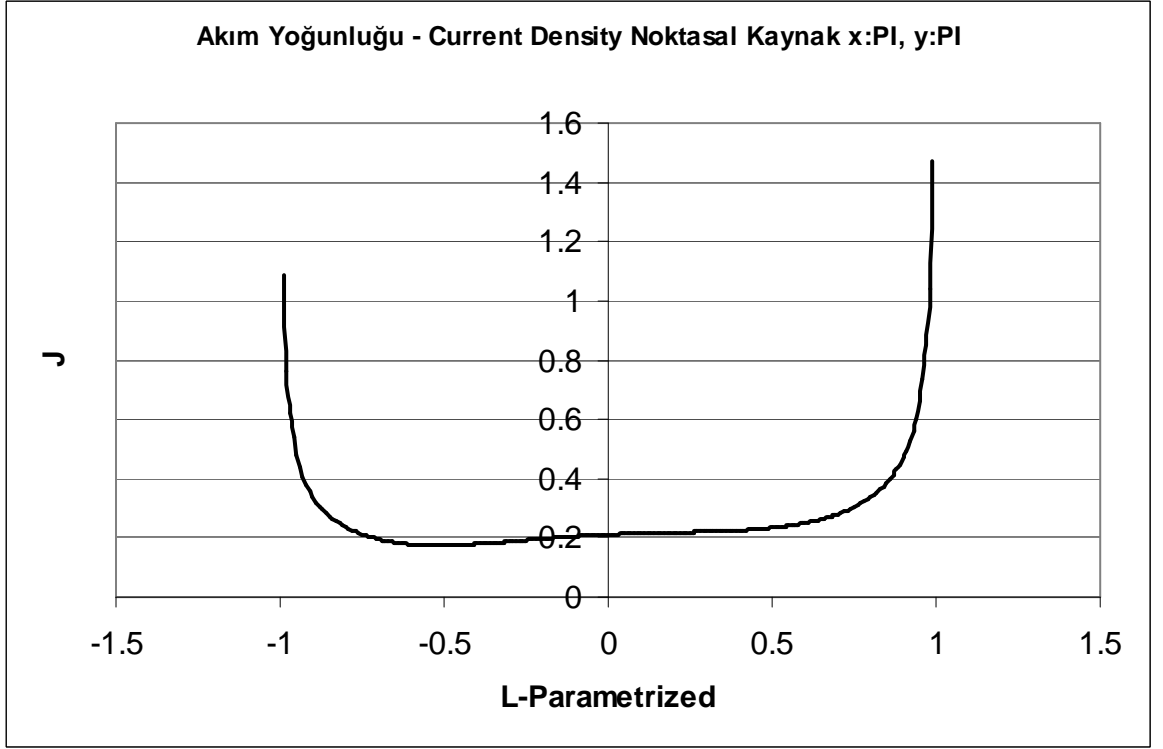
Şekil 5.8b

Akım yoğunlukları düzlemsel dalganın geliş açısının cisme eksenine dik olduğu durum için geçerlidir. Bu anda Kirchhoff Yaklaşıklığı'na göre cisim üzerinde oluşması gereken yoğunluk $-2u^i$ mertebesindedir. 1 ile 15PI boyutu arasında değişen ebatlı Şeritlerimiz $y = 0$ noktasına yerleştirildiği için Kirchhoff yaklaşığına göre cisimler üzerinde oluşacak akım yoğunluğunun -2 birim olması gerekir. Şerit köşeli bir yapıya sahip olduğu için uçlarında radyasyon oluşacaktır. Bu sebeple akım yoğunluğu olarak orta noktalarda Kirchhoff yaklaşığına yakınsayan şerit sistemlerin, köşelere gidildikçe sonsuza giden bir eğri halini alması gayet doğaldır.

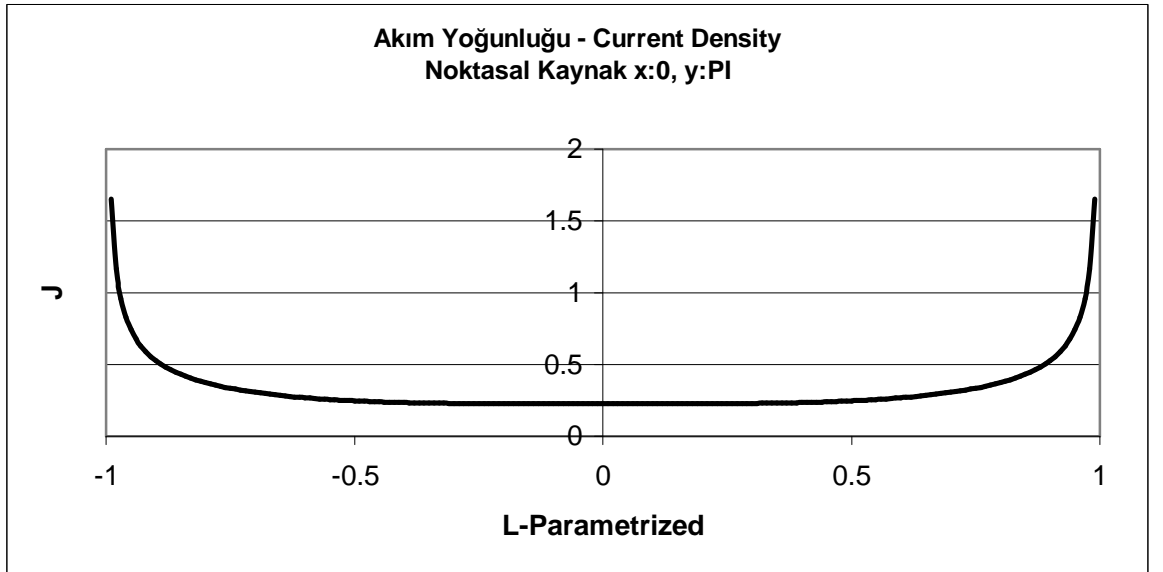
Dikkat edilmesi gereken bir başka nokta ise cismin boyunun dalga boyuna oranla artış gösterdiği durumlarda Kirchhoff Yaklaşıklığı'na biraz daha yaklaşılr. Cismin boyutu ile dalga boyutu arasındaki orantının diğer kolu akım yoğunluğu, dalga boyuna oranla küçük boyutlu olan cisimler üzerinde soğrulan enerjinin etkisi ile daha büyük mertebelere ulaşacaktır.



Şekil 5.9



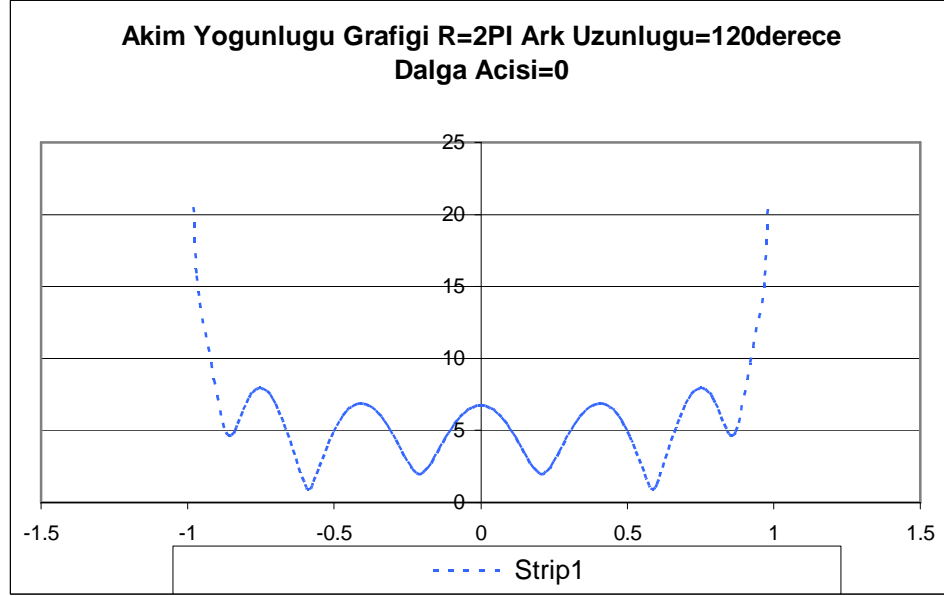
Şekil 5.10a



Şekil 5.10b

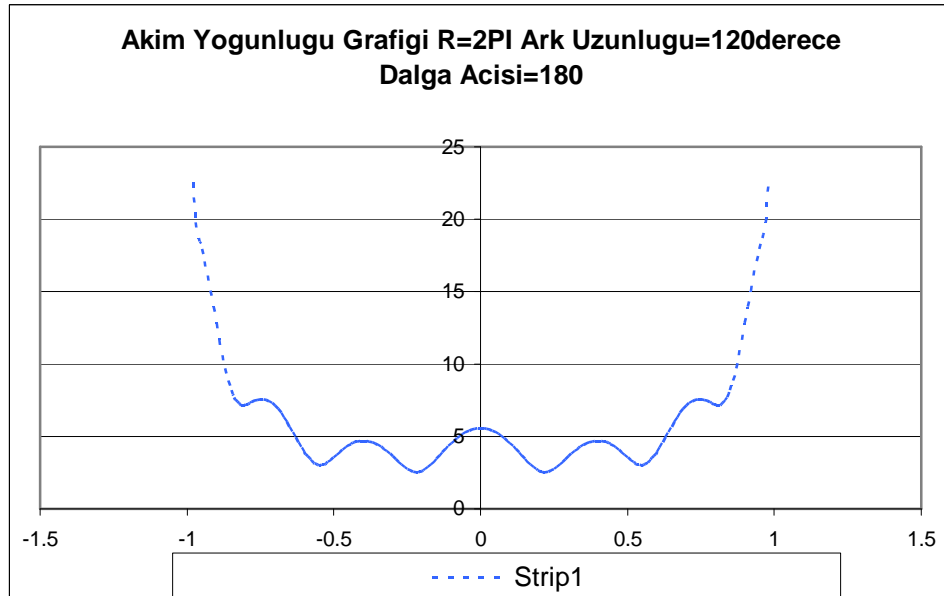
5.2.2. Bir adet Eğrisel Şerit için Cisim Üzerindeki Akım Yoğunluğu

Grafikleri



şekil 5.11a

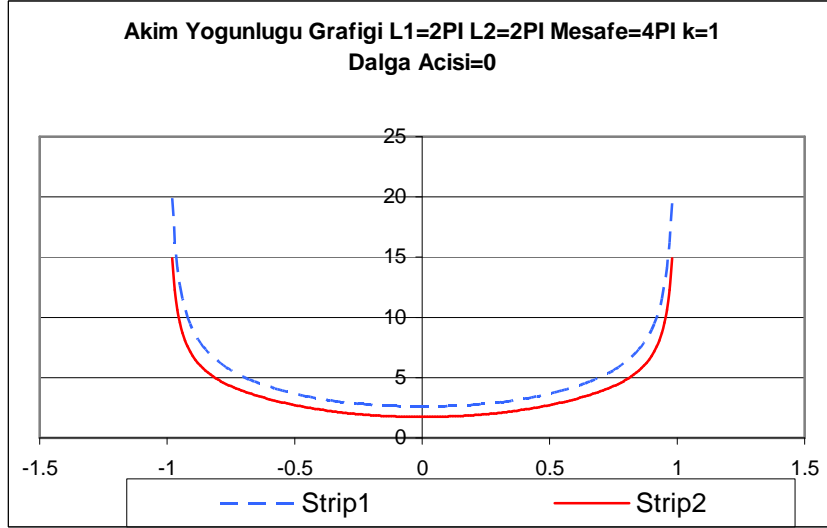
Cismimiz 2π çapında ve uç noktaları y ekseninden -60 ve $+60$ toplam (120derece ark uzunluğuna sahip) olarak seçilmiştir. Gelen dalga açısı 0 derece iken, cisim üzerinde oluşan akım yoğunluğunun eğriler yapmasının nedeni cismin köşelerinden farklı fazlar gelmesi ve iki köşeden gelen fazların birleştiği noktaların genlik olarak diğer noktalardan daha yüksek gelmesidir.



şekil 5.11b

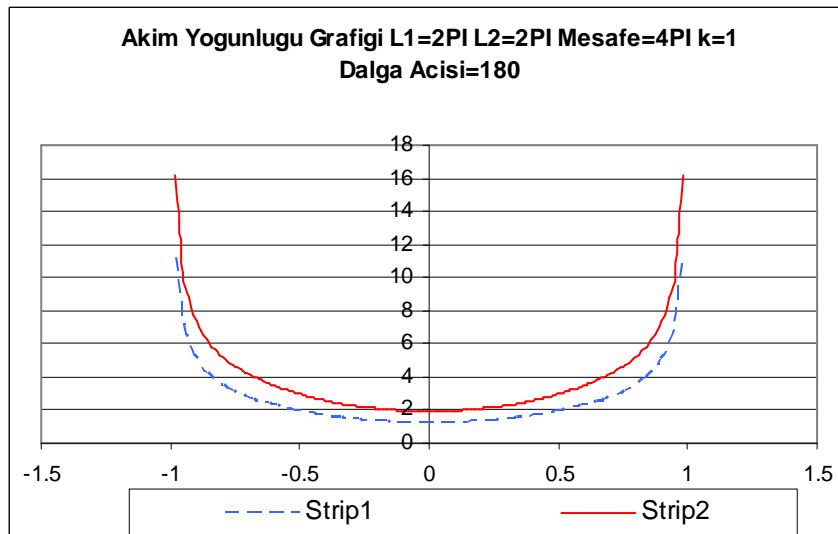
Benzer şekilde aynı cismin gelen dalga açısının 180 derece olduğu durum için geçerli olan akım yoğunluğu grafiği görülmektedir.

5.2.3. İki adet Şerit için Cisimler Üzerindeki Akım Yoğunluğu Grafikleri



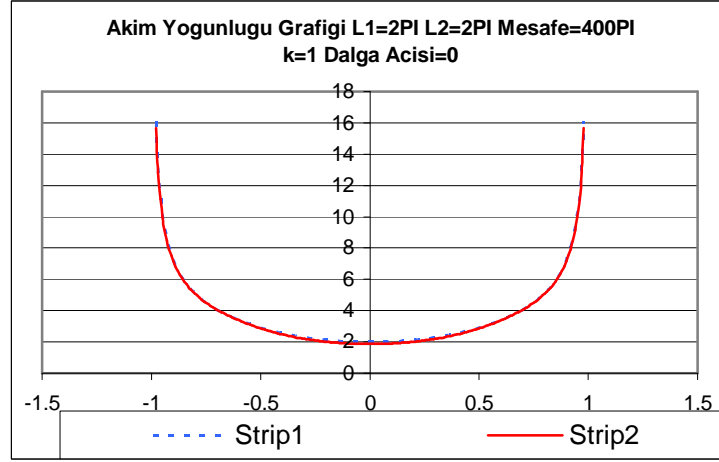
şekil 5.12a

İki adet 2PI uzunluktaki birbirine ve gelen dalgaya paralel, aralarındaki mesafe 4PI olan ve k dalga sayısının 1, dalga açısının 0 alındığı ortam için geçerli grafik şekildeki gibidir. Koordinat eksenindeki konumu nedeniyle (ilgili yakın alan grafiklerinden gözlenebilir) Şerit1, Şerit 2'ye göre gelen dalgayı daha önce karşılamaktadır. Bu durumda Şerit 2 gölgede kalmakta ve üzerinde oluşan akım yoğunluğu Şerit 1'e oranla daha az olmaktadır.



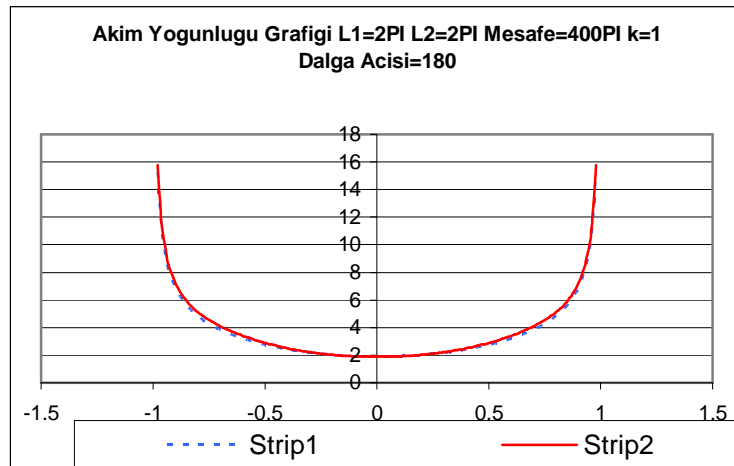
şekil 5.12b

Yukarıdaki şekilde bir önceki durumdan farklı olarak gelen dalga açısı 180 derecedir. Bu durumda Koordinat eksenindeki konumu nedeniyle (ilgili yakın alan grafiklerinden gözlenebilir) Şerit2, Şerit 1'ye göre gelen dalgayı daha önce karşılamak olup Şerit 1 gölgede kalmakta ve üzerinde oluşan akım yoğunluğu Şerit 2'e oranla daha az olmaktadır.



şekil 5.13a

İki şerit arasındaki mesafe açıldığı zaman birbirleri ile olan etkileşimleri Green Fonksiyonu'ndan kaynaklı olarak düşer ve iki cisimde tek şerit sisteminde gördüğümüz şekilde davranmaya başlarlar. Yukarıdaki şekil için akım yoğunluklarının birbiri ile örtüşür şekilde olduğu grafiksel olarak da gözlenebilmektedir.

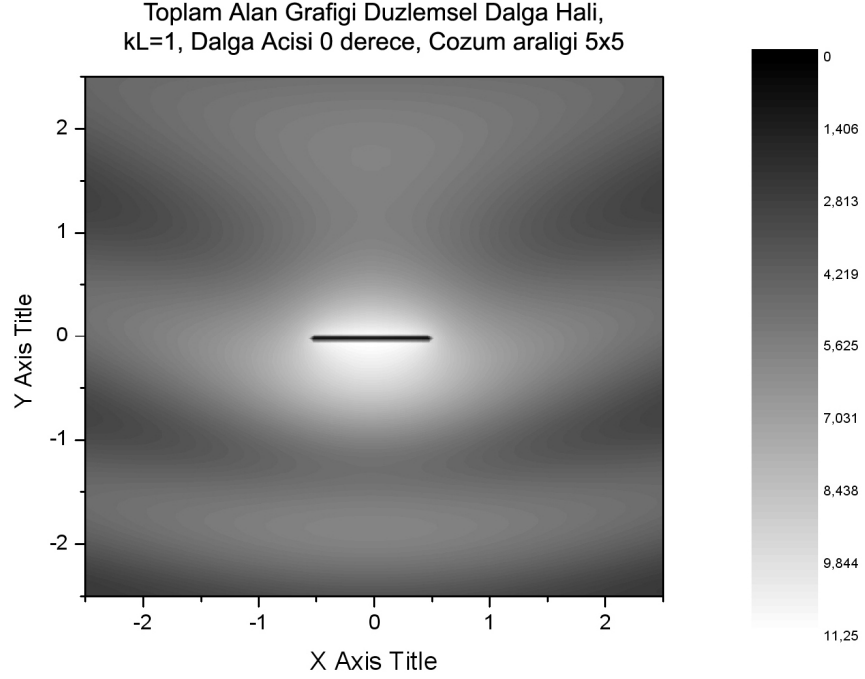


şekil 5.13b

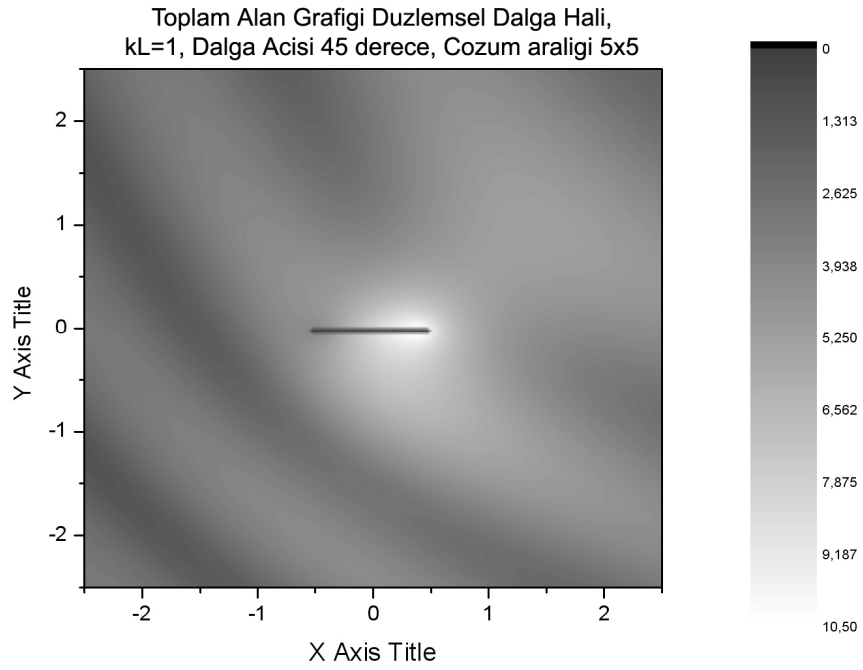
Aradaki mesafenin 400PI olarak seçilmiş olduğu durumlar için geçerli olan akım yoğunluk grafikleri gelen dalga açısının 180 derecelik açılarda farklılıklarında yaklaşık olarak aynı sonuçları vermektedir.

5.3. YAKIN ALAN GRAFİKLERİ

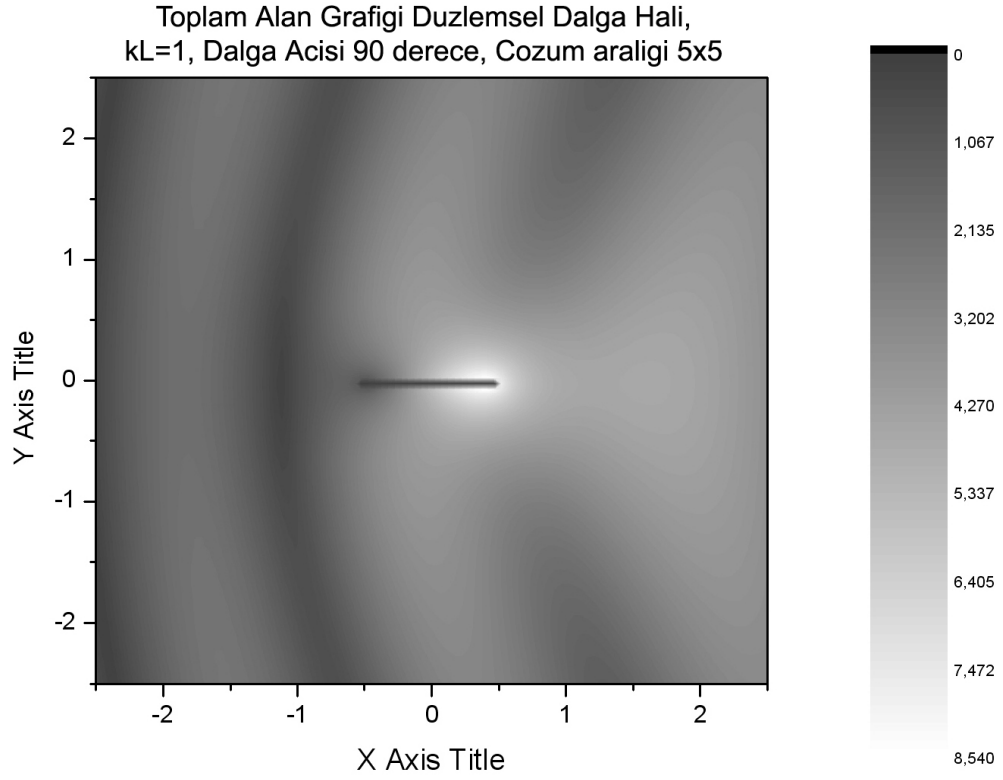
5.3.1. Bir adet Şerit için Yakın Alan Grafikleri



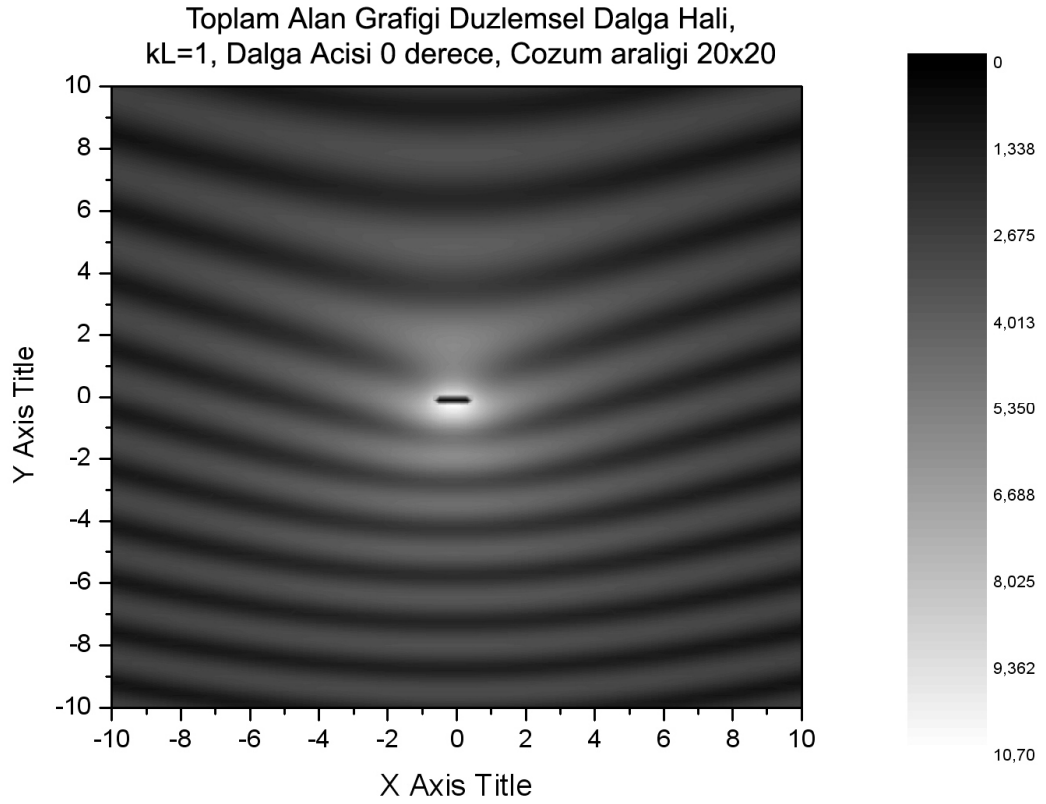
Şekil 5.14



Şekil 5.15

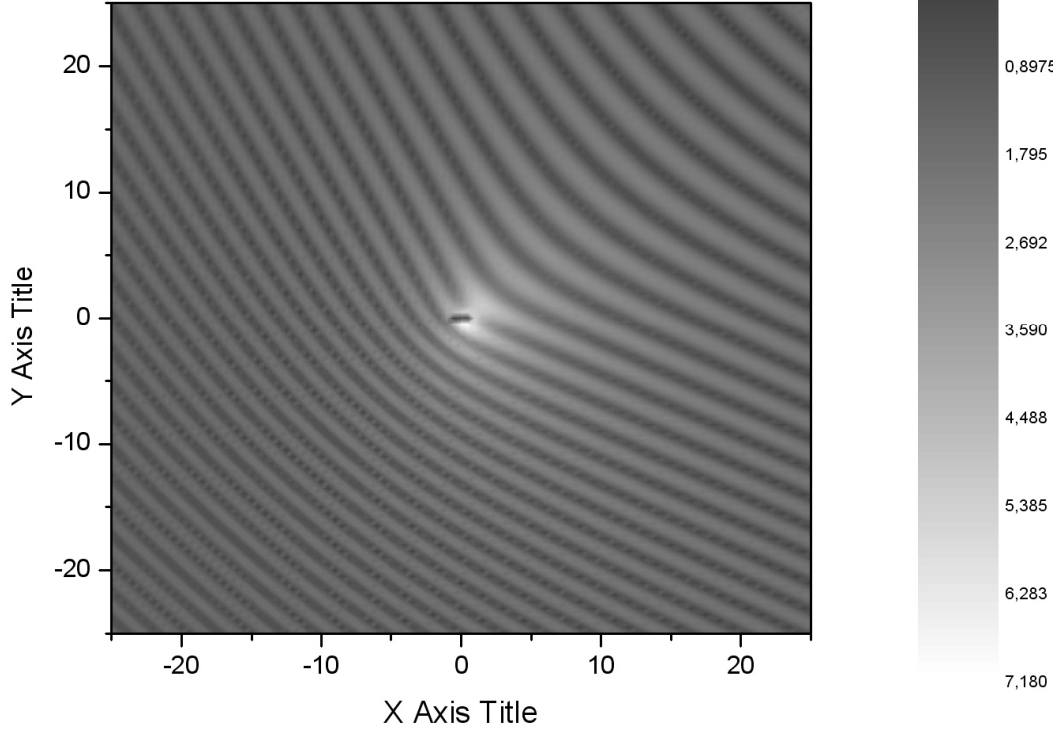


Şekil 5.16



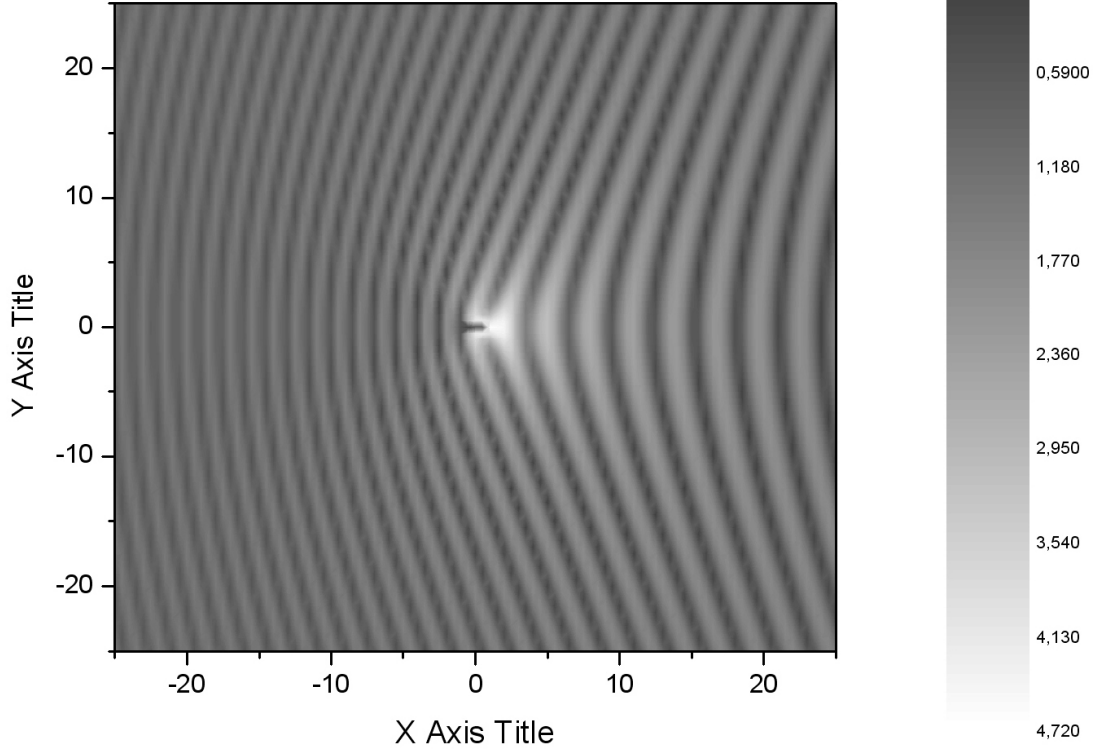
Şekil 5.17

Toplam Alan Grafigi Duzlemsel Dalga Hali,
kL=1, Dalga Acisi 45 derece, Cozum araligi 50x50



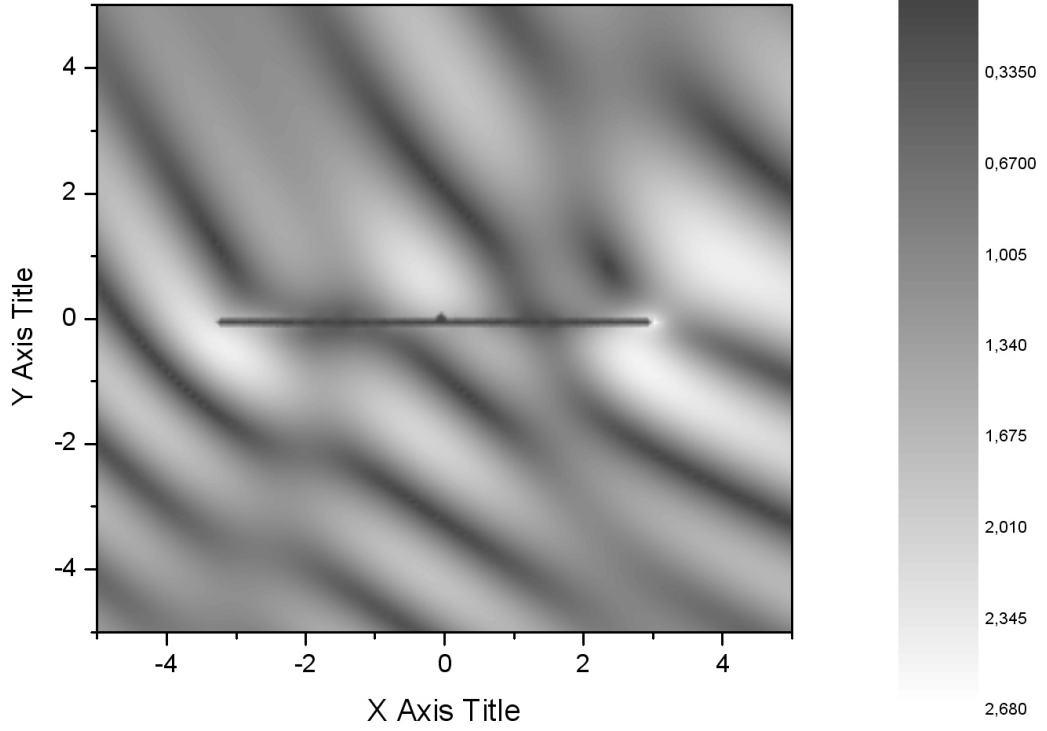
Şekil 5.18

Toplam Alan Grafigi Duzlemsel Dalga Hali,
kL=1, Dalga Acisi 90 derece, Cozum araligi 50x50



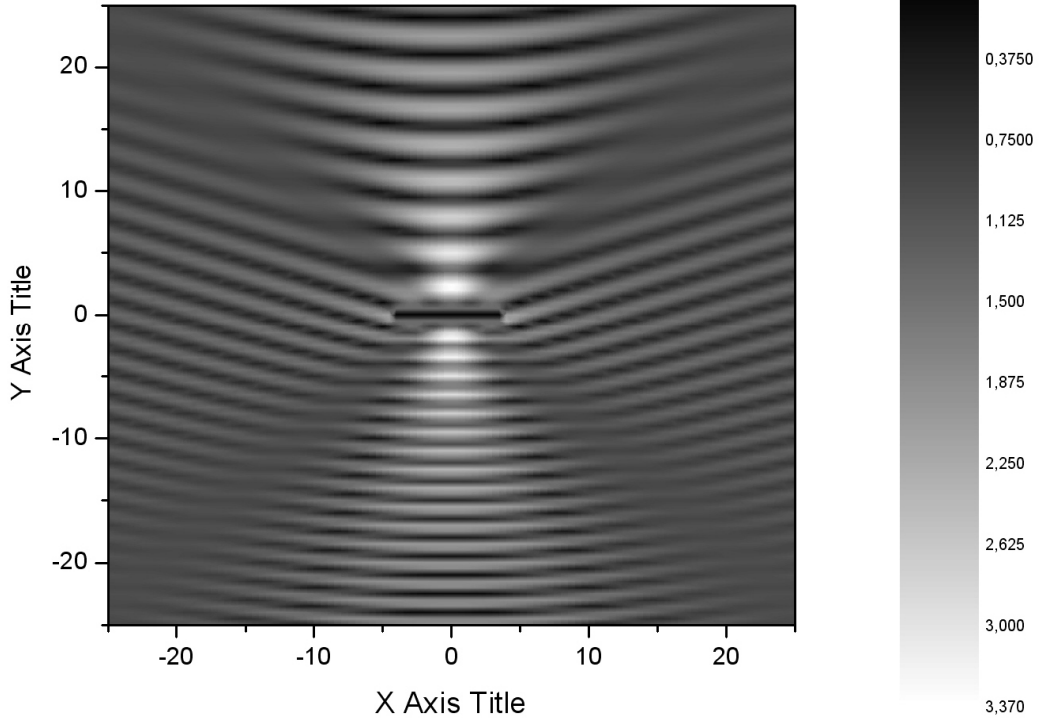
Şekil 5.19

Toplam Alan Grafigi Duzlemsel Dalga Hali,
 $kL=2\pi$, Dalga Acisi 45 derece, Cozum araligi 10x10

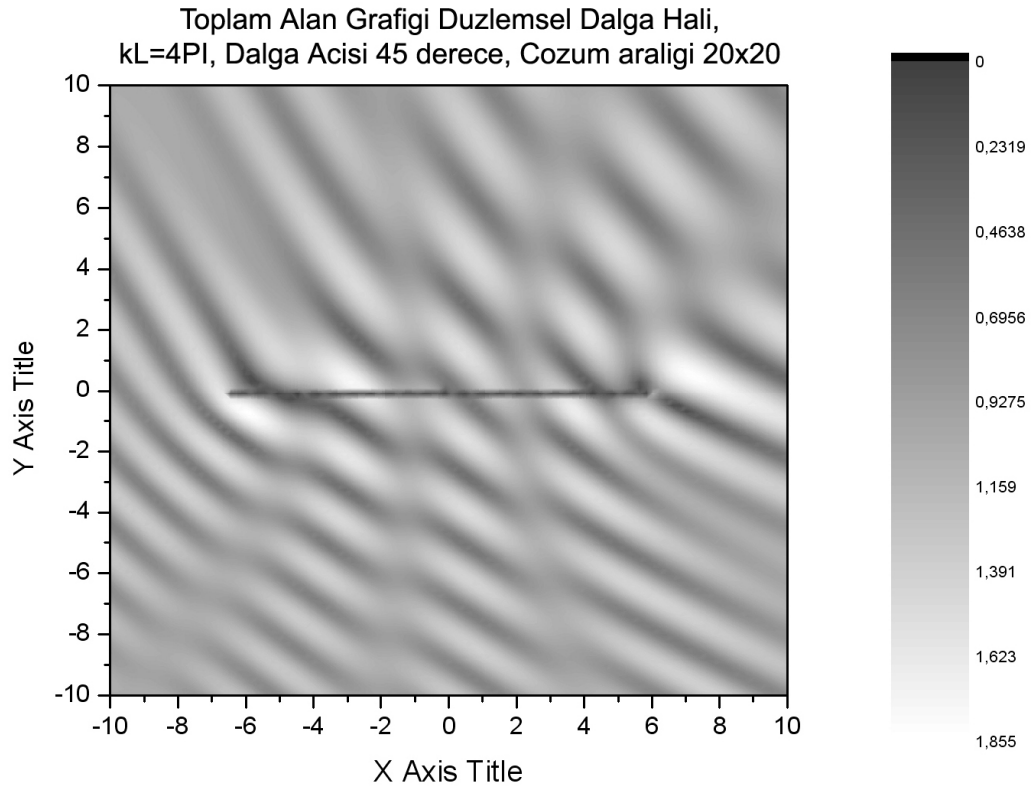


Şekil 5.20

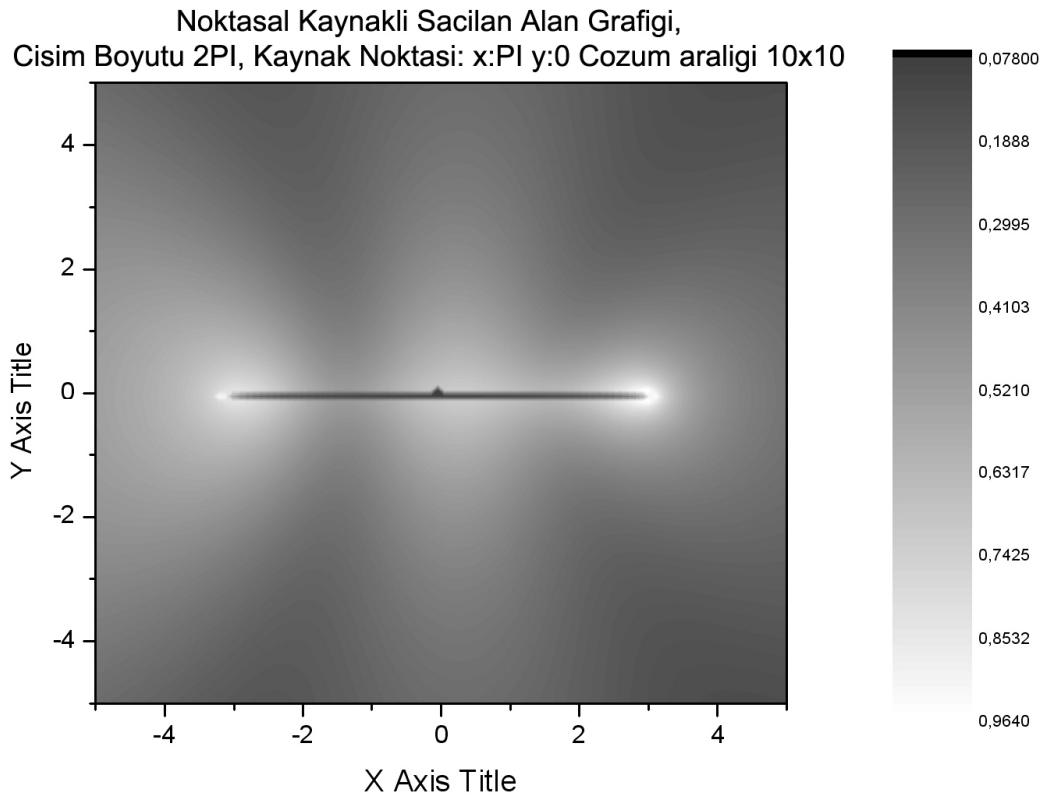
Toplam Alan Grafigi Duzlemsel Dalga Hali,
 $kL=2\pi$, Dalga Acisi 0 derece, Cozum araligi 50x50



Şekil 5.21

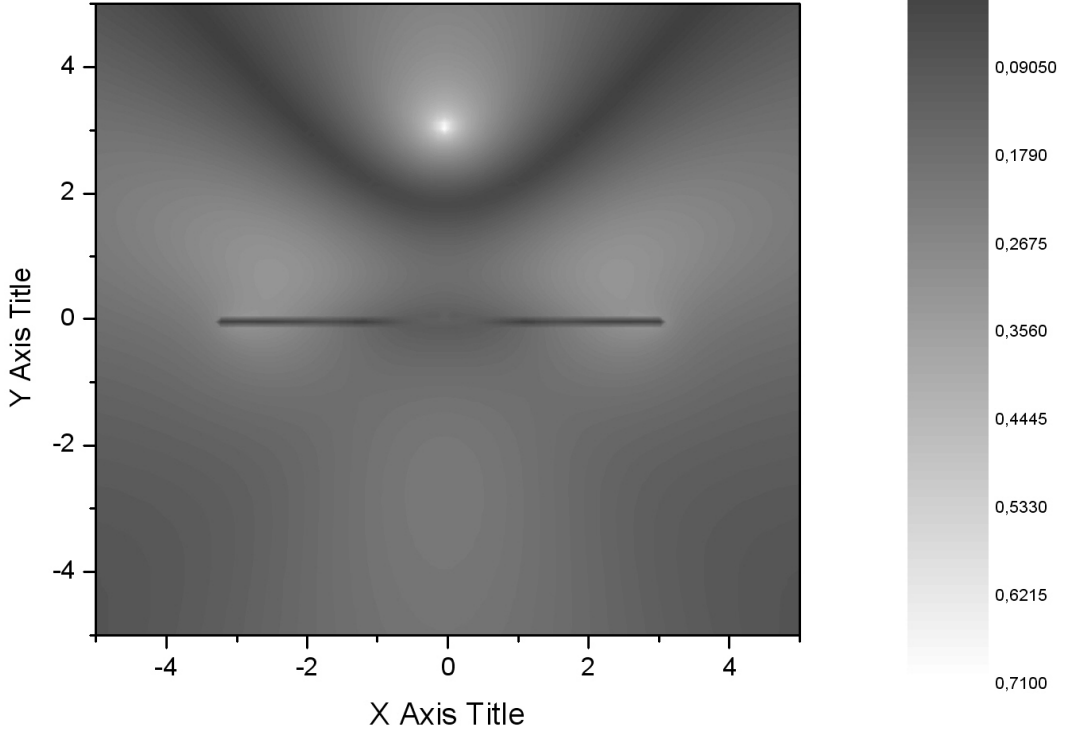


Şekil 5.22



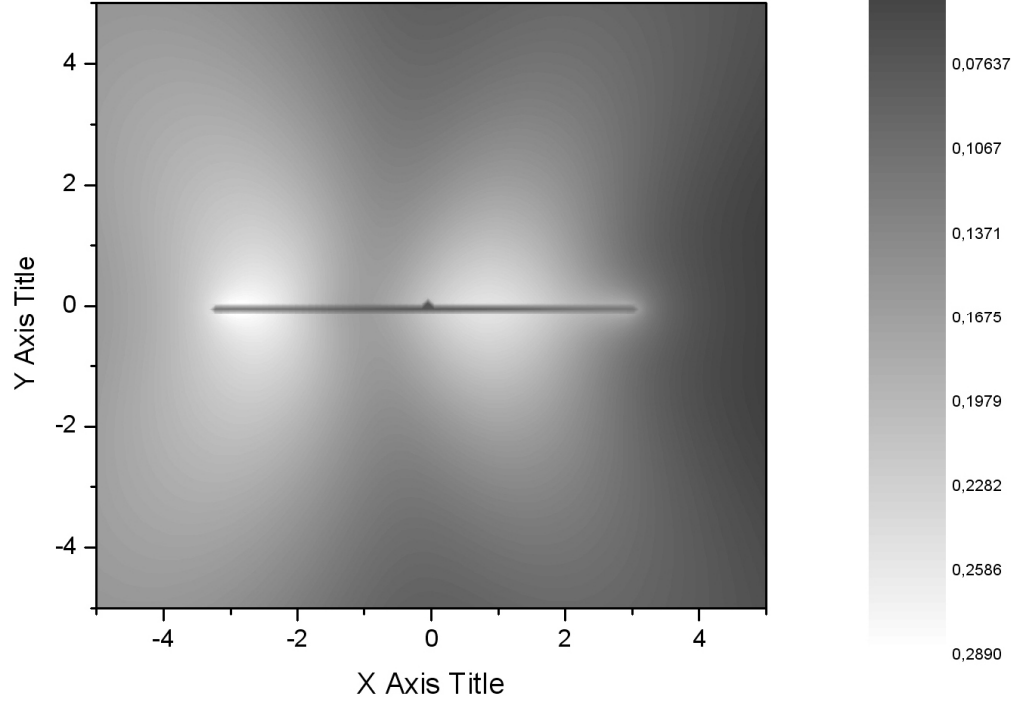
Şekil 5.23

Noktasa Kaynakli Sacilan Alan Grafigi,
Cisim Boyutu 2PI, Kaynak Noktasi (0,PI), Cozum Araligi 10x10



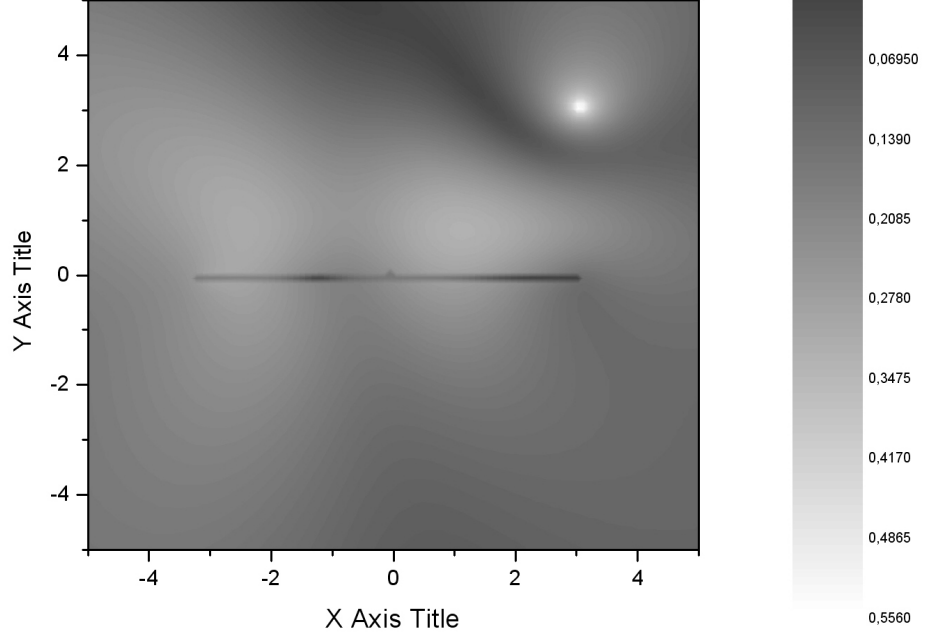
Şekil 5.24

Noktasal Kaynakli Sacilan Alan Grafigi,
Cisim Boyutu 2PI, Kaynak Noktasi: x:PI y:PI Cozum araligi 10x10



Şekil 5.25

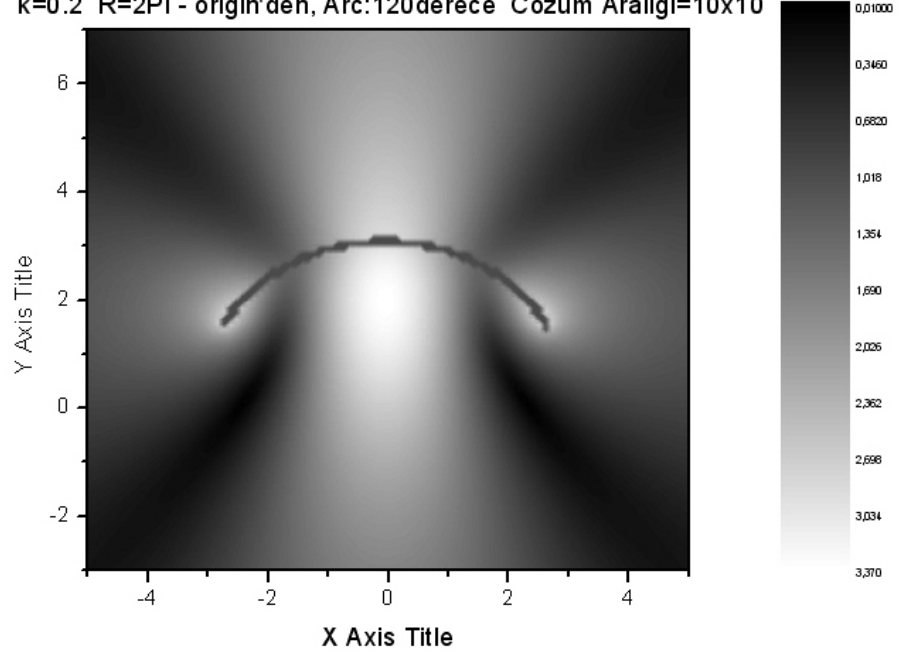
Noktasal Kaynakli Toplam Alan Grafigi,
Cisim Boyutu 2π , Kaynak Noktasi: $x:\pi$ $y:\pi$ Cozum araligi 10×10



Şekil 5.26

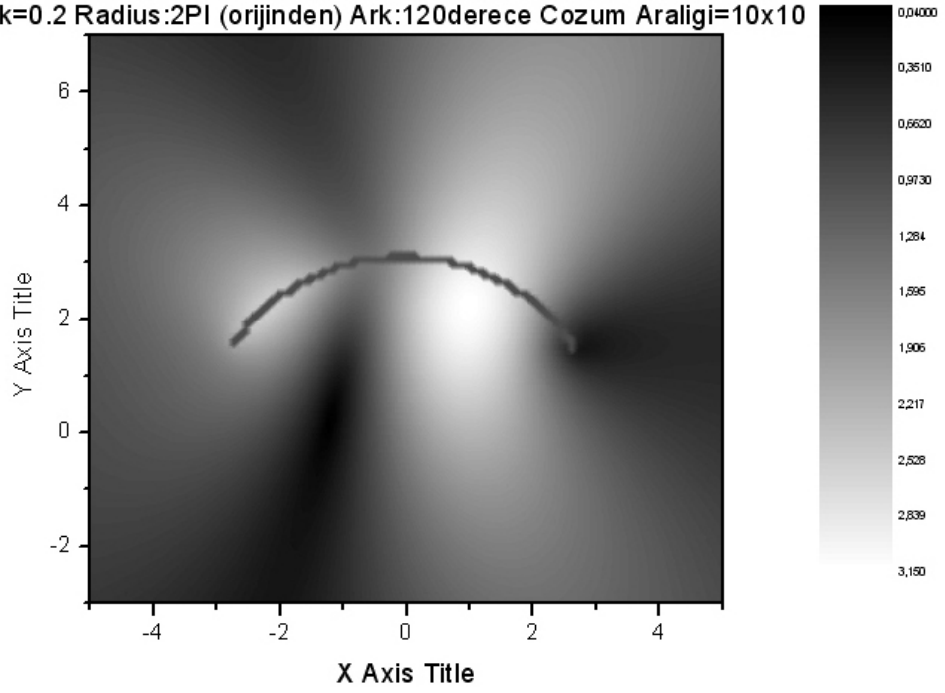
5.3.2. Bir adet Eğrisel Şerit için Yakın Alan Grafikleri

Sacilan Alan Grafigi, Kaynak:Düzlemsel Dalga, Dalga Acisi=0
 $k=0.2$ $R=2\pi$ - origin'den, Arc:120derece Cozum Araligi= 10×10



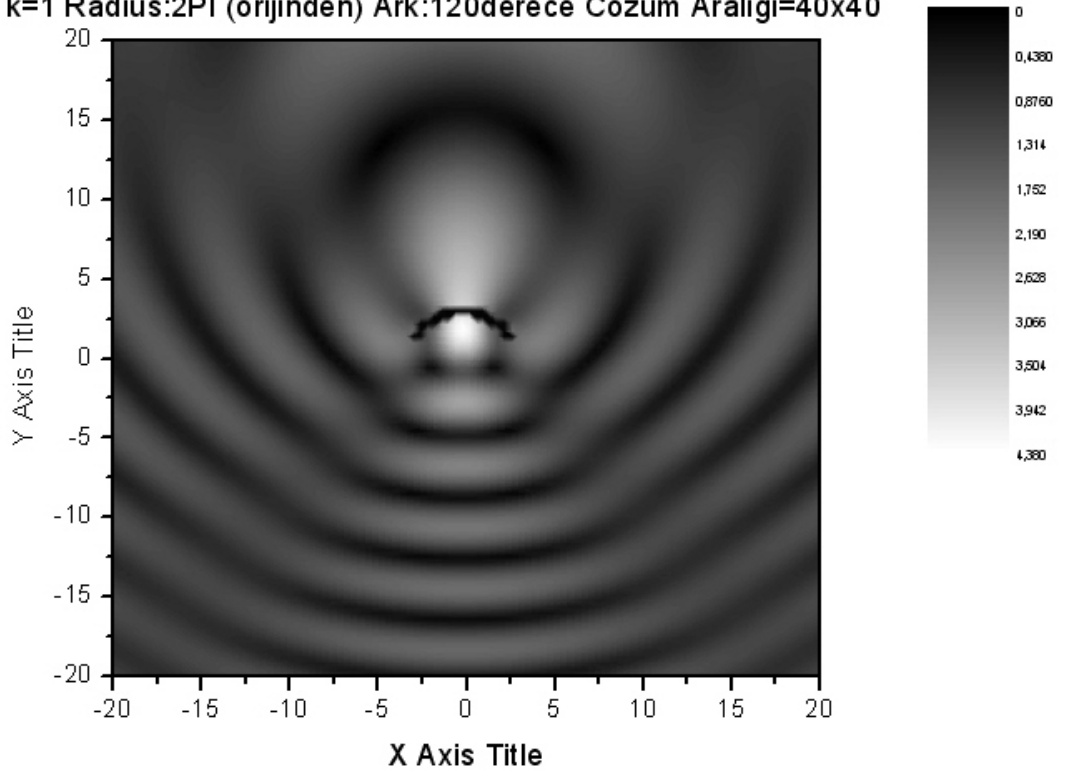
Şekil 5.27

Toplam Alan Grafiği, Kaynak:Düzlemsel Dalga, Dalga Acisi=45
 $k=0.2$ Radius:2PI (orijinden) Ark:120derece Cozum Araligi=10x10



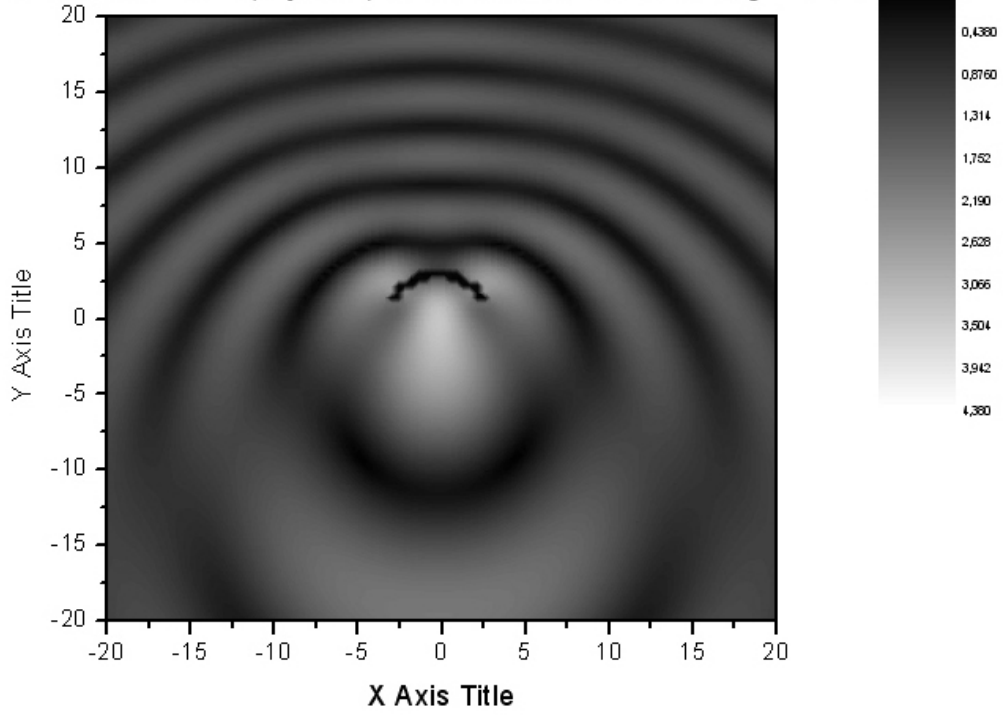
Şekil 5.28

Toplam Alan Grafiği, Kaynak:Düzlemsel Dalga, Dalga Acisi=0
 $k=1$ Radius:2PI (orijinden) Ark:120derece Cozum Araligi=40x40



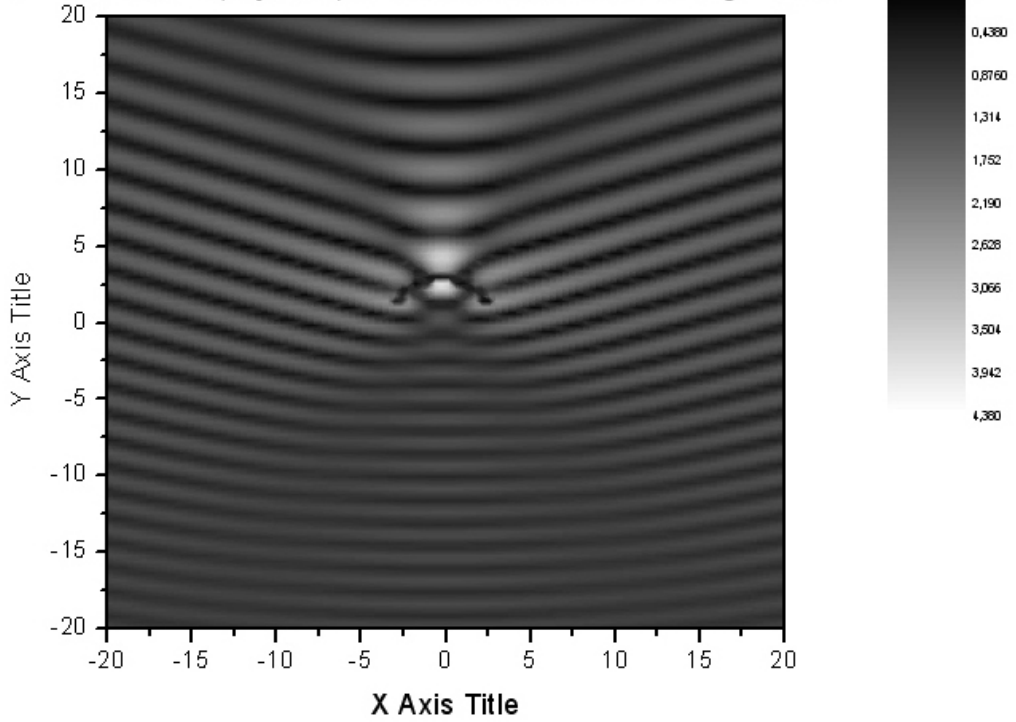
Şekil 5.29

Toplam Alan Grafigi, Kaynak:Düzlemsel Dalga, Dalga Acisi=180
k=0.2 Radius:2PI (orijinden) Ark:120derece Cozum Araligi=40x40



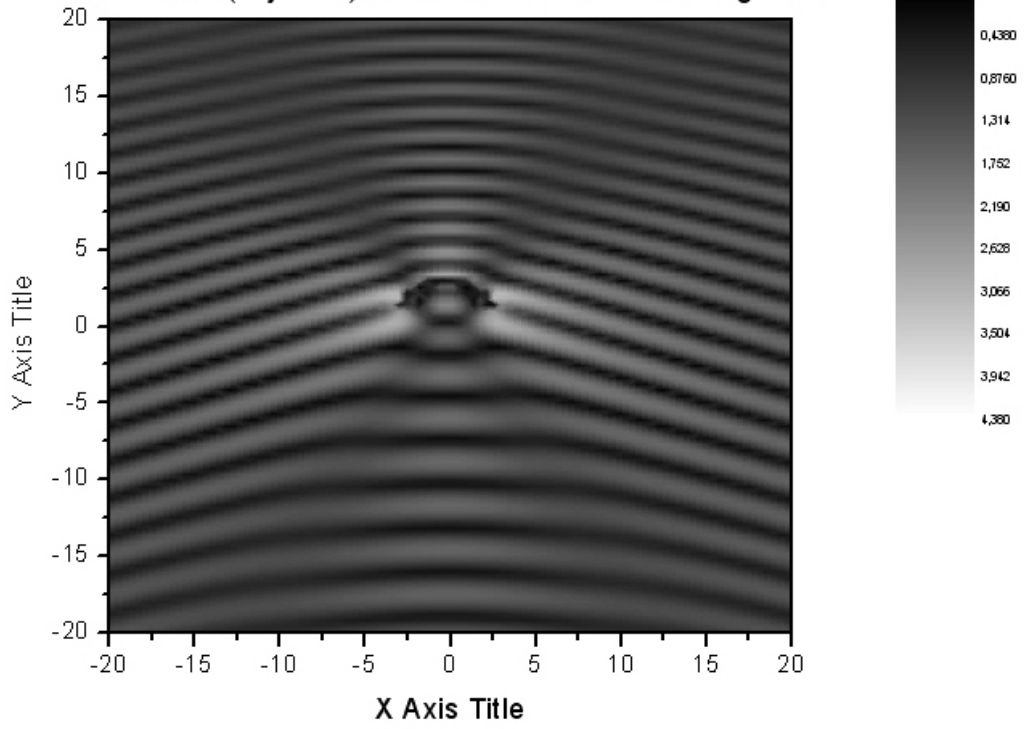
Şekil 5.30

Toplam Alan Grafigi, Kaynak:Düzlemsel Dalga, Dalga Acisi=0
k=1 Radius:2PI (orijinden) Ark:120derece Cozum Araligi=40x40



Şekil 5.31

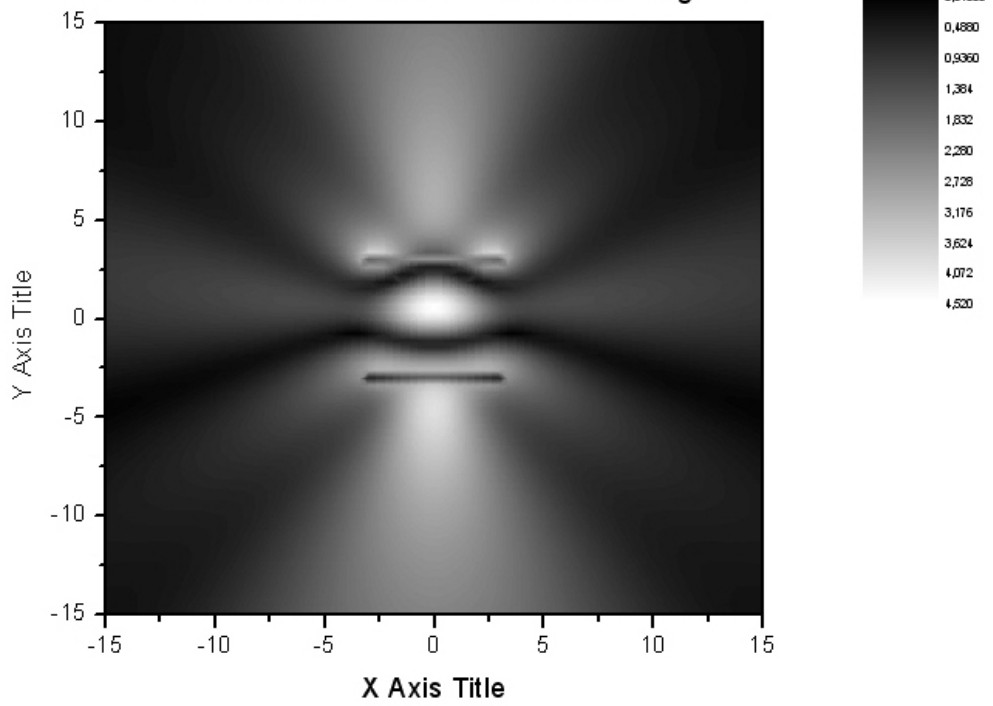
Toplam Alan Grafigi, Kaynak:Düzlemsel Dalga, Dalga Acisi=180
k=1 Radius:2PI (orijinden) Ark:120derece Cozum Araligi=40x40



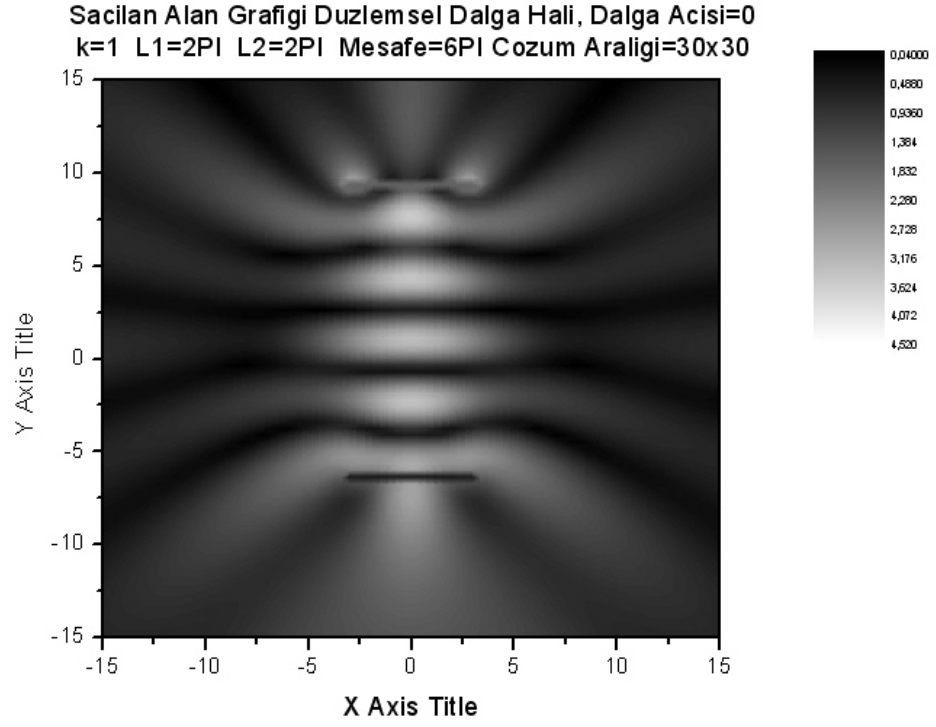
Şekil 5.32

5.3.3. İki adet Düzgün Şerit için Yakın Alan Grafikleri

Sacilan Alan Grafigi Düzlemsel Dalga Hali, Dalga Acisi=0
k=1 L1=2PI L2=2PI Mesafe=2PI Cozum Araligi=30x30

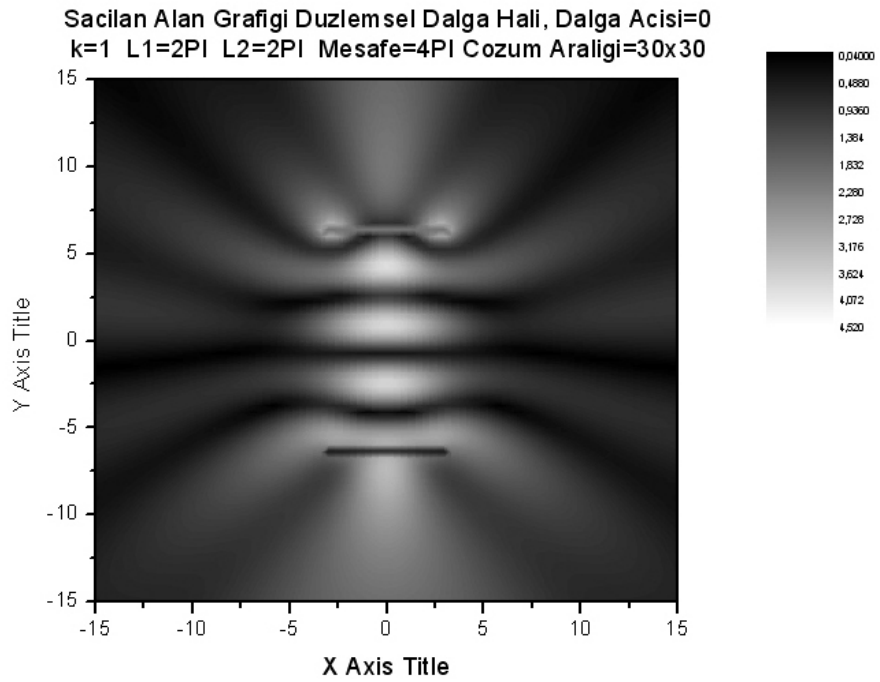


Şekil 5.33

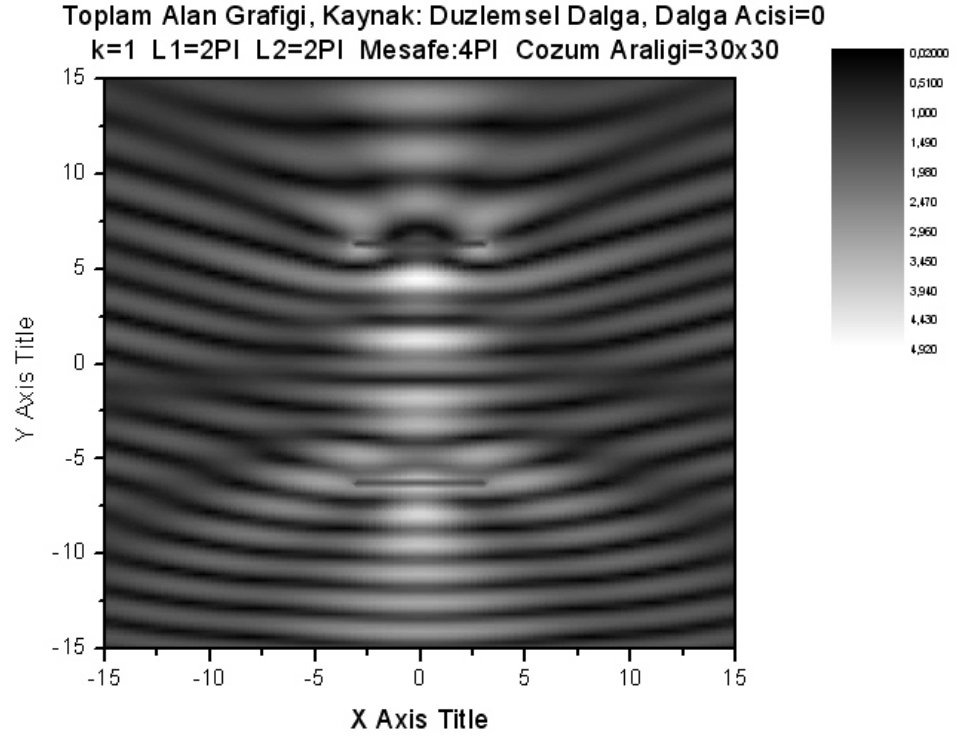


Şekil 5.34

Teoriye göre iki şerit arasında dalga boyu ve cisim boyutları ile orantılı olarak mesafe olduğu takdirde sistem rezonansa girecektir. Yukarıdaki şekiller için bu durumu görebilmekteyiz. Saçılan alan grafikleri alınan sistemler için iki şerit boyutu 2π ve aradaki mesafe sırası ile 2π , 6π ve 4π alınmıştır.



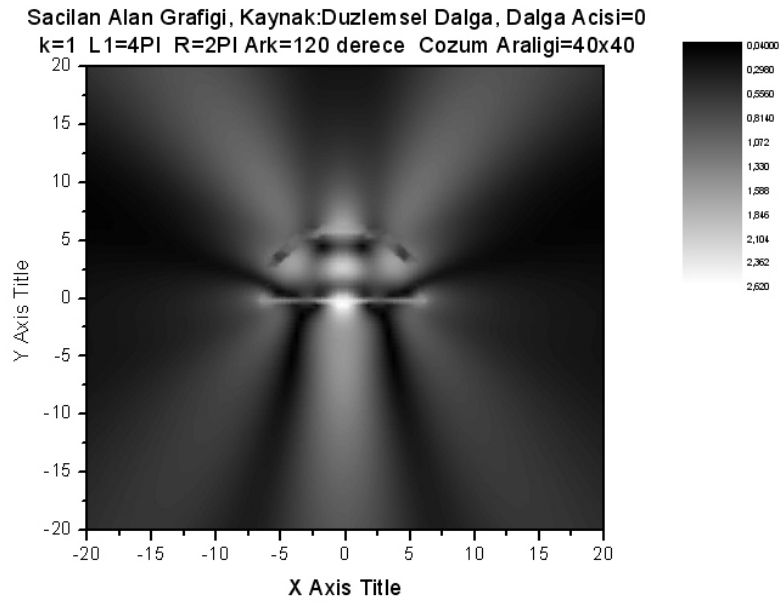
Şekil 5.35



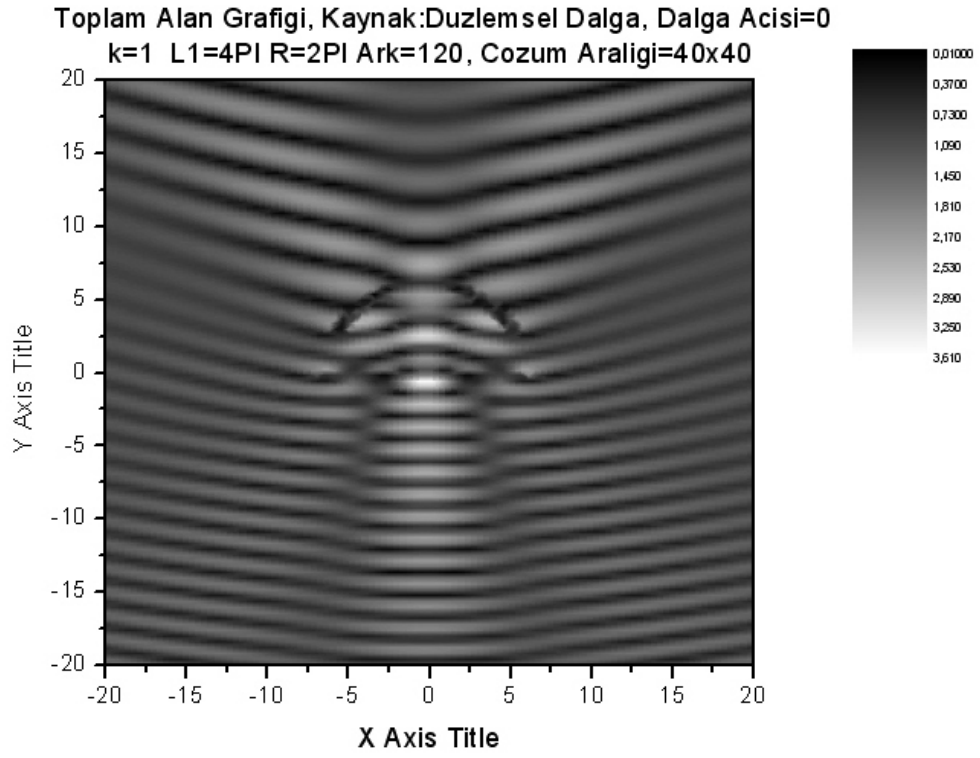
Şekil 5.36

Yukarıdaki şekilde ise rezonans halinde olan sistem için toplam alan grafiği görülmektedir.

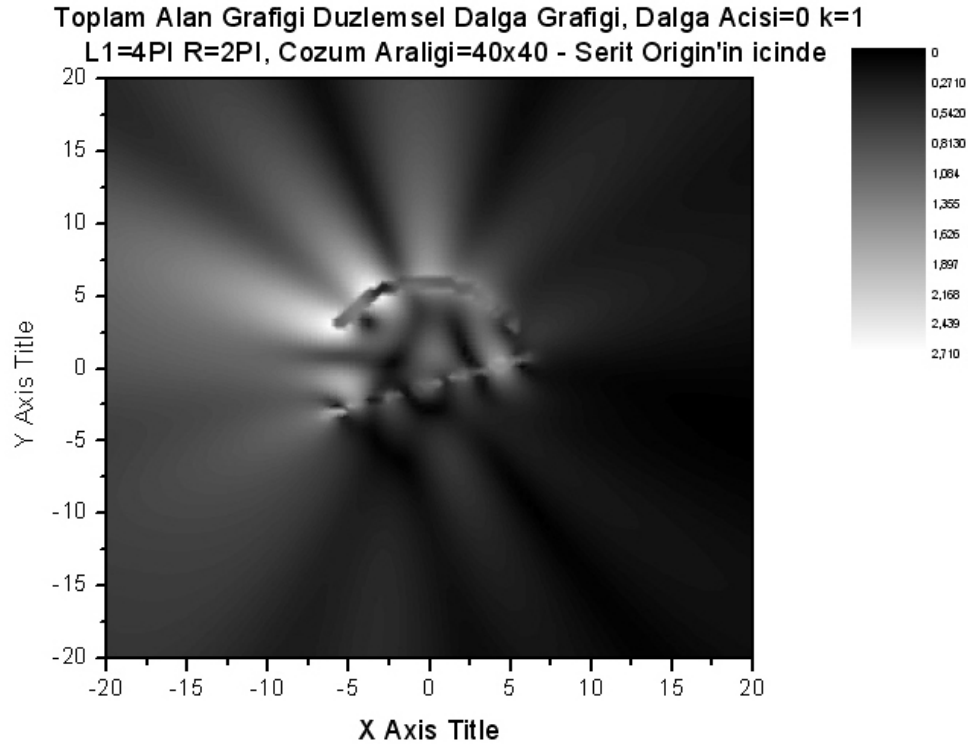
5.3.4. Bir adet Düzgün Şerit Bir adet Eğri Şerit için Yakın Alan Grafikleri



Şekil 5.37

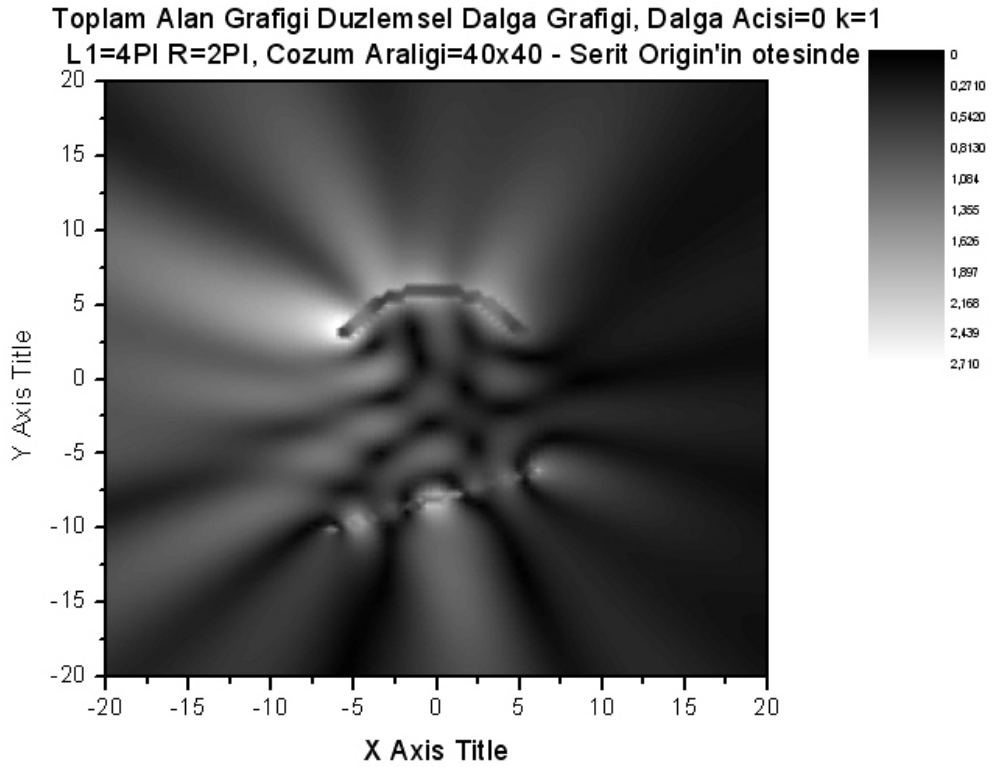


Şekil 5.38



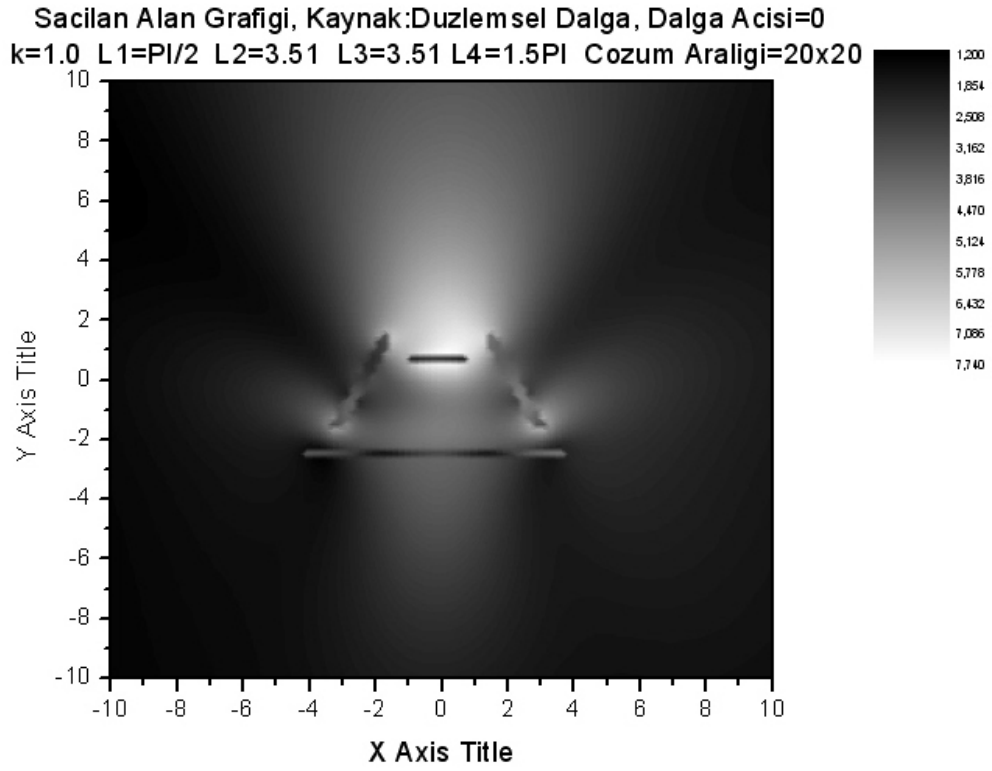
Şekil 5.39

Eğrisel Şerit ve Şerit arasında dalga tutucu (wave trap) görülmektedir. Yukarıdaki aşağıdaki şekil için 120derece açılı ve 2π yarıçaplı yay için, alt şeridin yay merkezinin üstünde yada altında olduğu şartlar göz önüne alınmıştır. Alt şerit belirli bir açı ile yerleştirildiği takdirde eğer üstteki yayın merkezinin üzerinde konumlanmışsa, yaydan yansıyan dalga vektörleri şeritten yaya doğru geri yansıyabilir. Bu durumda rezonans devam edebilir. Fakat alt şerit, çember merkezinin altında konumlanmışsa yansıyan dalga vektörleri dağılarak uzaya saçılır. Bu durumda rezonans durumu devam ettirilemez.

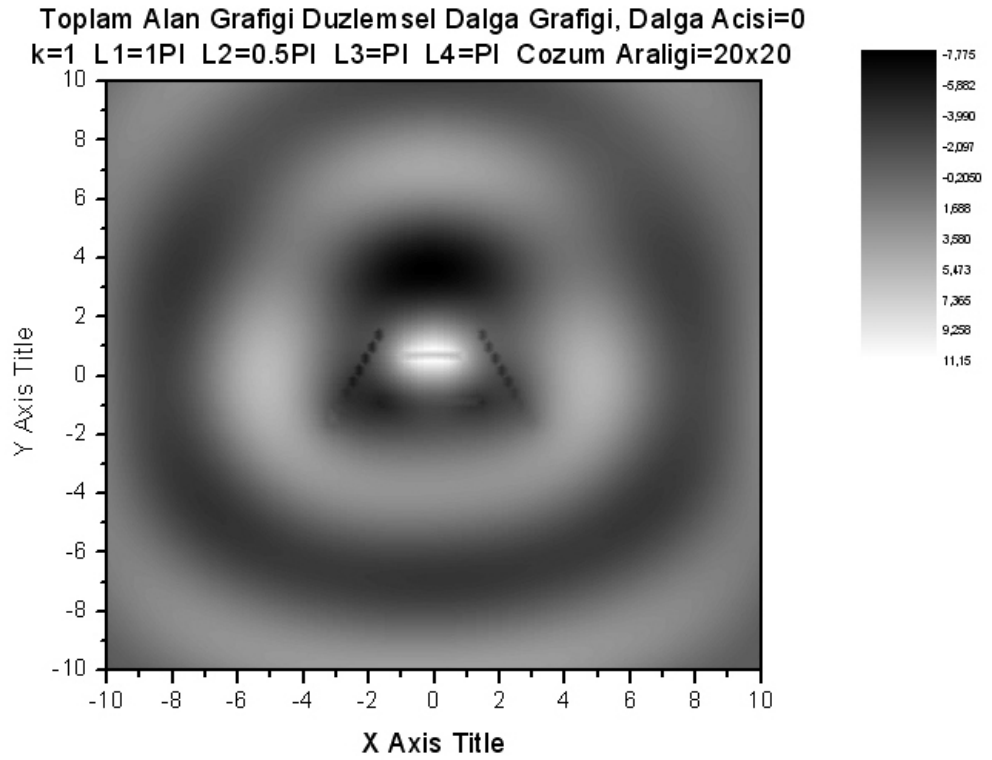


Şekil 5.40

5.3.5. 4 adet Şerit için Yakın Alan Grafikleri

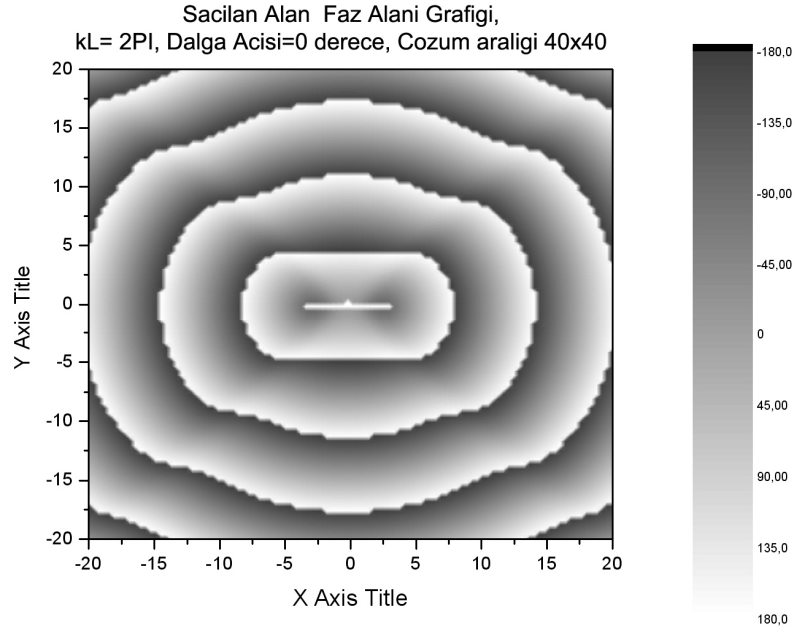


Şekil 5.41

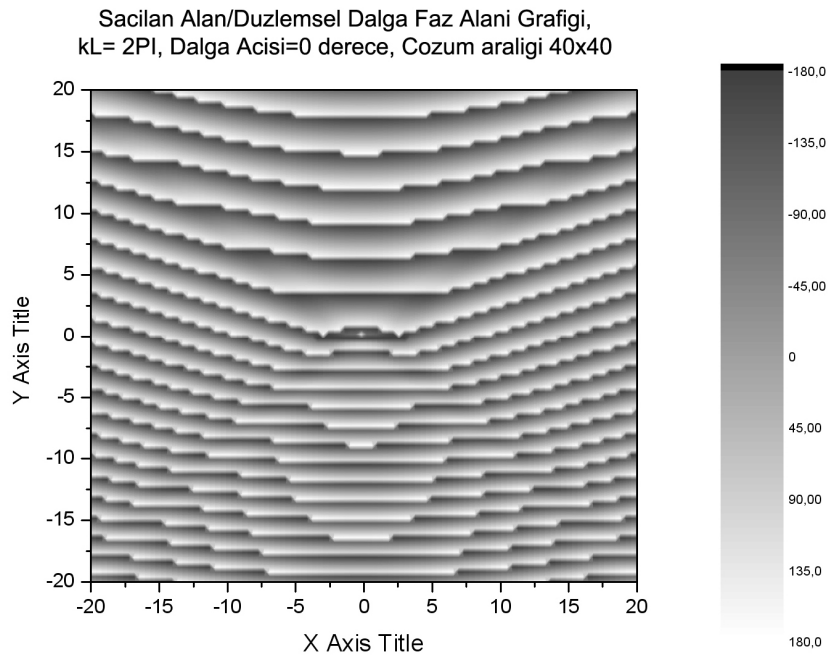


Şekil 5.42

5.4. FAZ ALANI GRAFİKLERİ



Şekil 5.43

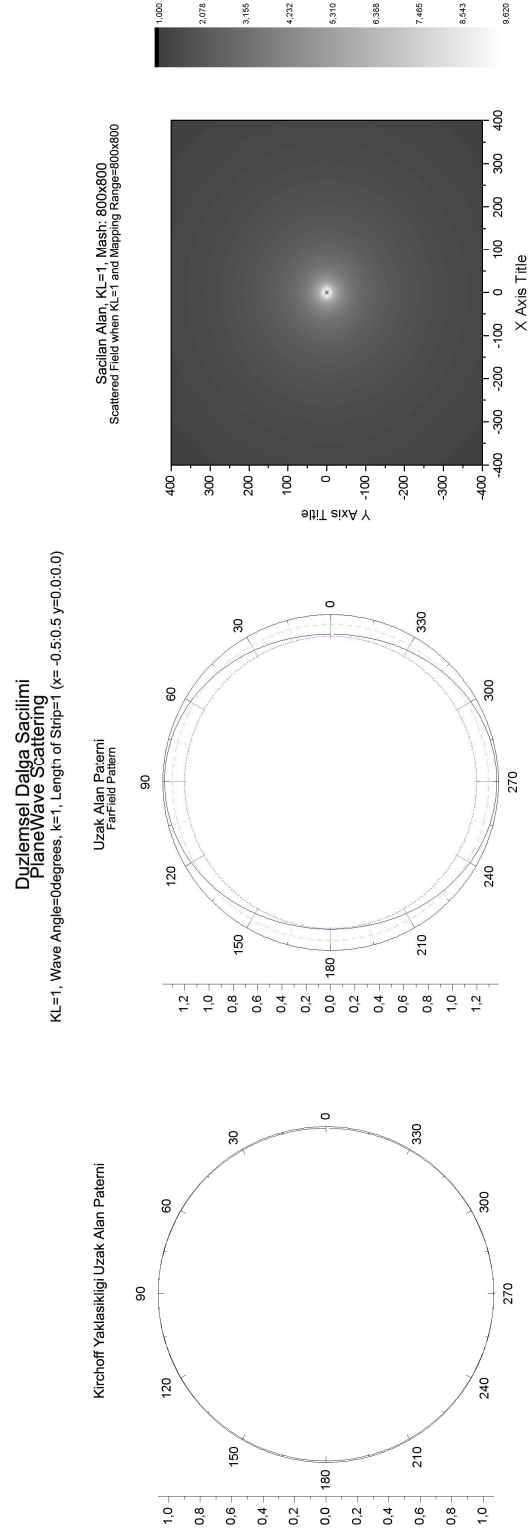


Şekil 5.44

Bir adet düzgün şerit için yapılan bu incelemede saçılımın ardından dalganın faz açısında meydana gelen açısal değişim gözlenebilir.

5.5. UZAK ALAN GRAFİKLERİ

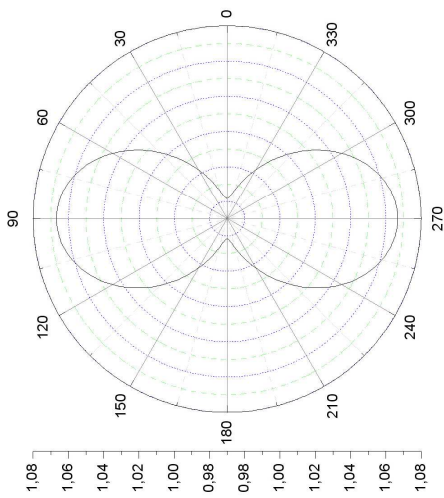
5.5.1. Bir adet Şerit için Uzak Alan Grafikleri



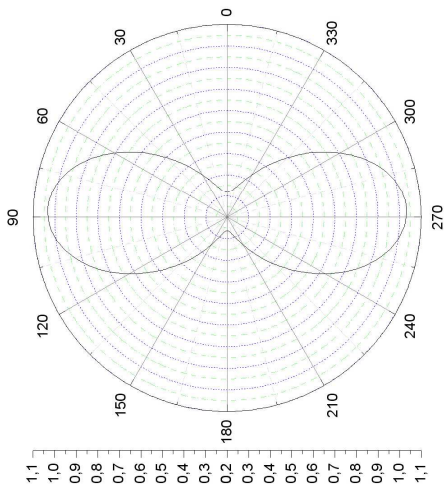
Şekil 5.45

Düzlemsel Dalga Sacilimi
 PlaneWave Scattering
 KL=1PI, Wave Angle=0degrees, k=1, Length of Strip=PI (x=-0.5PI:0.5PI) y=0.0:0.0)

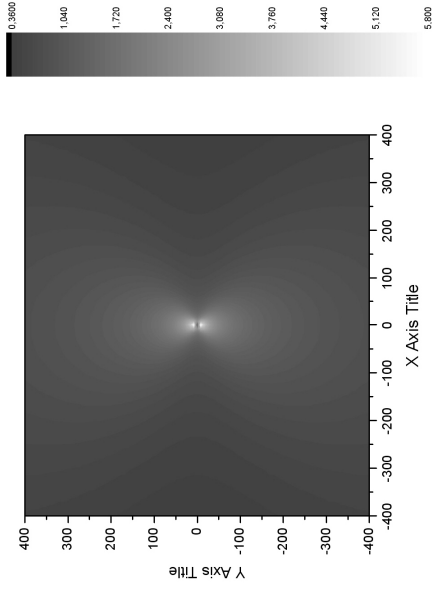
Kirchoff Yaklasikligi Uzak Alan Paterni
 Kirchoff approximation FarField



Uzak Alan Paterni
 FarField Pattern



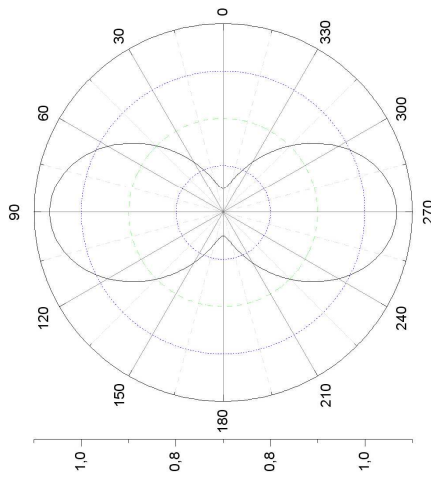
Sacilan Alan, KL=PI, Mash: 800x800
 Scattered Field when KL=PI and Mapping Range=800x800



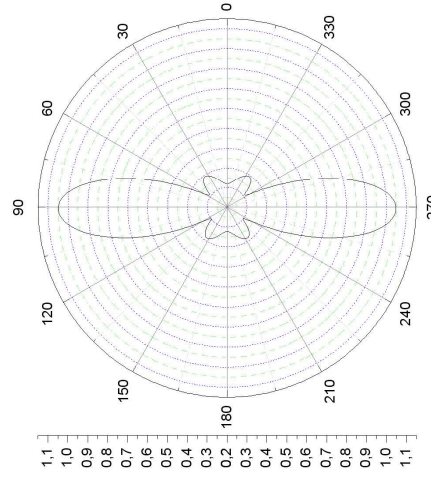
Şekil 5.46

Düzlemsel Dalga Sacilimi
PlaneWave Scattering
KL=2PI, Wave Angle=0degrees, k=1, Length of Strip=2PI (x=-PI,PI y=0.0.0.0)

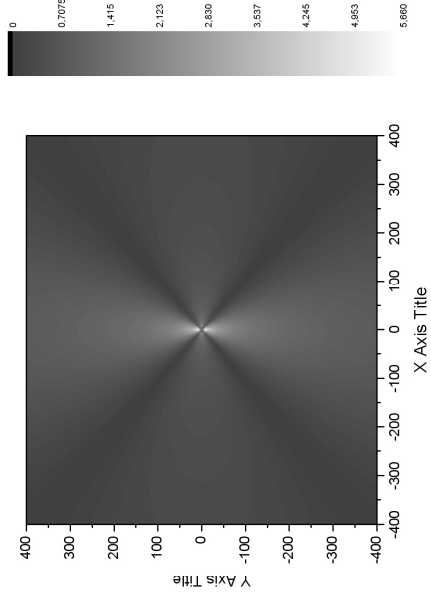
Kirchoff Yaklasikligi; Uzak Alan Paterni
Kirchoff approximation Farfield



Uzak Alan Paterni
Farfield Pattern



Sacilan Alan, KL=2PI, Mash: 800x800
Scattered Field when KL=2PI and Mapping Range=800x800

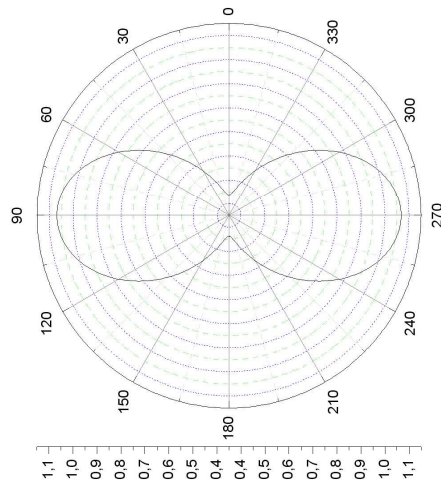


Şekil 5.47

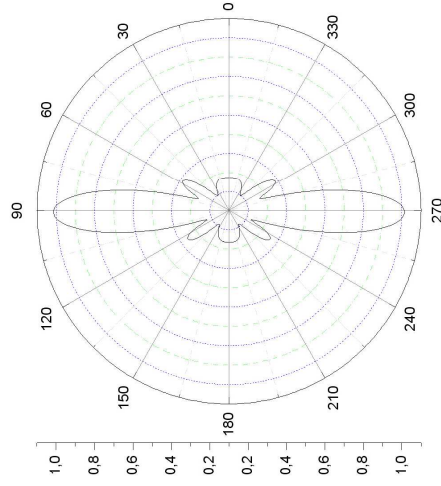
Düzlemsel Dalga Sacilimi
PlaneWave Scattering

KL=3PI, Wave Angle=0degrees, k=1, Length of Strip=3PI (x=-1.5PI,1.5PI,y=0,0,0,0)

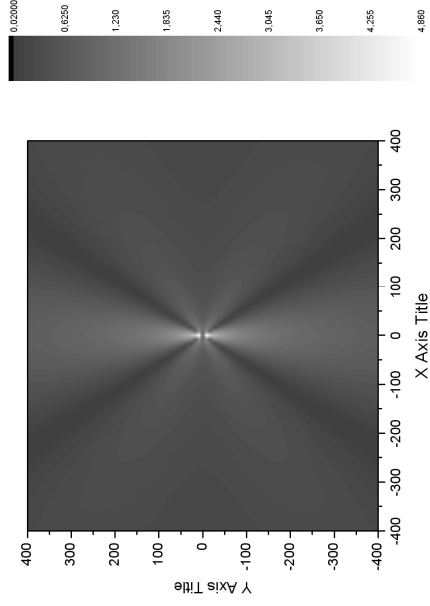
Kirchoff Yaklasikligi Uzak Alan Paterni
 Kirchoff approximation FarField



Uzak Alan Paterni
 FarField Pattern

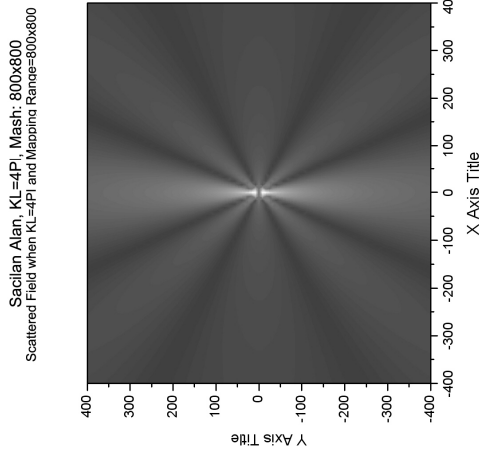
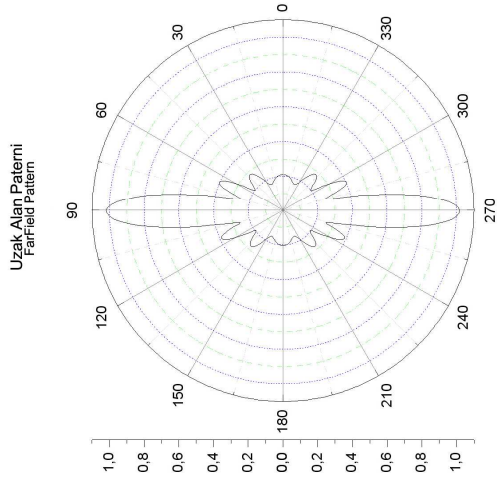
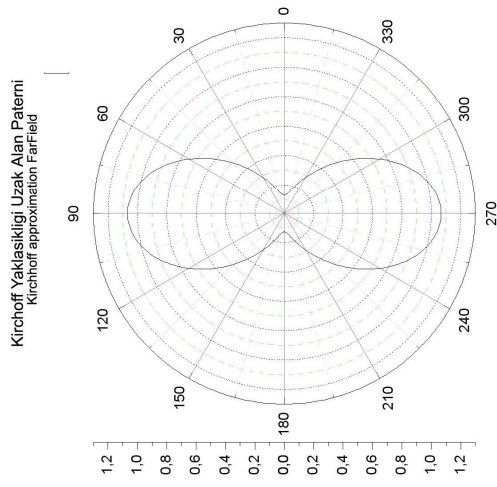


Sacilan Alan, KL=3PI, Mash: 800x800
 Scattered Field when KL=3PI and Mapping Range=800x800



Şekil 5.48

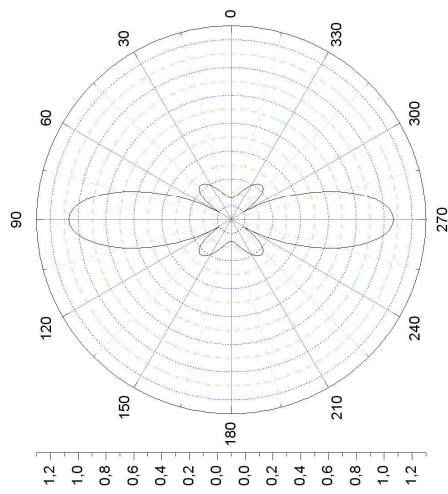
Düzlemsel Dalga Sacilimi
PlaneWave Scattering
KL=4PI, Wave Angle=0degrees, k=1, Length of Strip=4PI (x=-2PI:2PI y=0.0:0.0)



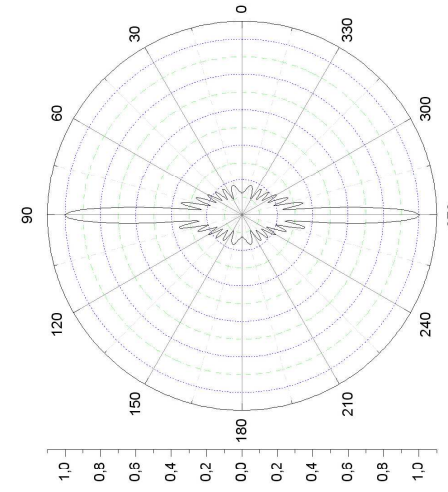
Şekil 5.49

Düzlemsel Dalga Saçilimi
PlaneWave Scattering
 KL=8.5PI, Wave Angle=0degrees, k=1, Length of Strip=8.5PI (x=-4.25PI:4.25PI y=0:0.0.0)

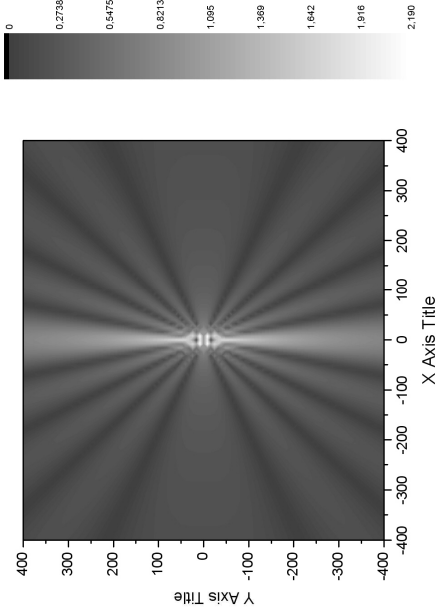
Kirchoff Yaklaşıklığı Uzak Alan Paterni
 Kirchoff approximation FarField



Uzak Alan Paterni
 FarField Pattern



Sacilan Alan, KL=8.5PI, Mash: 800x800
 Scattered Field When KL=8.5PI and Mapping Range=800x800

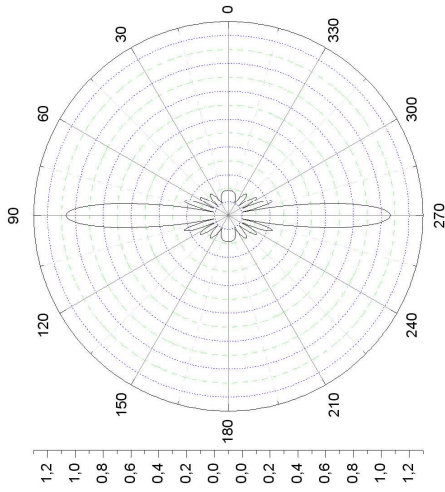


Şekil 5.50

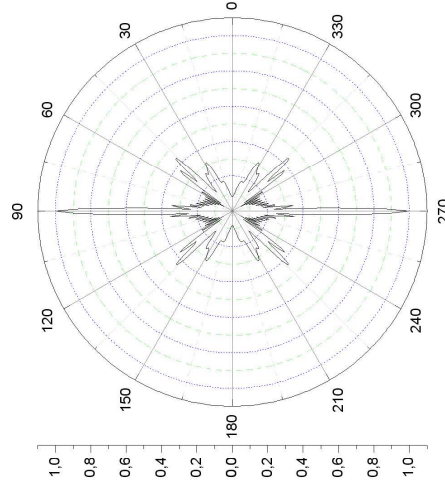
Düzlemsel Dalga Sacilimi PlaneWave Scattering

KL=20PI, Wave Angle=0degrees, k=1, Length of Strip=20PI (x= -10PI;:10PI y=0.0.0.0)

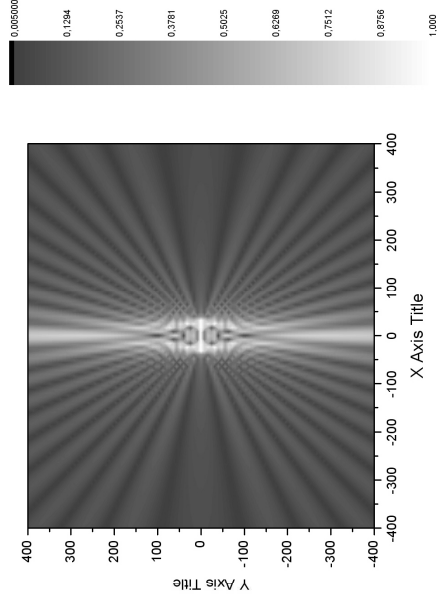
Kirchoff Yaklasikligi Uzak Alan Paterni
Kirchhoff approximation FarField



Uzak Alan Paterni



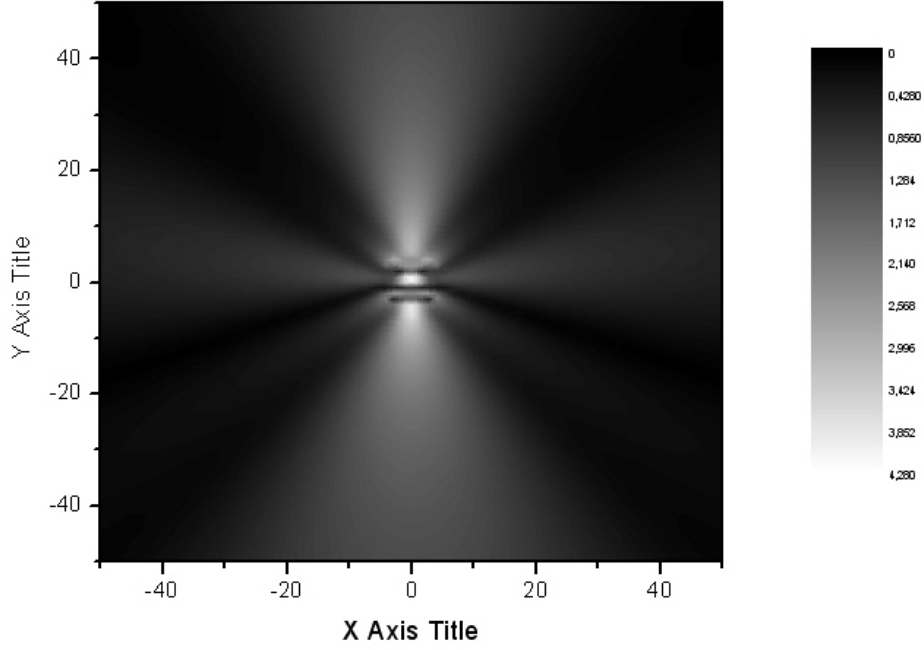
Sacilan Alan, KL=20PI, Mash: 800x800
Scattered Field when KL=20PI and Mapping Range=800x800



Şekil 5.51

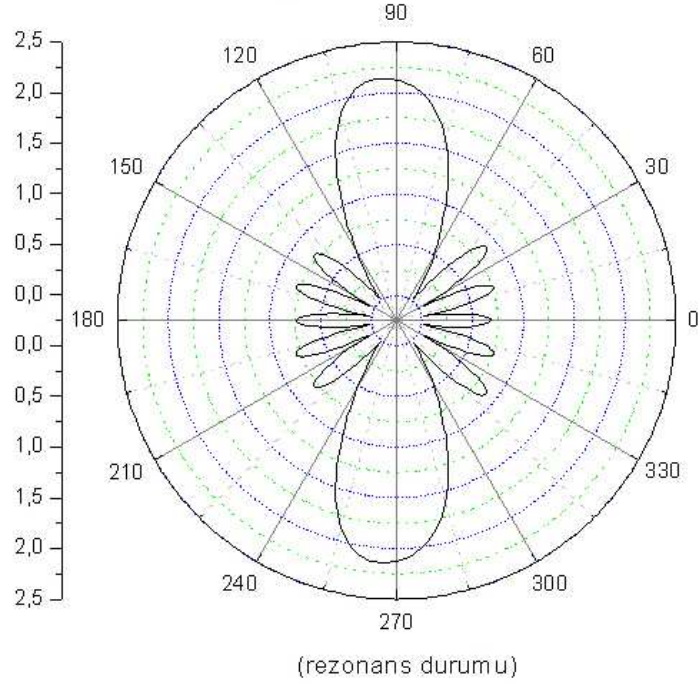
5.5.2. İki adet Şerit için Uzak Alan Grafikleri

Sacılan Orta Alan Grafiği, Kaynak:Düzlemsel Dalga, Dalga Acisi=0
k=1 L1=2PI L2=2PI Mesafe:2PI Cozum Araligi=100x100 - rezonans



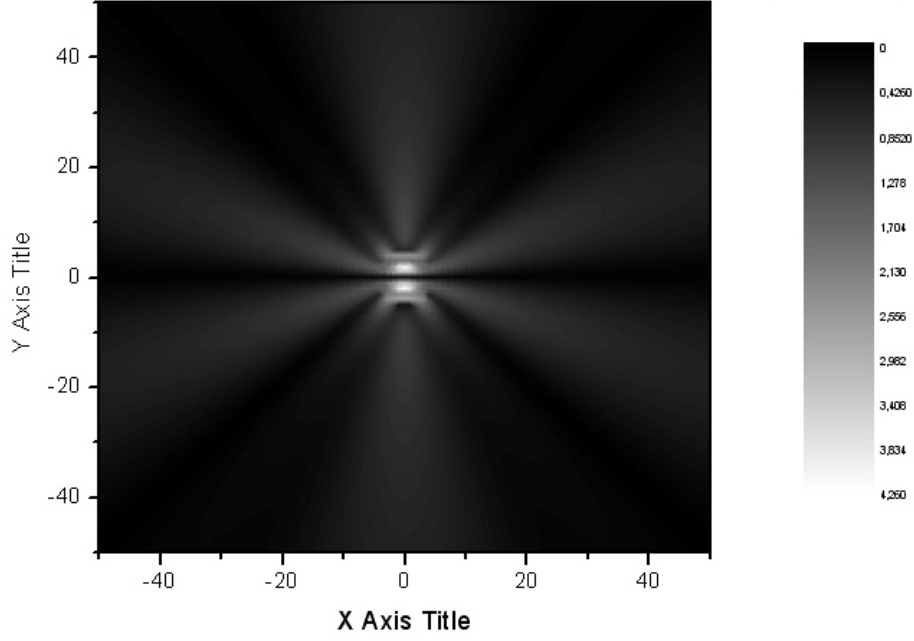
Şekil 5.52

Uzak Alan Grafiği - L1=2PI L2=2PI Mesafe=2PI k=1



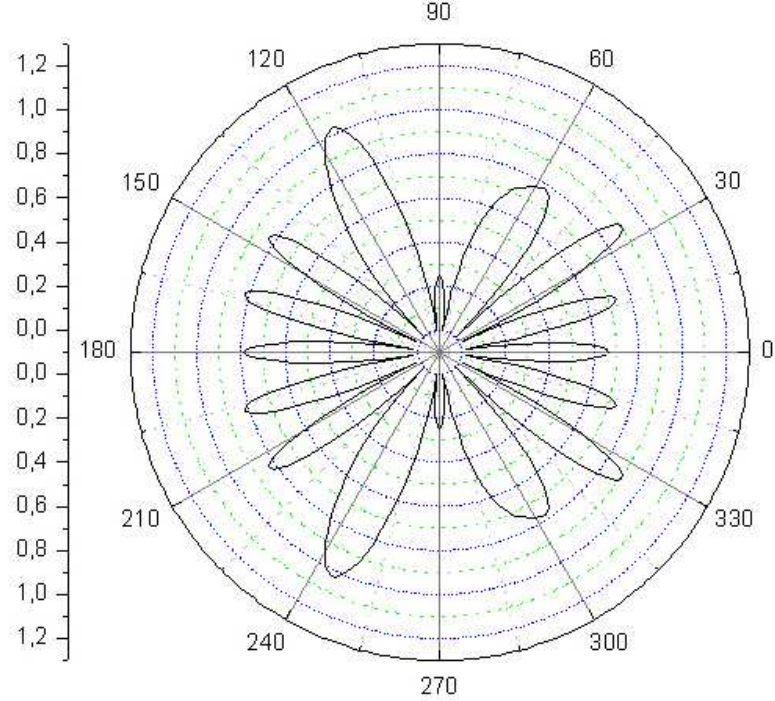
Şekil 5.53

Sacilan Orta Alan Grafigi, Kaynak:Düzlemsel Dalga, Dalga Acisi=0
k=1 L1=2PI L2=2PI Mesafe=2.25PI Cozum Araligi=100x100 (rezonans yok)



Şekil 5.54

Uzak Alan Grafigi - L1=2PI L2=2PI Mesafe=2.25PI k=1

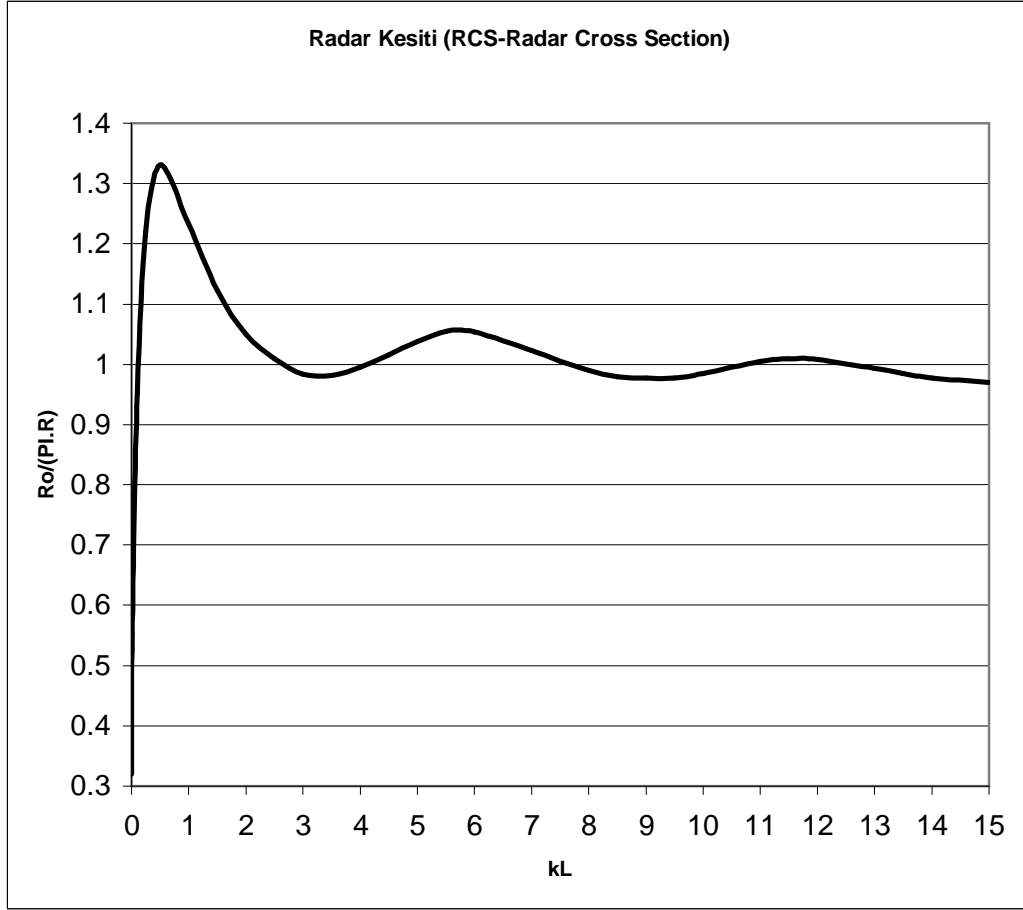


(rezonans olmayan durum)

Şekil 5.55

5.6. RADAR KESİTİ (RCS-RADAR CROSS SECTION)

GRAFİKLERİ



††††Şekil 5.56

Yukarıdaki radar kesit grafiği $kL=0.001-15$ aralığında 1-15 aralığı için $0.5kL$ 'lik adım aralıkları ile alınmıştır. kL değeri sonsuza doğru giderken sönümlü bir osilasyon eğrisi ile karşılaşılmaktadır.

†††† Karşılaştırma için bakınız: Electromagnetics, Edward J.Rothwell Michigan State University – Michael J.Cloud Lawrence Technological University, CRC Press Boca Raton London New York Washington, D.C. pagenumber: 411 Figure:5.6 Monostatic radar cross-section of a conducting sphere.

KAYNAKLAR

[1] Yu.A.Tuchkin. Wave Scattering by unclosed cylindrical screen of arbitrary profile with Dirichlet Boundary Condition. – Soviet Physics Doclady, 1985, v.30, p.p.1027-1030

[2] Yu.A.Tuchkin. Wave Scattering by unclosed cylindrical screen of arbitrary profile with Neumann Boundary Condition. – Soviet Physics Doclady, 1987, v.32, p.p.213-216

[3] M.Arbamowitz, I.A.Stegun. Handbook of Mathematical Functions. – Dover Publication Inc. Ninth Printing, 1972.

[4] Oleg A. Tretyakov. Evolutionary Approach to Electromagnetics in Time Domain - Faculty of Radio Physics, Kharkov State University, 1998.

[5] David C.Lay. Linear Algebra and Its Applications – University of Maryland – Addison Wesley Publishing Company.

[6] Cam Nguyen. Analysis Methods for RF, Microwave, and Millimeter-Wave Planar Transmission Line Structures, John Wiley & Sons, Inc., 2000.

[7] Edward J. Rothwell - Michael J. Cloud Lawrence - Michigan State University East Lansing, Michigan - Technological University Southfield, Michigan, 2001.

[8] Yu.A.Tuchkin. Regularization of boundary value problem of wave diffraction by toroidal screen of arbitrary profile. – Electrodynamics of open structure of millimeter and submillimeter wave range. – publishing house of IRE Acad. Sci. The Ukrain SSSR, Kherkov, 1990 (in Russian)

[9] Chi Y.Lo. Boundary Value Problems – World Scientific Publishing Co., 2000.

[10] Ivar Stakgold. Green's Functions and Boundary Value Problems – Department of Mathematical Sciences University of Delaware Newark – A Wiley-Interscience Publication

[11] A.V. Bitsadze. Equations of Mathematical Physics Translated From Russian. Mir Publishers Moscow, 1980.

[12] U.H. Gerlach. Linear Mathematics in Infinite Dimensions, Signals Boundary Value Problems and Special Functions - Columbus, Ohio, January 24, 2004

[13] C.A. Balanis. Advanced Engineering Electromagnetics. – John Wiley & Sons, 1989.

[14] C. Su - Scattering from Perfectly Conducting Strips by Utilizing an Adaptive Multiscale Moment Method. Dept. of Applied Math. Northwestern Polytechnical Univ. Xian, Shaanxi, P.R. China, 1998.

[15] Atef Z. Elsherbeni, Senior Member, IEEE, Mohamed H. Al Sharkawy, and Samir F. Mahmoud, Senior Member, IEEE Electromagnetic Scattering From a 2-D Chiral Strip Simulated by Circular Cylinders for Uniform and Nonuniform Chirality Distribution IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 52, No. 9, September 2004.

[16] Zhongsheng Zhang and David A. Rabson. Diagnosis and location of pinhole defects in tunnel junctions using only electrical measurements Department of Physics, PHY 114, University of South Florida, Tampa, Florida 33620 - October 2003

[17] A V Boby, D V Shantsev, Y M Galperin, T H Johansen, M Baziljevich¹ and S F Karmanenko. Relaxation of transport current distribution in a YBaCuO strip studied by magneto-optical imaging. Published 11 December 2001

[18] Ahmet Serdar Türk. Sonlu Kalınlıklı Sonsuz Uzun Mükemmel İletken Silindirik Cisimlerden Skaler Dalga Saçılması – T.C. Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik Fakültesi ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Gebze 1998.

[19] Fatih Dikmen. Sonsuz İnce Mükemmel İletken Dairesel Halkadan Skaler Dalga Saçılması – T.C. Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik Fakültesi ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Gebze 1998.

[20] Eylem Özkan. Sonsuz İnce ve Sonlu Uzunluktaki Silindir Sisteminden Skaler Dalga Kırınımı – T.C. Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik Fakültesi ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Gebze 2001

[21] Eylem Özkan. Scaler Wave Diffraction by Perfectly Soft Thin Circular Cylinder of Finite Length; Analytical Regularization Method, Tubitak publish p:459-472 2002.

[22] D.Colton, R.Kress. Integral Equation methods in scattering theory. Wiley, 1983.

[23] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery - Numerical Recipes in C++ The Art of Scientific Computing Cambridge University Press 2002

[24] Arfken, G. "Nonhomogeneous Equation--Green's Function," "Green's Functions--One Dimension," and "Green's Functions--Two and Three Dimensions." §8.7 and §16.5-16.6 in Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, pp. 480-491 and 897-924, 1985.

[25] Science-Wolfram. Wolfram Web Resource, <http://www.wolframscience.com/> © 1999 CRC Press LLC, © 1999-2006 Wolfram Research, Inc.

[26] MathWorld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/> © 1999 CRC Press LLC, © 1999-2006 Wolfram Research, Inc.

[27] MathWorld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/> © 1999 CRC Press LLC, © 1999-2006 Wolfram Research, Inc.

[28] Donald R.Wilton, Senior Member, IEEE, S.M. Rao, Allen1. Glisson, Member, IEEE, Daniel H.Schaubert, Senior Member, IEEE. M.Al-Bundak and Chalmers.

Butler, Fellow IEEE - Potential Integrals for Uniform and Linear Source Distributions on Polygonal and Polyhedral Domains, IEEE Publication p.276-281 march 1984.

[29] Bjarne Stroustrup. The C++ Programming Language(Third Edition) - AddisonWesley An Imprint of Addison Wesley Longman, Inc. 1997

[30] Michael Alan Forman. Active Antenna Arrays for Power Combining and Communications B.S. University of Colorado, 1996 M.S., University of Colorado, 1998

[31] Stanley B.Lippman - Josée Lajoie. C++ Premier Publisher: Addison Wesley. AT&T, Objectwrite, Inc. Third Edition March 26, 1998

[32] Stanley B.Lippman - Essential C++ Publisher : Addison Wesley Pub Date : September 12, 2002

[33] The Code Project - Free Source Code and Tutorials for Windows developers. Programming help for Visual C++, Windows, MFC, C++, GUI, ASP, XML, UML, SOAP, ATL, VB, ADO, SQL, Copyright © CodeProject, 1999-2006.

ÖZGEÇMİŞ

Deniz ELMASLI , 07.12.1979 tarihinde İzmir’de dünyaya gelmiştir. İlk öğrenimini İzmir Müdafai Hukuk ve Mustafa Reşit Paşa İlkokullarında tamamladıktan sonra ortaöğrenimini İzmir Karşıyaka Anadolu Lisesi’nde, lise öğrenimi İzmir Çınarlı Anadolu Teknik Lisesi Elektronik Bölümü’nde tamamlamıştır. Üniversite Lisans öğrenimini Marmara Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Bölümü’nde tamamlayan Deniz ELMASLI, özel sektörde ağır sanayiye yönelik olarak faaliyet gösteren bir firmada Kalite Yöneticiliği ve Satış Mühendisliği görevlerini sürdürmektedir.

Deniz ELMASLI’ya ulaşabilmek için;

Email:

elmasli@gmail.com

delmasli@gmail.com

web:

www.dronology.com

EK-1

Parametrizasyon

Parametrizasyon işleminde temel olarak amaçlanan a ve b uçlarındaki iki ifadeyi belirli bir aralığa minimize etmek ve işlemleri bu aralıklar dahilinde yapmaktır. Ortogonal Polinomlardan Chebyshev Polinomları ve Gauss-Quadratic Formülleri kombinasyonları $[-1,1]$ aralığında etkin sonuçlar vermektedir. Aşağıda genel olarak parametrik fonksiyon tanımlaması yapılmıştır:



Şekil Ek-1.1

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(t) = Ct + D \\ \left. \begin{aligned} t = a &\rightarrow \eta = A = Ca + D \\ t = b &\rightarrow \eta = B = Cb + D \end{aligned} \right\} C, D = ? \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$a = -1 \quad ; \quad b = 1 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} -C + D &= A & C - D &= -A \\ C + D &= B & C + D &= B \\ 2D &= A + B & 2C &= B - A \\ D &= \frac{A + B}{2} & C &= \frac{B - A}{2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ifadeleri elde edilir ve buradan;

$$\eta(t) = \frac{B - A}{2}t + \frac{B + A}{2} \quad (1.4)$$

parametrik ifadesine ulaşılır.

EK-2

R^2 Uzay İçin Regularize Green Fonksiyonunu Eldesi

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z) \quad (2.1)$$

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!} \quad (2.2)$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \left[\ln \frac{z}{2} + \gamma \right] - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (2.3)$$

$$-\frac{i}{4} Y_0(z) = \frac{1}{2\pi} J_0(z) \left[\ln \frac{z}{2} + \gamma \right] - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (2.4)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| \right) + \frac{1}{2\pi} J_0(z) \left[\ln \frac{z}{2} + \gamma \right] - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| + \frac{1}{2\pi} J_0(z) \cdot \ln \left| \frac{z}{2} \right| - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| + \frac{1}{2\pi} J_0(z) \cdot \gamma - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| + \left(\frac{1}{2\pi} J_0(z) \cdot \ln \left| \frac{z}{2} \right| - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| \right) + \frac{1}{2\pi} J_0(z) \cdot \gamma - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| (J_0(z) - 1) + \frac{1}{2\pi} J_0(z) \cdot \gamma - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (2.8)$$

$$-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z}{2} \right| (J_0(z) - 1) + \frac{1}{2\pi} J_0(z) \cdot \gamma - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (2.9)$$

eğer $z = 0$; $|q - p| = 0$ $q = p \rightarrow \vartheta$

$$-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \ln(l'\vartheta) + \frac{1}{2\pi} J_0(z) \cdot \gamma - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}}{m!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right] \quad (2.10)$$

$$l'\theta = \left\{ [x'(\vartheta)]^2 + [y'(\vartheta)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

EK-3

Kararlı türdeki Hankel Fonksiyonundan R^2 Uzay İçin
Regularize Green Fonksiyonunu Eldesi

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z) \quad (3.1)$$

$0 < z \leq 8$ için:

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \quad ; -8 \leq z \leq 8$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{z}{2} \right) J_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \quad ; 0 < z \leq 8 \quad (3.2)$$

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z) \quad ; 0 < z \leq 8$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \gamma J_0(z) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} J_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \quad (3.3)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \ln |z| - \frac{2}{\pi} \ln |z| \right) + \frac{2}{\pi} \gamma J_0(z) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} J_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \quad (3.4)$$

$$= \frac{2}{\pi} \ln |z| + \frac{2}{\pi} \ln |z| J_0(z) - \frac{2}{\pi} \ln |z| - \ln 2 J_0(z) + \frac{2}{\pi} \gamma J_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \quad (3.5)$$

$$= \frac{2}{\pi} \ln |z| + \frac{2}{\pi} \ln |z| (J_0(z) - 1) + \left(\frac{2}{\pi} \gamma J_0(z) - \ln 2 J_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \right) \quad (3.6)$$

$$Y_0^R(z) = \frac{2}{\pi} \ln |z| (J_0(z) - 1) + \left(\frac{2}{\pi} \gamma J_0(z) - \ln 2 J_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n} \left(\frac{z}{8} \right) \right) \quad (3.7)$$

$z \geq 5$ için:

$$J_0(z) + iY_0(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(z-\pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n^* \left(\frac{5}{z}\right) \quad ; z \geq 5 \quad c_n = R(c_n) + iI(c_n) \quad (3.8)$$

$$Y_0^R(z) = Y_0(z) - \frac{2}{\pi} \ln|z| \quad (3.9)$$

$$H_0^{(1)R}(z) = H_0^{(1)}(z) - i\frac{2}{\pi} \ln|z| \quad (3.10)$$

Sonuç olarak:

$$|q - p| = z \quad (3.11)$$

$$G(q, p) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(z) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)R}(z) + \frac{1}{2\pi} \ln|z| \quad (3.12)$$

$$G(q, p) = \frac{1}{2\pi} \ln|z| - \frac{i}{4} H_0^{(1)R}(z) \quad (3.13)$$

EK-4

Bessel, Neumann ve Hankel Fonksiyonlarının Katsayı

Değerleri^{††††}

1) $-8 \leq x \leq 8$ için

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{2n}\left(\frac{x}{8}\right) \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{x}{2}\right) J_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n}\left(\frac{x}{8}\right) \quad (4.1)$$

$-8 \leq x \leq 8$

$0 < x \leq 8$

n	a_n
0	0.157727971474890000000
1	-0.00872344235285222000
2	0.26517861320333600000
3	-0.37009499387264900000
4	0.15806710233209700000
5	-0.03489376941140880000
6	0.00481918006946760000
7	-0.00046062616620627500
8	0.00003246032882100500
9	-0.00000176194690776215
10	0.00000007608163592419
11	-0.00000000267925353056
12	0.00000000007848696314
13	-0.00000000000194383469
14	0.00000000000004125321
15	-0.00000000000000075885
16	0.00000000000000001222
17	-0.00000000000000000017

n	b_n
0	-0.02150511144965750000
1	-0.27511813304351800000
2	0.19860563470255400000
3	0.23425274610902100000
4	-0.16563598171365000000
5	0.04462137954066920000
6	-0.00693228629152318000
7	0.00071911740375230300
8	-0.00005392507972293930
9	0.00000307649328810848
10	-0.00000013845718123009
11	0.00000000505105436909
12	-0.00000000015258285043
13	0.00000000000388286747
14	-0.00000000000008442875
15	0.00000000000000158748
16	-0.00000000000000002608
17	0.00000000000000000038

tablo 4.1

^{††††} Matmematical functions and their approximations, Yudell L.Luke, University of Missouri – Academic Press 1975, page:345

2) $x \geq 5$ için

$$J_0(x) + iY_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(x-\frac{\pi}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n^* \left(\frac{5}{x}\right); \quad x \geq 5$$

(4.2)

$$c_n = R(c_n) + il(c_n)$$

n	$R(c_n)$
0	0.99898808985896500000
1	0.00133842854997185000
2	0.00031878987806189200
3	0.00000851123221065665
4	0.00000069154234913894
5	0.00000009077010153734
6	0.00000000145492807929
7	0.00000000092676248672
8	0.00000000013916619797
9	0.00000000000323797518
10	0.000000000000253535729
11	0.000000000000055909032
12	0.000000000000004191896
13	0.000000000000000873316
14	0.0000000000000000361861
15	0.0000000000000000059438

n	$I(c_n)$
0	0.01233152057854410000
1	0.01224949628125940000
2	0.00009649418499342280
3	0.00001365557049035680
4	0.00000085180664442635
5	0.00000002724405341355
6	0.00000000964642133771
7	0.00000000068334751799
8	0.00000000006062738000
9	0.000000000002169571634
10	0.000000000000230489890
11	0.000000000000012255390
12	0.000000000000009231372
13	0.0000000000000001677838
14	0.0000000000000000075375
15	0.00000000000000000046244

5		
1		-
6	0.000000000000000000964	
1		-
7	0.0000000000000000002436	
1		-
8	0.0000000000000000000789	
1		-
9	0.0000000000000000000125	
2		-
0	0.000000000000000000002	
2		-
1	0.000000000000000000008	
2		-
2	0.000000000000000000003	

5		
1		-
6	0.00000000000000000015906	
1		-
7	0.00000000000000000002500	
1		-
8	0.0000000000000000000015	
1		-
9	0.00000000000000000000135	
2		-
0	0.0000000000000000000044	
2		-
1	0.0000000000000000000007	

tablo 4.2

EK-5

Chebyshev Polinomları Geri Elde Edilim (Back Recurrence)

formülleri^{§§§§}

$$T_n(x) = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x), \quad U_n(x) = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} P_n^{(1/2, 1/2)}(x) \quad (5.1)$$

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad U_n(x) = \operatorname{cosec}\theta \sin(n+1)\theta, \quad x = \cos \theta \quad (5.2)$$

$$T_{2n}(\sin \theta) = (-1)^n \cos 2n\theta, \quad T_{2n+1}(\sin \theta) = (-1)^n \sin(2n+1)\theta \quad (5.3)$$

$$U_{2n}(\sin \theta) = \frac{(-1)^n \cos(2n+1)\theta}{\cos \theta}, \quad U_{2n+1}(\sin \theta) = \frac{(-1)^n \sin(2n+2)\theta}{\cos \theta} \quad (5.4)$$

$$T_n(x) = {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, n \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2}\right] = (-1)^n {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, n \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1+x}{2}\right] \quad (5.5)$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2} n \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

$$T_n(x) = (-1)^n {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, n \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x^2\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, n \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| 1-x^2\right] \quad (5.7)$$

^{§§§§} Mathematical functions and their approximations, Yudell L.Luke University of Missouri
Academic Press 1975 page 484-485

$$T_{2n}(x) = T_n(2x^2 - 1) \quad (5.8)$$

$$T_{2n+1}(x) = (-1)^n (2n+1)x {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| x^2\right) = x {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| 1-x^2\right) \quad (5.9)$$

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0 \quad (5.10)$$

$$2^n \left(\frac{1}{2}\right)_n T_n(x) = (-1)^n (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 T_n(x)}{dx^2} - \frac{xdT_n(x)}{dx} + n^2 T_n(x) = 0 \quad (5.12)$$

$$(1-x^2) \frac{dT_n(x)}{dx} = n[T_{n-1}(x) - xT_n(x)] \quad (5.13)$$

$$y_n(x) = AT_n(x) + BU_n(x)$$

$$y_{n+1}(x) = 2xy_n(x) - y_{n-1}(x) \quad n > 0 \quad (5.14)$$

$$T_1(x) = xT_0(x) = x, \quad U_1(x) = 2xU_0(x) = 2x$$

$$y_{2n+2}(x) = 2(2x^2 - 1)y_{2n}(x) - y_{2n-2}(x), \quad n > 0$$

$$T_2(x) = (2x^2 - 1)T_0(x) = 2x^2 - 1 \quad (5.15)$$

$$U_2(x) = (4x^2 - 1)U_0(x) = 4x^2 - 1$$

$$y_{2n+3}(x) = 2(2x^2 - 1)y_{2n+1}(x) - y_{2n-1}(x), \quad n > 0$$

$$T_3(x) = 2(2x^2 - 1)T_1(x) - T_1(x) = (4x^3 - 3)T_1(x) = 4x^3 - 3x \quad (5.16)$$

$$U_3(x) = 2(2x^2 - 1)U_1(x) = 8x^3 - 4x$$

$$2T_m(x)T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x) \quad (5.17)$$

$$2(x^2 - 1)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x) = T_{m+n}(x) - T_{|m-n|}(x) \quad (5.18)$$

$$2T_m(x)U_{n-1}(x) = U_{n+m-1}(x) + U_{n-m-1}(x), \quad n > m \quad (5.19)$$

$$2T_n(x)U_{m-1}(x) = U_{n+m-1}(x) - U_{n-m-1}(x), \quad n > m \quad (5.20)$$

$$T_m(x)U_n(x) - U_m(x)T_n(x) = T_1(x)U_{n-m-1}(x), \quad n > m \quad (5.21)$$

EK-6

Sonsuz İnce ve Sonlu Uzunluktaki Şerit Sisteminden Skaler

Dalga Saçılmasına yönelik C++ Kaynak Kodları

Program toplam Green Fonksiyonu, Matris çözücü Gauss Eleminasyon, Saçılan Alan, Regularizasyon başlıkları altında toplam 21 sınıftan (başlıktan dosyasından) oluşmaktadır. Burada başlık dosyalarından kritik olan 7 dosyaya açıklamalarıyla birlikte yer verilmiştir.

Ek-6.1 Gauss-Quadratic Başlık Dosyası “Header File”

```
#ifndef TTGAUSSQUADRATIC_H_
#define TTGAUSSQUADRATIC_H_

/*****
 *          Gauss-Quadratic Formülleri by Deniz ELMASLI          *
 * Fourier Chebshev kökleri Gauss-Quadratic Formüllerinin      *
 * kullanılması ile hesaplanabilir. Bu sınıfta Gauss-          *
 * Quadratic formülleri için kullanılan 1D (1 boyutlu) ve      *
 * 2D(iki boyutlu) formüller bulunmaktadır.                    *
 * Versiyon 1.6                                                *
 * Yayın Tarihi      : 13.03.2006   -   01:18 Pazartesi        *
 * Revizyon Tarihi: 11.05.2006   -   22:00 Perşembe           *
 * Platform - Ide   : Code::Blocks v1.0                        *
 * web: www.dronology.com          *
 *****/

*/

#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include "TArray1D.h"
#include "TTChebshev.h"
```

```

#include "TTGreen.h"
#include "TTFunctors.h"
#include "TTPlane.h"
#define PI 3.141592653589793238462643383279502884197

template <class FuncObject, class ValueType>
class TTGaussQuadratic
{
public:
    ValueType Quad(FuncObject func, ValueType n);
    void FourierCheb1D(FuncObject ValueOnStrip, int NodeNumber,
int OrderNo, TTStrip<ValueType> Strip, TArr1D<complex<ValueType> >
&ArrayOfChebyshevCoeff);
    void FourierCheb2D(FuncObject Kernel, int NodeNumber, int
OrderNo1, int OrderNo2, TTStrip<ValueType> Strip,
TArr2D<complex<ValueType> > &ArrayOfChebyshevCoeff);

};

// Temel Gauss Quadratic Formülü.
template <class FuncObject, class ValueType>
ValueType Quad(FuncObject func, ValueType n)
{
    double sum=0.0;
    for (int k=1;k<=n; ++k)
    {
        sum = sum + func(cos(((2*k-1.0)*PI/(2*n))));
    }
    return (PI/n)*sum;
}

```

```

// 1 Boyutlu Fourier-Chebyshev Gauss Quadratic Formülü.
// Giriş parametresi functor sınıfından cisim üzerindeki dalga
// değeri fonksiyonu, nod sayısı, hal sayısı ve obje olarak
// cisimdir. Çıkış karmaşık değerli dizi dönüşü ile yapılmaktadır.
template <class FuncObject, class ValueType>
void FourierCheb1D(FuncObject ValueOnStrip, int NodeNumber, int
OrderNo, TTStrip<ValueType> Strip, TArr1D<complex<ValueType> >
&ArrayOfChebyshevCoeff)
{
    complex<ValueType> sum=(0.0,0.0);
    TArr1D<ValueType> nodes (1, NodeNumber, "TArr : nodes");
    for (int l=1; l<=NodeNumber; ++l)
    {
        nodes(l) = cos(((2.0*(l)-1.0)*PI/(2*(NodeNumber))));
    }

    for (int i=1; i<=NodeNumber; ++i)
    {
        sum = sum + ValueOnStrip(Strip, nodes(i)) *
NormalizedTn(nodes(i) , OrderNo);
    }
    ArrayOfChebyshevCoeff(OrderNo) = sum*(PI/NodeNumber);
}

```

```

// 2 Boyutlu Fourier-Chebyshev Gauss Quadratic Formülü.
// Giriş parametresi functor sınıfından çekirdek değer fonksiyonu,
// nod sayısı, hal sayısı ve obje olarak cisimdir. Çıkış karmaşık
// değerli dizi dönüşü ile yapılmaktadır.
template <class FuncObject, class ValueType>
void FourierCheb2D(FuncObject Kernel, int NodeNumber, int OrderNo1,
int OrderNo2, TTStrip<ValueType> Strip, TArr2D<complex<ValueType> >
&ArrayOfChebyshevCoeff)
{
    complex<ValueType> sum=(0.0,0.0);

    TArr1D<ValueType> nodes (1, NodeNumber, "TArr : nodes");
    for (int l=1; l<=NodeNumber; ++l)
    {
        nodes(l) = cos(((2.0*(l)-1.0)*PI/(2*(NodeNumber))));
    }

```

```

}

for (int i=1; i<=NodeNumber; ++i)
{
    for (int j=1; j<=NodeNumber; ++j)
    {
        sum = sum + Kernel(Strip, nodes(i), nodes(j)) *
NormalizedTn(nodes(i), OrderNo1) * NormalizedTn(nodes(j), OrderNo2);
    }
}

ArrayOfChebyshevCoeff(OrderNo1,OrderNo2) =
sum*(PI/NodeNumber)*(PI/NodeNumber);
}
//END OF TTGAUSSQUADRATIC_H_
#endif

```

Ek-6.2 Green Fonksiyonu Başlık Dosyası “Header File”

```

#ifndef TTGREEN_H_
#define TTGREEN_H_
#include <complex>
#include "TTBessel.h"
/*****
* 2D (2 boyutlu) Template Green Fonksiyonu Sınıfı
*
* by Deniz ELMASLI
* Exp: TTGreen sınıfı iki noktanın aralarındaki mesafenin
* kullanılması ile çalışan bir fonksiyondur.
* Bessel and Neumann ve bunların toplamı ile bulunan
* Hankel fonksiyonunun kullanılması ile 2boyutlu ortam
* için Green Fonksiyonu elde edilir.
* Versiyon 1.0
* Yayın Tarihi : 17.04.2006 - 20:12 Pazartesi
* Revizyon Tarihi: --.---.----- - --:-- -----
* Platofm Ide : DEV C++ 4.9.9.1, Code::Blocks v1.0
* web: www.dronology.com
*****/
*/

```

```

template <class ValueType>
class TTGreen
{
public:
    typedef ValueType value_type;
    std::complex<ValueType> Green(TTPoint2D<ValueType>
p/*parametrized*/, TTPoint2D<ValueType> q);
private:
    TTbessel <value_type> bessel_;

};

// Green Fonksiyonunda giriş parametresi olarak 2 boyutlu iki nokta
// kullanılır. Bu iki nokta arasındaki mesafe Green Fonksiyonu
// içinde hesap edilerek Hankel fonksiyonu için giriş parametresini
// oluşturur.
template <class ValueType>
std::complex<ValueType>
TTGreen<ValueType>::Green(TTPoint2D<ValueType> p, TTPoint2D<ValueType>
q)
{
    ValueType Real, Imag;
    Real = bessel_.Y0(Distance(p,q))/4.0;
    Imag = -bessel_.J0(Distance(p,q))/4.0;
    return std::complex<ValueType>(Real,Imag);
}

#endif /*END OF TTGREEN_H_*/

```

Ek-6.3 Regularize (Düzgünleştirilmiş) Green Fonksiyonu Başlık

Dosyası “Header File”

```

#ifndef TTGREENR_H_
#define TTGREENR_H_
#include <complex>
#include "TTHankelR.h"

```

```

/*****
*      TTGreenR 2 Boyutlu Regularize Green Fonksiyonu      *
*                  Sınıfı by Deniz ELMASLI                *
* TTGreenR sınıfı, düzgün şerit ve eğrisel şerit için    *
* 2 boyutlu Düzgünleştirilmiş Green sınıfıdır.          *
* Versiyon 1.0                                           *
* Yayın Tarihi   : 17.04.2006 - 22:23 Pazartesi         *
* Revizyon Tarihi: --.---.----- - --:-- -----      *
* Platform - Ide : DEV C++ 4.9.9.1, Code::Blocks v1.0    *
* web: www.dronology.com      *
*****/

*/
template <class ValueType>
class TTGreenR
{
public:
    typedef ValueType value_type;

    std::complex<ValueType> GreenR(TTStrip<ValueType> Strip,
TTPoint2D<ValueType> p/*parametrize*/, TTPoint2D<ValueType>
q/*parametrize*/, ValueType Teta /*parametrize değer*/, ValueType Tao
);

    std::complex<ValueType> GreenRCurvy(TTCurvyStrip<ValueType>
CurvyStrip, TTPoint2D<ValueType> p, TTPoint2D<ValueType> q, ValueType
Teta /*parametrize değer*/, ValueType Tao );

private:
    THankelR <value_type> hankel_;
    complex <value_type> Hankel;
};

//*****
// 2Boyutlu şerit için Regularize Green Fonksiyonu (yüzey
// üzerindeki) karmaşık sayı sonucu verecektir. Giriş parametreleri:
// Şerit (fonksiyonun üzerinde çalıştığı), p 2Dnokta (nokta 1), q
// 2Dnokta (nokta 2), ve Teta-Tao parametric değerleri.

```

```

template <class ValueType>
std::complex<ValueType>
TTGreenR<ValueType>::GreenR(TTStrip<ValueType> Strip,
TTPoint2D<ValueType> p, TTPoint2D<ValueType> q, ValueType Teta
/*parametrize değer*/, ValueType Tao )
{
    ValueType Reel, Imag;
    Hankel = hankel_.H0_reg(Distance(p,q));
    if (Distance(p,q) == 0)
    {
        Reel = (1.0/(2.0*PI))*log(derivedNU(Strip)) +
Hankel.imag()/4.0;
    }
    else
    {
        Reel = (1.0/(2.0*PI))*log(Distance(p,q)) +
Hankel.imag()/4.0 - (1.0/(2.0*PI))*log(abs(Teta-Tao));
    }
    Imag = -Hankel.real()/4.0;
    return std::complex<ValueType>(Reel,Imag);
}

// 2Boyutlu eęisel şerit ięin Regularize Green Fonksiyonu (yüzey
// üzerindeki) karmaşık sayı sonucu verecektir. Giriş parametreleri:
// Eęriselřerit (fonksiyonun üzerinde ęalıřtıęı), p 2Dnokta (nokta
// 1), q 2Dnokta (nokta 2), ve Teta-Tao parametric değerleri.
template <class ValueType>
std::complex<ValueType>
TTGreenR<ValueType>::GreenRCurvy(TTCurvyStrip<ValueType> CurvyStrip,
TTPoint2D<ValueType> p, TTPoint2D<ValueType> q, ValueType Teta
/*parametrize değer*/, ValueType Tao )
{
    ValueType Reel, Imag;
    Hankel = hankel_.H0_reg(Distance(p,q));
    if (Distance(p,q) == 0)
    {
        Reel = (1.0/(2.0*PI))*log(derivedNU(CurvyStrip)) +
Hankel.imag()/4.0;
    }
}

```

```

        else
        {
            Reel = (1.0/(2.0*PI))*log(Distance(p,q)) +
Hankel.imag()/4.0 - (1.0/(2.0*PI))*log(abs(Teta-Tao));
        }
        Imag = -Hankel.real()/4.0;
        return std::complex<ValueType>(Reel,Imag);
    }
#endif /*END OF TTGREENR_H*/

```

Ek-6.4 Regularizasyon (Düzgünleştirme) Başlık Dosyası “Header File”

```

#ifndef TTREGULARIZATION_H_
#define TTREGULARIZATION_H_
/*****
 *          Regularizasyon Formülleri by Deniz ELMASLI          *
 *                                                                 *
 * Versiyon 1.0                                                  *
 * Yayın Tarihi   : 10.05.2006   -   09:51 Çarşamba           *
 * Revizyon Tarihi: --.---.----   -   --:-- -----          *
 * Platform - Ide : Code::Blocks v1.0                          *
 * web: www.dronology.com                                         *
 *****/
*/
#include "TArr1D.h"
#include "TArr2D.h"
#include <complex.h>

template <class ValueType>
class TTRegularization
{
public:
    void NormalizeBN (TArr1D< std::complex <ValueType> > &bn);
    void NormalizeKnm (TArr2D< std::complex <ValueType> > &Arr2D);
    void IdenticalKnm (TArr2D< std::complex <ValueType> > &Arr2D);
    void XN_BackNormalize (TArr1D< std::complex <ValueType> > &XN);
};

```

```

// şapkalı bn 01.05.2006. Normalize Bn fonksiyonu. b0 is
// kök(log2)'ye bölünür ve bn kök(n)'ye bölünür. Dönüş değeri giriş
// parametresinin kendisidir.
template <class ValueType>
void NormalizeBN (TArr1D< std::complex <ValueType> > &bn)
{
    int orderno = bn.HBound();
    for (int i=0; i<orderno; ++i)
    {
        if (i==0)
        {
            bn(i) = bn(i)*sqrt(1.0/log(2.0));
        }
        else
        {
            bn(i) = bn(i)*sqrt(ValueType(i));
        }
    }
}

// şapkalı kmn 01.05.2006. Normalize kmn fonksiyonu. k00
// kök(log2)^2 ye bölünmektedir ve kmn ise kök(n)*kök(m)'e, k0n
// kök(log2)*kök(n) ve km0 da kök(m)0 kök(log2)'ye bölünmektedir.
template <class ValueType>
void NormalizeKnm (TArr2D< std::complex <ValueType> > &Arr2D)
{
    int orderno = Arr2D.HBound1();
    for (int i=0; i<orderno; ++i)
    {
        for (int j=0; j<orderno; ++j)
        {
            if (i==0 && j==0)
            {
                Arr2D(i,j) =
Arr2D(i,j)*sqrt((1.0/log(2.0))*sqrt(1.0/log(2.0)));
            }
            else if (i==0 && j>0)
            {
                Arr2D(i,j) =
Arr2D(i,j)*(sqrt(1.0/log(2.0))*abs(sqrt(ValueType(j))));
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    else if (i>0 && j==0)
    {
        Arr2D(i,j) =
Arr2D(i,j)*(sqrt(1.0/log(2.0))*abs(sqrt(ValueType(i))));
    }
    else
    {
        Arr2D(i,j) =
Arr2D(i,j)*(abs(sqrt(ValueType(i)))*abs(sqrt(ValueType(j))));
    }
}
}

//*****
// knm'in kompakt bölümüne identical (özdeş) bölümün eklenmesi.
//*****
template <class ValueType>
void IdenticalKnm (TArr2D< std::complex <ValueType> > &Arr2D)
{
    int orderno = Arr2D.HBound1();
    for (int i=0; i<orderno; ++i)
    {
        Arr2D(i,i) = Arr2D(i,i) + complex<ValueType>(1.0,0.0);
    }
}

//*****
//şapkalı (normalize) yn, xn'e eşitleyen fonksiyon.
//*****
template <class ValueType>
void XN_BackNormalize (TArr1D< std::complex <ValueType> > &XN)
{
    int orderno = XN.HBound();
    for (int i=0; i<orderno; ++i)
    {
        if (i==0)
        {

```

```

        XN(i) = XN(i)/sqrt(1.0/log(2.0));
    }
    else
    {
        XN(i) = XN(i)/sqrt(ValueType(i));
    }
}

#endif /*END OF TTREGULARIZATION_H_*/

```

Ek-6.5 Functor (Fonksiyon Objeler) Başlık Dosyası “Header File”

```

#ifndef TTFUNCTORS_H_
#define TTFUNCTORS_H_

/*****
 *          TTFunctors Template Class
 *          by Deniz ELMASLI
 * Functorlar (Fonksiyon Objeler) birçok sınıfın üye
 * fonksiyonlarının giriş parametreleri olarak
 * kullanılmaktadır. Genel anlamda cisim üzerindeki düzlem-
 * sel dalga değeri functorlar vasıtasıyla farklı sınıfla-
 * rın giriş parametreleri olarak hesaplanır. Sınıf üye
 * fonksiyonları da farklı tipte functorları kullanabilecek
 * şekilde yapılandırılmışlardır.
 *
 * Version 1.2
 * Creation Date: 09.04.2006      -      18:34 Sunday
 * Revision Date: 30.04.2006     -      14:12 Sunday
 * Ide(s) : Code Blocks v1.0
 * web: www.dronology.com
 *****/

*/

#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <cmath>

```

```

#include <complex>
#include "TTGreenR.h"
#include "TTGreen.h"
#define PI 3.141592653589793238462643383279502884197

// Cisim üzerindeki Düzlemsel Dalga Değeri. Giriş parametresi cisim
// ve omega (nokta) değeri. Parametrize Şerit fonksiyonu ile elde
// edilen 2D noktası Euler fonksiyonu içinde işlenmekte ve sonuç
// olarak complex değer elde edilmektedir.
template <class ValueType>
class PlaneWaveOnStrip{
public:
    complex<ValueType> operator((const TTStrip<ValueType> &Strip,
ValueType omega)
    {
        TTStrip<ValueType> Strip_;
        ValueType Angle = 0.0; //Açı*PI
        ValueType k=1.0;
        TTPoint2D<ValueType> Point;
        Strip_.ParaStrip(Strip, omega, Point);
        return (complex<ValueType>
(cos(k*(Point.Coord1()*cos(Angle*PI)+Point.Coord2()*sin(Angle*PI))*PI)
,
sin(k*(Point.Coord1()*cos(Angle*PI)+Point.Coord2()*sin(Angle*PI))*PI))
);
    }
};

// Cisim üzerindeki Düzlemsel Dalga Değeri. Şerit ile benzer çalışma
// prensibine sahip olan Eğri Şerit versiyonu.
template <class ValueType>
class PlaneWaveOnCurvyStrip{
public:
    complex<ValueType> operator((const TTCurvyStrip<ValueType>
&CurvyStrip, ValueType omega)
    {
        ValueType alfa, beta;
        TTCurvyStrip<ValueType> Curvy_;
        alfa = CurvyStrip.getalfa();
        beta = CurvyStrip.getbeta();
    }
};

```

```

ValueType Angle = 0.0; //Angle*PI
ValueType k=1.0;
TTPoint2D<ValueType> Point;
Curvy_.ParaCurvyStrip(CurvyStrip, omega, Point);
return (complex<ValueType>
(cos(k*(Point.Coord1()*cos(Angle*PI)+Point.Coord2()*sin(Angle*PI))*PI)
,
sin(k*(Point.Coord1()*cos(Angle*PI)+Point.Coord2()*sin(Angle*PI))*PI))
);
}
};

```

*// Çekirdek fonksiyonu (functor'u) Cisim üzerindeki Regülerize Green
// fonksiyonunu çalıştıran ve verilen noktasal değerlere göre GreenR
// fonksiyonundan complex değer dönüşü yapan functor.*

```

template <class ValueType>
class Kernel{
public:
complex<ValueType> operator((const TTStrip<ValueType> &Strip,
ValueType omegal, ValueType omega2)
{
complex<ValueType> GreenComp;
TTGreenR<ValueType> green;
TTStrip<ValueType> Strip_;

TTPoint2D<ValueType> pointU, pointV;
Strip_.ParaStrip(Strip, omegal, pointU);
Strip_.ParaStrip(Strip, omega2, pointV);
GreenComp = green.GreenR(Strip, pointU, pointV, omegal, omega2);
return GreenComp;
}
};

```

```

// Çekirdek fonksiyonun (functor'u) Eğri şerit için geçerli olan
// versiyonu.
template <class ValueType>
class KernelCurve{
public:
    complex<ValueType> operator((const TTCurvyStrip<ValueType>
&CurvyStrip, ValueType omegal, ValueType omega2)
    {
        complex<ValueType> GreenComp;
        TTGreenR<ValueType> green;
        TTCurvyStrip<ValueType> CurvyStrip_;

        TTPoint2D<ValueType> pointU, pointV;
        CurvyStrip_.ParaCurvyStrip(CurvyStrip, omegal, pointU);
        CurvyStrip_.ParaCurvyStrip(CurvyStrip, omega2, pointV);
        GreenComp = green.GreenRCurvy(CurvyStrip, pointU, pointV,
omegal, omega2);
        return GreenComp;
    }
};

// Cisim üzerindeki Noktasal kaynak Değerini Açık Green fonksiyonunu
// kullanarak bulan aracı fonksiyon functor.
template <class ValueType>
class PointSourceOnStrip{
public:
    complex<ValueType> operator((const TTStrip<ValueType> &Strip,
TTPoint2D<ValueType> PointQ, ValueType omega)
    {
        TTGreen<ValueType> green;
        TTStrip<ValueType> Strip_;
        TTPoint2D<ValueType> Point;
        ValueType k=1.0;
        Strip_.ParaStrip(Strip, omega, Point);

        return green.Green(PointQ,Point);
    }
};
#endif /*END OF TTFUNCTIONS_H_*/

```

Ek-6.6 Saçılan Alan Fonksiyon Sınıfı (Scattered Field) Başlık Dosyası

“Header File”

```
#ifndef TTSCATTEREDFIELD_H_
#define TTSCATTEREDFIELD_H_

/*****
 *                      Saçılan Alan Formülleri                      *
 *                      by Deniz ELMASLI                          *
 *                                                                *
 * Versiyon 1.0                                                  *
 * Yayın Tarihi      : 18.06.2006 - 16:00 Pazar                  *
 * Revizyon Tarihi: 00.00.0000 - 00:00 -----                  *
 * Platform - Ide   : Code::Blocks v1.0                          *
 * web: www.dronology.com                                          *
 *****/

*/

#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include "TTArray1D.h"
#include "TTChebyshev.h"
#include "TTGreen.h"
#include "TTFunctors.h"
#include "TTPlane.h"
#define PI 3.141592653589793238462643383279502884197

template <class ValueType>
class TTScatteredfield
{
public:

        complex<ValueType> ScatteringField(TTStrip<ValueType> Strip,
TTPoint2D<ValueType> p, int NodeNumber, int OrderNo, TArr1D<
std::complex <ValueType> > &X);

};
```

```

// Bu fonksiyon saçılan alanın hesaplanması için Gauss-Quadratic
// formülleri kullanılmasıyla oluşturulur. Tn'deki hal numarası olan
// n Fourier formülünün en büyük hal sayısına eşittir.
template <class ValueType>
    complex<ValueType> ScatteringField(TTStrip<ValueType> Strip,
    TTPoint2D<ValueType> p, TArr1D< std::complex <ValueType> > &X,
    ValueType Resolution, ValueType k, ValueType Angle)
    {
        TTGreen <ValueType> greens;
        int order = X.HBound();
        complex<ValueType> sum=(0.0,0.0);
        TArr1D<ValueType> nodes (1, order*4, "TArr : nodes");
        TArr1D<ValueType> nodex (1, order*4+1, "TArr : nodex");
        //order*4 yapılmasının nedeni daha düzgün bir sonuç elde edilmesi
        içindir.
        nodex(1)=-1.0;
        for (int l=1; l<=order*4; ++l)
        {
            nodes(l) = cos(((2.0*(l)-1.0)*PI/(2*(order*2))));
            nodex(l+1) = nodex(l)+(0.5/order);
        }

        for (int i=1; i<=order*4; ++i)
        {
            TTPoint2D<ValueType> pointTT;
            Strip.ParaStrip(Strip, nodes(i), pointTT);
            TTPoint2D<ValueType> pointCC;
            Strip.ParaStrip(Strip, nodex(i), pointCC);

            if (Distance(p,pointCC) < Resolution/2)
            {
                return (-1.0*Plane(Strip,nodex(i),k,Angle));
            }
            else
                sum = sum + XN(nodes(i), X) * greens.Green(p,pointTT);
        }
        return sum*(PI/order);
    }

//END OF TTSCATTEREDFIELD_H_
#endif

```

Ek-6.7 Uzak Alan – Kirchhoff Uzak Alan Fonksiyon Sınıfı (Scattered

Field) Başlık Dosyası “Header File”

```
#ifndef TTFARFIELD_H_
#define TTFARFIELD_H_
/*****
 *          Uzak Alan ve Kirchhoff Uzak Alan Formülleri          *
 *                  by Deniz ELMASLI                            *
 *                                                                 *
 * Versiyon 1.0                                                *
 * Yayın Tarihi      : 18.06.2006   - 15:54 Pazar                *
 * Revizyon Tarihi: 00.00.0000   - 00:00 -----                *
 * Platform - Ide(s) : Code::Blocks v1.0                        *
 * web: www.dronology.com                                       *
 *****/
*/

#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include "TArray1D.h"
#include "TTChebyshev.h"
#include "TTGreen.h"
#include "TTFunctors.h"
#include "TTPlane.h"
#define PI 3.141592653589793238462643383279502884197

template <class FuncObject, class ValueType>
class TTFarfield
{
public:
    complex<ValueType> FarField(TTStrip<ValueType> Strip, TArray1D<
std::complex <ValueType> > &X, ValueType k, ValueType PhiAngle);
    complex<ValueType> KirchhoffFarField(TTStrip<ValueType> Strip,
ValueType k, ValueType PhiAngle, ValueType Angle, int orderno);
};
```

```

// Uzak Alan Hesaplama Formülleri. Hesaplama derece cinsinden
// 360derecelik Scalada yapılmaktadır. Uzak alanın hesaplanması için
// cisim (Şerit) Üzerindeki akım yoğunluğu ve eksponent euler
// (cosx+isinx) kullanılmaktadır.
template <class ValueType>
  complex<ValueType> FarField(TTStrip<ValueType> Strip, TArr1D<
std::complex <ValueType> > &X, ValueType k, ValueType PhiAngle)
  {
    int order = X.HBound();
    complex<ValueType> sum=(0.0,0.0);
    TArr1D<ValueType> nodes (1, order, "TArr : nodes");
    TTPoint2D<ValueType> pointTT;

    for (int l=1; l<=order; ++l)
    {
      nodes(l) = cos(((2.0*(l)-1.0)*PI/(2*(order*2))));
    }

    for (int i=1; i<=order; ++i)
    {
      Strip.ParaStrip(Strip, nodes(i), pointTT);
      complex<ValueType> Euler(
cos(k*(cos(PhiAngle*PI/180.0)*pointTT.Coord2()+sin(PhiAngle*PI/180.0)*
pointTT.Coord1()*PI) ,
sin(k*(cos(PhiAngle*PI/180.0)*pointTT.Coord2()+sin(PhiAngle*PI/180.0)*
pointTT.Coord1()*PI) );
      sum = sum + XN(nodes(i), X)*Euler;
    }

    return sum*(PI/(order));
  }

// Kirchhoff Yaklaşıklığına gore Uzakalan Hesaplama Formülleri.
// Hesaplama derece cinsinden 360derecelik Scalada yapılmaktadır.
// Uzak alanın hesaplanması için cisim (Şerit) üzerindeki akım
// yoğunluğu Kirchhoff Yaklaşıklığına göre gelen alanın -2 katı
// olarak Kabul edilir. Integrasyon için rectangular (dikdörtgen)
// integrasyon formülü kullanılmaktadır.

```

```

template <class ValueType>
  complex<ValueType> KirchoffFarField(TTStrip<ValueType> Strip,
  ValueType k, ValueType PhiAngle, ValueType Angle, int orderno)
  {
    int order = orderno;
    complex<ValueType> sum=(0.0,0.0);
    complex<ValueType> Current=(0.0,0.0);
    TArr1D<ValueType> nodes (1, order, "TArr : nodes");

    TTPoint2D<ValueType> pointTT;
    //diktörtgen integrasyon
    ValueType h;
    //2.0 is [-1,1] paramertik şerit aralığı
    h=(2.0)/order;

    for (double i=-1.0; i<=1.0; i=i+h)
    {
      Strip.ParaStrip(Strip, (-1.0+(i-1.0/2.0)*h), pointTT);
      complex<ValueType> Euler(
cos(k*(cos(PhiAngle*PI/180.0)*pointTT.Coord2()+sin(PhiAngle*PI/180.0)*
pointTT.Coord1())*PI) ,
sin(k*(cos(PhiAngle*PI/180.0)*pointTT.Coord2()+sin(PhiAngle*PI/180.0)*
pointTT.Coord1())*PI) );
      Current = -PlaneWave(pointTT,k,Angle);
      sum = sum + Euler*(-Current-Current);
    }
    // Kirchoff Yaklaşımına göre cisim üzerindeki(şerit) akım
    // yoğunluğu -2 x gelen alan
    return sum*h;
  }

//END OF TTFARFIELD_H_
#endif

```

