

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONLARI:
TEORİSİ, SIFIRLARI VE SAYISAL
ALGORİTMALAR

Ali ŞANLI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2002

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONLARI:
TEORİSİ, SIFIRLARI VE SAYISAL
ALGORİTMALAR

Ali ŞANLI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Dr. Igor PETRUSENKO

GEBZE
2002

.....' ın tez çalışması G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun tarih ve sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE :
(Tez Danışmanı)

ÜYE :

ÜYE :

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun tarih ve sayılı kararı

İmza / Mühür

ÖZET

Kros-çarpım Bessel fonksiyonları özellikle elektro-manyetik olmak üzere birçok fiziksel problemlerde karşımıza çıkar. Bu fonksiyonların önemine rağmen, bilinen referanslar, hesaplanmaları için etkili yöntemler hakkında bilgi sağlamamaktadırlar. Bu çalışmada ana amaç, fonksiyonların daha tatmin edici şekilde hesaplanmasına olanak sağlayan matematiksel bağıntıların türetilmesidir. Sunulan yeni seri gösterimleri, fonksiyonların ve sıfırlarının hesaplanmasına baz teşkil etmektedir.

Yeni seri gösterimler sayısal algoritmalar ile irdelenmiştir. Bulunan sonuçlar ve hata payları tablolaştırılmış ve grafiklerle görselleştirilmiştir. Sonuçlar göstermektedir ki, sunulan hesaplama metodları, fonksiyonların ve sıfırlarının hesaplanmasında yüksek hassasiyet sağlamaktadırlar.

SUMMARY

We face with the cross-product Bessel functions in many physical problems especially in electro-magnetics. Although their importance, known references does not contain useful information for effective calculation of these functions. In this work, the main objective is deriving mathematical relationships permitting more satisfactory evaluation of the cross-product Bessel functions. Supplied new series representations serve a basis for calculation of the functions and their zeros.

These representations are evaluated with numerical algorithms. Found results and error-bounds on calculation are tabulated and visualized with graphs. Results show that, supplied calculation methods gives high accuracy on calculation of the cross-product Bessel functions and zeros.

TEŞEKKÜR

Gerek tez konusu seçiminde, gerek tezin hazırlanması sırasında esirgemediği yardım ve tavsiyeleri için değerli tez danışmanım Dr. Igor PETRUSENKO' ya, değerli destekleri için hocam Prof. Dr. Tahir ALİYEV' e ve diğer emeği geçen tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
 GİRİŞ	 1
 BÖLÜM 1: KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONLARININ ANALİTİK İNCELENMESİ	
1.1. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin integral gösterimleri	6
1.2. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin birinci türden seri gösterimleri	13
1.3. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin ikinci türden seri gösterimleri	17
1.4. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin düzgün asimtotik açılımları	24
1.5. Kros-çarpım Bessel fonksiyonlarının sıfırları	32
 BÖLÜM 2: KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONU ve TÜREVLERİNİN SAYISAL OLARAK HESAPLANMASI	
2.1. Hesaplama teknikleri	39
2.2. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin hesapları için göreceli hata tabloları	41
2.3. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin hesapları için göreceli hata grafikleri	45

BÖLÜM 3: KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONU ve TÜREVLERİNİN GRAFİKLERİ	49
BÖLÜM 4: KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONLARININ UYGULAMALARI	
4.1. Kapalı $\rho \in [r, R]$ aralığı için Sturm-Liouville problemi	53
SONUÇLAR	60
EKLER	
Ek 1. Birinci tip Bessel fonksiyonunun hesaplama yöntemleri	61
Ek 2. Birinci tip Bessel fonksiyonunu hesaplama için örnek programlar	67
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	77

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
1.1. $P_v(x, y)$ fonksiyonu integral gösteriminin kontur çizgileri	7
 HESAPLAMALAR İÇİN GÖRECELİ HATA GRAFİKLERİ	
2.1. $P_v(x, y)$ fonksiyonu	46
2.2. $P_v'(x, y)$ fonksiyonu	46
2.3. $\dot{P}_v(x, y)$ fonksiyonu	47
2.4. $\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonu	47
2.5. $\ddot{P}_v(x, y)$ fonksiyonu	48
2.6. $\frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonu	48
 KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONU ve TÜREVLERİNİN GRAFİKLERİ	
2.7. $P_v(x, y)$ fonksiyonu	50
2.8. $P_v'(x, y)$ fonksiyonu	50
2.9. $\dot{P}_v(x, y)$ fonksiyonu	51
2.10. $\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonu	51
2.11. $\ddot{P}_v(x, y)$ fonksiyonu	52
2.12. $\frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonu	52

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONU ve TÜREVLERİNİN SERİ GÖSTERİMLERİNİN ASİMTOTİK TAHMİN TABLOLARI	
1.1.Neumann serilerinin (I) genel teriminin asimtotik tahminleri	16
1.2.Neumann serilerinin (II) genel teriminin asimtotik tahminleri	23
HESAPLAMALAR İÇİN GÖRECELİ HATA TABLOLARI	
2.1. $P_v(x, y)$ fonksiyonu	42
2.2. $P_v'(x, y)$ fonksiyonu	42
2.3. $\dot{P}_v(x, y)$ fonksiyonu	43
2.4. $\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonu	43
2.5. $\ddot{P}_v(x, y)$ fonksiyonu	44
2.6. $\frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonu	44
Ek.1.Birinci tip Bessel fonksiyonu hesaplama teknikleri için göreceli hata tablosu	66

GİRİŞ

Kros-çarpım Bessel fonksiyonlarının dört kombinasyonu,

$$\begin{aligned} P_\nu(x, y) &\equiv J_\nu(x)N_\nu(y) - J_\nu(y)N_\nu(x) \\ P'_\nu(x, y) &\equiv J'_\nu(x)N_\nu(y) - J_\nu(y)N'_\nu(x) \\ \dot{P}_\nu(x, y) &\equiv J_\nu(x)N'_\nu(y) - J'_\nu(y)N_\nu(x) \\ \ddot{P}_\nu(x, y) &\equiv J'_\nu(x)N'_\nu(y) - J'_\nu(y)N'_\nu(x) \end{aligned}$$

daireesel ve silindirik geometri içeren birçok fiziksel problemlerde düzenli olarak karşımıza çıkar [1]. Burada (') işareti argümanlara göre türevi, $J_\nu(x)$ ve $N_\nu(x)$ de sırasıyla birinci tip ve ikinci tip Bessel fonksiyonlarını temsil etmektedir

Bessel fonksiyonları dendiğinde, Bessel diferansiyel eşitliği denilen,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

denkleminin çözümleri anlaşılır. Burada x, ν kompleks sayılardır. Bessel diferansiyel denklemi Frobenious metodu olarak adlandırılan [1]

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\nu}, \quad (a_0 \neq 0)$$

şeklinde bir seri açılımının belirsiz katsayıları ve türevlerinin Bessel denkleminde yerine konması ile çözülebilir. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra özel bir çözüm [1, 2],

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$

şeklinde bulunur. Bu fonksiyon ν dereceden birinci tip Bessel fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer ν değeri bir tamsayı değilse, ikinci lineer bağımsız çözüm eşitlikte ν yerine $-\nu$ konması ile,

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(-\nu + m + 1)}$$

şeklinde bulunur. Sonuçta eğer ν değeri bir tamsayı değilse, Bessel denklemi için genel çözüm,

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \quad (x \neq 0)$$

formundadır.

Ancak, ν değeri bir tamsayı ise ikinci çözüm lineer bağımlı hale gelir. Bu nedenle ikinci bir lineer bağımsız çözümün bulunması gereklidir. Bu özel çözüm ν derecesinden ikinci tip Bessel fonksiyonu olarak adlandırılır [1, 2] ve

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)]$$

şeklinde yazılır. Çözümün Wronskian' ı [1, 2],

$$J_\nu(x)N'_\nu(x) - J'_\nu(x)N_\nu(x) = \frac{2}{\pi x}$$

dır. Sonuç olarak Bessel denkleminin tüm ν değerleri için genel çözümü,

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)$$

olarak yazılabilir. Ek olarak, Bessel fonksiyonunun reel x değerleri için kompleks olan çözümleri [1, 2],

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x); \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

şeklinde dir. Bu lineer bağımsız çözümler ν dereceden üçüncü tip Bessel fonksiyonları ya da sırasıyla birinci tip, ikinci tip Hankel fonksiyonları olarak adlandırılırlar.

Bessel fonksiyonları şu rekürans bağıntılarını sağlarlar: [1-3]

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z_{\nu}(x)$$

$$Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2Z'_{\nu}(x)$$

$$Z'_{\nu}(x) = Z_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Z_{\nu}(x)$$

$$Z'_{\nu}(x) = -Z_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Z_{\nu}(x)$$

burada Z , katsayıları x ve ν den bağımsız olan J , Y , $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ fonksiyonlarından herhangi birini ya da bu fonksiyonların herhangi bir lineer kombinasyonunu temsil etmektedir.

Ek olarak, kros-çarpım Bessel fonksiyonları şu rekürans bağıntılarını sağlarlar: [3]

$$P_{\nu+1} - P_{\nu-1} = -\frac{2\nu}{a} \dot{P}_{\nu} - \frac{2\nu}{b} P'_{\nu}$$

$$\dot{P}_{\nu+1} + P'_{\nu} = \frac{\nu}{a} P_{\nu} - \frac{\nu+1}{b} P_{\nu+1}$$

$$P'_{\nu+1} + \dot{P}_{\nu} = \frac{\nu}{b} P_{\nu} - \frac{\nu+1}{a} P_{\nu+1}$$

$$\ddot{P}_{\nu} = \frac{1}{2} P_{\nu+1} + \frac{1}{2} P_{\nu-1} - \frac{\nu^2}{ab} P_{\nu}$$

$$P_{\nu} \ddot{P}_{\nu} - \dot{P}_{\nu} P'_{\nu} = \frac{4}{\pi^2 ab}$$

Bu fonksiyonlar birçok elektro-manyetik problemlerde karşımıza çıkar. Örneğin, dörtgensel dalga rehberlerindeki elektro-manyetik alanların yapısal modellemesi ve dairesel ark içindeki H veya E düzlemlerinin sürekli eğimlenmiş mikro şeritleri (rehberlerin düzgün kıvrımları olarak söylenen) kros-çarpım Bessel fonksiyonlarının yardımı ile açıklanabilir.

Düzgün kıvrımlardaki dalga yayılma problemi, çeşitli yöntemlerde ele alınmıştır. (çalışmaların bir kısmına ait yararlı referanslar [4-10] da verilmiştir) Bunlardan çoğu, eğimli rehber teorisinin anahtar problemi olan eğimli bölgelerin etkili bir model çözümünün elde edilmesi için geliştirilmiştir.

Yaklaşık model çözümler, pertürbasyon analizi yardımıyla türetilmiştir. Başlangıç özdeğer probleminin eşdeğer özdeğer matris denkleminin çevriminin orijinal yöntemi [7]' de ele alınmıştır. Radyal mod fonksiyonunun adımsal

yaklaşım yöntemi ile hesaplanması da [8]' de uygulanmıştır. Yerel mod yöntemlerine göre, [9] kıvrımdaki alan, yerel doğrusal dalga rehberlerinin modlarının süper pozisyonları yardımıyla açıklanır. Temel gönyeleştirilmiş kıvrımlı dalga rehberleriyle düzgün kıvrımın adımsal bir yaklaşımı da [10]' da ele alınmıştır. Tüm bu çalışmalarda, başlangıç sınır değer probleminin dönüşümü, kros-çarpım Bessel fonksiyonlarının hesaplanmasının zorluğundan kaçınmak için yapılmıştır.

Nano-yapısal teknolojideki son gelişmeler, ilgiyi elektron dalga rehberlerindeki kıvrımların dağıtıcı özelliklerine çekmiştir. [11,12] Bu çalışmalarda, model problem sayısal olarak çözülmüştür. Dalga fonksiyonları, dalga rehberi bölgesinde pürüzlü dörtgensel olmayan tuzak yardımıyla, Schrödinger eşitliğine ayırma tekniğinin uygulanması ile hesaplanmıştır.

Elektrik akımını, manyetik akıyı ya da dairesel metal tüp (R ve r yarıçaplı, $R > r$) içindeki saf sinüzodal alternatif akımının endüktans etkisinden kaynaklanan enerji kaybını hesaplarken neticede aşağıdaki,

$$\begin{aligned} P_{p,n+p}(k\rho, kR) &= J_n(k\rho)N_{n+p}(kR) - J_{n+p}(kR)N_n(k\rho) \\ P_{n+p,n}(k\rho, kR) &= J_{n+p}(k\rho)N_n(kR) - J_n(kR)N_{n+p}(k\rho) \end{aligned}$$

n dereceden silindirik fonksiyonların ifadelerini irdelemek gereklidir. [13] Bu ifadelerde k değeri $(w\mu\sigma i)^{1/2}$ kuvveti için bir kısaltmayı, $w = 2\pi f$ değeri zaman kanunu ile $(\exp(-iwt))$ uygulanan alternatif akımın açısal frekansını, μ , sabitlenmemiş mutlak geçirgenliği, σ tüpün yapıldığı maddenin metalik iletkenliğini göstermektedir.

Diğer basit bölgelerin öz fonksiyonlarına ters olarak, kros-çarpım Bessel fonksiyonları yetersiz tablolaştırılmıştır. (Örneğin, çok bilinen kılavuzlarda bulunmamaktadır [3, 12])

Kros-çarpım Bessel fonksiyonlarının direk hesaplanması büyük zorluk taşır. Son örneğe bakılırsa, n indisinin daha yüksek değerleri için $x_i^{1/2}$ argümanına göre J_n and N_n fonksiyonlarını veren tablolar mevcut değildir. Kuşkusuz, büyük n değerleri için Debye' nin yarı-yakınsak geliştirmeleri bazı avantajlarla kullanılabilir. Ancak, burada zorluk için ikinci ve daha önemli bir

sebebi P_ν fonksiyonunun direk hesaplanmasının zorluğudur. Pratik olarak çoğu durumda iki yarıçap değeri R ve r , arasındaki fark çok azdır ve Bessel fonksiyonlarının çarpımlarının farklarının doğru irdelenmesi için tüm fonksiyon değerlerinin hassas şekilde belirlenmesi gereklidir.

Yine, bilimsel hesaplamaların bilinen sistemleri ve program kütüphaneleri, problemi basit şekilde çözmek için, kompleks indisli silindirik fonksiyonların hesaplanmalarında yol gösterememektedirler.

Bundan dolayı, kros-çarpım Bessel fonksiyonlarının ve sıfırlarının istenen hassasiyetle irdelenmesi, matematiksel fizik için ana bir problem teşkil etmektedir.

Bu çalışmada, Bessel denkleminin başlangıç iki nokta özdeğer probleminin analitik çözümü üzerine yoğunlaşmıştır. Ana amaç, kros-çarpım Bessel fonksiyonlarının daha tatmin edici irdelenmesine olanak sağlayan matematiksel bağıntıları türetmektir. Yeni seri gösterimler ve düzgün yakınsamalar, modellenen problemin etkili sayısal çözümlerinin bulunmasına baz teşkil etmektedir.

BÖLÜM 1. KROS-ÇARPIM BESSEL

FONKSİYONLARININ ANALİTİK İNCELENMESİ

1.1. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin integral gösterimleri

$\alpha = \frac{x}{y}$ değerinin $0 < \alpha \leq 1$ aralığında tanımlı pozitif ve reel bir sayı

olduğu varsayalım. Verilen değişim aralığı, fonksiyona uygunluk açısından seçilmiştir ve elde edilen genel sonuçları etkilememektedir. Gerçekten, değişkenlerin yerdeğişimi ve yeniden isimlendirilmesiyle, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$P_\nu(\tilde{x}, \tilde{y}) = -P_\nu(x, y)$$

Burada,

$$0 < \frac{x}{y} \leq 1 \quad \text{ve} \quad 1 \leq \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} < \infty$$

dir.

Bilindiği gibi [15], $P_\nu(x, y)$ fonksiyonu x, y parametreleri ve ν indisine göre çift bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} P_{-\nu}(x, y) &= P_\nu(x, y) \\ P_\nu(-x, -y) &= P_\nu(x, y) \end{aligned}$$

Bundan başka, aşağıdaki sonuçlardan hemen görüleceği üzere, x, y kompleks değerleri için tam fonksiyondur.

$P_\nu(x, y)$ fonksiyonunun integral gösterimi için, ikinci tip Bessel fonksiyonunun yardımı ile,

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} [J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)], \quad z = x, y$$

aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$P_v(x, y) = -\frac{1}{\sin(v\pi)} [J_v(x)J_{-v}(y) - J_v(y)J_{-v}(x)] \quad (1.1)$$

Genelleştirilmiş Neumann formülüne göre, Bessel fonksiyonlarının çarpımları aşağıdaki formüllerle tanımlanır;

$$J_v(x)J_{-v}(y) = \frac{e^{-iv\pi}}{2\pi} \int_{\beta}^{2\pi+\beta} e^{iv\phi} J_0(\eta) d\phi \quad (1.2)$$

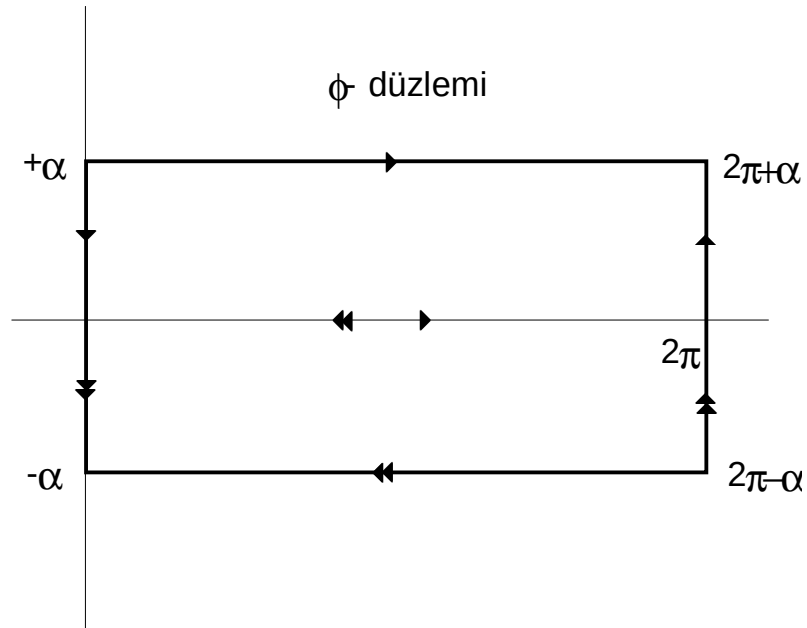
$$J_v(y)J_{-v}(x) = \frac{e^{-iv\pi}}{2\pi} \int_{-\beta}^{2\pi-\beta} e^{iv\phi} J_0(\eta) d\phi \quad (1.3)$$

burada $\beta = i \cdot \ln \frac{y}{x}$ ve $\eta = (x^2 + y^2 - 2xy \cos \phi)^{1/2}$ dir. [16]

(1.2) ve (1.3) integrallerinin (1.1) formülü içinde yerine konması ile,

$$P_v(x, y) = -\frac{e^{-iv\pi}}{2\pi \sin(v\pi)} \left[\int_{\beta}^{2\pi+\beta} e^{iv\phi} J_0(\eta) d\phi + \int_{2\pi-\beta}^{-\beta} e^{iv\phi} J_0(\eta) d\phi \right]$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, integral limitlerinin değişimi için, Cauchy (analitik fonksiyonlar için) integral teoremi uygulanır. (Şekil 1.1).



Şekil.1.1. Kontur çizgileri.

Boylamsal parçalardaki integraller birbirini karşılar ve bunun sonucunda,

$$P_v(x, y) = -\frac{e^{-iv\pi}}{2\pi \sin(v\pi)} \left[-\int_{-\beta}^{\beta} e^{iv\phi} J_0(\eta) d\phi + \int_{2\pi-\beta}^{2\pi+\beta} e^{iv\phi} J_0(\eta) d\phi \right] \quad (1.4)$$

eşitliğine varılır. İkinci integralde, $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ değişkeninin, yeni değişken $\phi \rightarrow -i\phi$, ile yerdeğişimi yardımıyla, ilgilenilen fonksiyonun basit bir gösterimi elde edilir.

$$P_v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\ln \frac{y}{x}}^{\ln \frac{y}{x}} e^{v\phi} J_0(w) d\phi \quad (1.5)$$

Burada $w = (x^2 + y^2 - 2xy \cosh \phi)^{1/2}$ ya eşittir. [13, 16]. Bu eşitlikte, integralin simetrik limitlerinin değiştirilmesi ile birlikte aşağıdaki eşitliğe varılır.

$$P_v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\ln \frac{y}{x}} \cosh(v\phi) J_0(w) d\phi \quad (1.6)$$

Ayrıca, diğer bir kullanışlı gösterim de, (1.5) eşitliğine kısmi integral uygulanması ile elde edilir.

$$P_v(x, y) = \frac{2}{\pi v} \left[\sinh(v \ln \frac{y}{x}) - \frac{xy}{2} \int_{-\ln \frac{y}{x}}^{\ln \frac{y}{x}} e^{v\phi} \frac{J_1(w)}{w} \sinh \phi d\phi \right] \quad (1.7)$$

(1.5)-(1.7) formülleri, $P_v(x, y)$ fonksiyonunun özelliklerinin incelenmesi ve etkili gösterimlerinin bulunması için anahtar eşitliklerdir.

(1.5)-(1.7) formüllerinden, ilgilenilen fonksiyonun aşağıdaki temel özellikleri çıkar:

(a) argümanların yerdeğişimi, fonksiyonun işaret değiştirmesine yol açar.

$$P_v(x, y) = -P_v(y, x)$$

(b) fonksiyon, indisine göre çift fonksiyondur.

$$P_{-v}(x, y) = P_v(x, y)$$

(c) fonksiyon, reel x, y değerleri ve reel ya da saf sanal ν indis değerleri için reel değerler alır.

Silindirik fonksiyonların, genel özellikleri göz önüne alınırsa, fonksiyonun kompleks eşleniği aşağıdaki gibidir.

$$\bar{P}_\nu(x, y) = P_\nu(\bar{x}, \bar{y});$$

$P_\nu(x, y)$ fonksiyonunun argümanlara göre türevlerinin integral gösterimleri, (1.6) eşitliğinin sol ve sağ taraflarının türevlerinin alınması ile elde edilebilir. Türevlemede Leibnitz kuralının avantajı kullanılarak ve ekteki eşitliklerinin yardımı ile,

$$J_0'(z) = -J_1(z),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x - y \operatorname{ch} \phi}{w}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y - x \operatorname{ch} \phi}{w},$$

$$\frac{\partial(\ln \frac{y}{x})}{\partial x} = -\frac{1}{x}, \quad \frac{\partial(\ln \frac{y}{x})}{\partial y} = \frac{1}{y},$$

şu eşitliklere varılır:

$$\frac{\partial P_\nu(x, y)}{\partial x} = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\operatorname{ch}(\nu \ln \frac{y}{x})}{x} + y \int_0^{\ln \frac{y}{x}} \operatorname{ch}(\nu \phi) \frac{J_1(w)}{w} \left(\frac{x}{y} - \operatorname{ch} \phi \right) d\phi \right] \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial P_\nu(x, y)}{\partial y} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\operatorname{ch}(\nu \ln \frac{y}{x})}{y} - x \int_0^{\ln \frac{y}{x}} \operatorname{ch}(\nu \phi) \frac{J_1(w)}{w} \left(\frac{y}{x} - \operatorname{ch} \phi \right) d\phi \right] \quad (1.9)$$

Bulunan bağıntıların yardımı ile, $P_\nu(x, y)$ fonksiyonunun argümanlara göre birinci türevlerinin temel özellikleri türetilir.

(a) argümanların yerdeğişimi, işaret değişimine yol açar.

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial P_v(y, x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial P_v(y, x)}{\partial y};$$

(b) argümanlara göre birinci türevler, indise göre çift fonksiyonlardır.

$$\frac{\partial P_{-v}(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_{-v}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y};$$

(c) argümanlara göre türev, reel ya da saf sanal değerler için reel değerler alır.

(1.8)-(1.9) formüllerinden türetilen, çok bilinen aşağıdaki eşitlikler de,

$$\left. \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x} \right|_{x=y} = -\frac{2}{\pi y}, \quad \left. \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y} \right|_{y=x} = \frac{2}{\pi x}$$

bulunan sonuçları ispatlar.

Benzer şekilde, indise göre türevin gösteriminin bulunması için, integral ve türev sırasının yerdeğiştirilmesi ile, aşağıdaki gösterim elde edilir:

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\ln \frac{y}{x}} \phi \operatorname{sh}(v\phi) J_0(w) d\phi \quad (1.10)$$

İndise göre türevin temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

(a) argümanların yerdeğişimi, fonksiyonun işaret değiştirmesine yol açar.

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v} = -\frac{\partial P_v(y, x)}{\partial v}$$

(b) türev, indise göre tek fonksiyondur.

$$\left. \frac{\partial P_\mu(x, y)}{\partial \mu} \right|_{\mu=-v} = -\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v}$$

(c) türev, reel indis değerleri için reel değerler alır ve saf sanal değerler için aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\left. \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v} \right|_{v=\pm\mu} = \pm \frac{2i}{\pi} \int_0^{\ln \frac{y}{x}} \sin(\mu\phi) J_0(w) \phi d\phi$$

Argümanlara göre karma türevin integral gösteriminin bulunması için, ektteki bağıntı kullanılır. [3]

$$\ddot{P}_v(x, y) = \frac{1}{2} [P_{v-1}(x, y) + P_{v+1}(x, y)] - \frac{v^2}{xy} P_v(x, y) \quad (1.11)$$

(1.6) formülü göz önüne alınırsa, aşağıdaki eşitliğe varılır:

$$\ddot{P}_v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\ln \frac{y}{x}} ch(v\phi) J_0(w) \left[ch\phi - \frac{v^2}{xy} \right] d\phi \quad (1.12)$$

Bu eşitliğin direk türevinin alınması ile de, indise göre türevin integral gösterimi elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\ddot{P}_v(x, y) \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\ln \frac{y}{x}} sh(v\phi) J_0(w) \left[ch\phi - \frac{v^2}{xy} \right] \phi d\phi - \frac{2v}{xy} P_v(x, y) \quad (1.13)$$

(1.12) and (1.13) fonksiyonların temel özellikleri şu şekildedir:

(a) argümanların yerdeğişimi fonksiyonun işaret değiştirmesine yol açar.

$$\frac{\partial^2 P_v(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P_v(x, y)}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 P_v(y, x)}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\ddot{P}_v(x, y) \right] = - \frac{\partial}{\partial v} \left[\ddot{P}_v(y, x) \right]$$

(b) (1.12) deki karma türev ν indisine göre çift fonksiyon iken, (1.13) deki üçüncü türev tek fonksiyondur.

$$\ddot{P}_{-\nu}(x, y) = \ddot{P}_\nu(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[\ddot{P}_\mu(x, y) \right]_{\mu=-\nu} = - \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\ddot{P}_\nu(x, y) \right]$$

(c) Sanal indis değerleri için, karma türev (1.12) reel bir fonksiyondur ve indise göre türevi aşağıdaki eşitlik ile gösterilir:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left[\ddot{P}_\nu(x, y) \right]_{\nu=i\mu} = \frac{2i}{\pi} \int_0^{\ln \frac{y}{x}} \sin(\mu\phi) J_0(w) \left[ch\phi + \frac{\mu^2}{xy} \right] \phi d\phi - \frac{2i\mu}{xy} P_{i\mu}(x, y)$$

(1.12) and (1.13) formüllerinden görüleceği üzere, $\ddot{P}_\nu(x, y)$ ve $\frac{\partial}{\partial \nu} \left[\ddot{P}_\nu(x, y) \right]$ ifadeleri, $x = y = 0$ ikinci dereceden kutup noktaları dışında her yerde regüler fonksiyonlardır. $\nu = 0$ koşulu için bu kutup kaybolur.

1.2. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin birinci türden seri gösterimleri

Bu kısımda $P_v(x, y)$ fonksiyonunun, birinci türden silindirik fonksiyon olarak seri açılımı gösterilmiştir. İlk olarak, Buchholz tarafından bulunmuşlardır. [13]. Bu kısımda elde edilen yeni açılımlar, şimdiye kadar bulunanlar ile benzer özellikler taşımaktadırlar.

Bessel fonksiyonları teorisinde, aşağıdaki seriler bilinen,

$$J_0(w) = J_0(x)J_0(y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)J_n(y)ch(n\phi) \quad (1.14)$$

$$\frac{J_1(w)}{w} = \frac{2}{xy} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)J_n(y) \frac{nsh(n\phi)}{sh\phi} \quad (1.15)$$

ve Graf ve Gegenbaure toplam teoremlerinin özel bir tipi olan eşitliklerdir. [3]. Herhangi kapalı, ϕ değişim aralığında (1.14) ve (1.15) serileri mutlak ve düzgün yakınsarlar. Bu serilerin (1.5) ve (1.7) formüllerinde yerine konması ile elde edilen eşitlik

$$P_v(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(x)J_n(y)S_{v,n}(\Theta) \quad (1.16)$$

şeklindedir. Burada,

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0; \\ 1, & n \geq 1, \end{cases} \quad \Theta = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$S_{v,n}(\Theta) = \int_{-\Theta}^{\Theta} e^{v\phi} ch(n\phi) d\phi = \frac{2}{v^2 - n^2} [vch(n\Theta)sh(v\Theta) - nsh(n\Theta)ch(v\Theta)] \quad (1.17)$$

dir. Buradan şu bağıntıya varılır:

$$P_v(x, y) = \frac{2}{\pi v} \left[sh(v\Theta) - \sum_{n=1}^{\infty} n J_n(x)J_n(y)T_{v,n}(\Theta) \right] \quad (1.18)$$

$$T_{v,n}(\Theta) = \int_{-\Theta}^{\Theta} e^{v\phi} sh(n\phi) d\phi = \frac{2}{v^2 - n^2} [vsh(n\Theta)ch(v\Theta) - nch(n\Theta)sh(v\Theta)] \quad (1.19)$$

Yakınsaklık teoremleri ispatlanmış [1, 2] tamsayı dereceden, silindirik fonksiyonların kuvvetlerindeki seriler Neuman serileri olarak sınıflandırılırlar. (1.16) ve (1.18) serileri konu sonunda gösterileceği gibi, mutlak ve düzgün olarak yakınsarlar.

$P_v(x, y)$ fonksiyonunun türevlerinin gösterimleri, (1.16) daki serilerin direk türevlerinin alınması ile elde edilebilir.

Argümanlara göre türevin belirlenmesi için şu gösterimlerden faydalanılır:

$$J_n'(z) = -\frac{n}{z} J_n(z) + J_{n-1}(z)$$

$$y \frac{\partial S_{v,n}(\Theta)}{\partial y} = -x \frac{\partial S_{v,n}(\Theta)}{\partial x} = 2ch(v\Theta)ch(n\Theta)$$

buradan,

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(y) \left\{ J_{n-1}(x) S_{v,n}(\Theta) - \frac{J_n(x)}{x} [n S_{v,n}(\Theta) + 2ch(v\Theta)ch(n\Theta)] \right\} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(x) \left\{ J_{n-1}(y) S_{v,n}(\Theta) - \frac{J_n(y)}{y} [n S_{v,n}(\Theta) - 2ch(v\Theta)ch(n\Theta)] \right\} \quad (1.21)$$

eşitlikleri bulunur.

v indisine göre türevin gösterimi aşağıdaki formdadır:

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(x) J_n(y) \frac{\partial S_{v,n}(\Theta)}{\partial v} \quad (1.22)$$

burada

$$\frac{\partial S_{v,n}(\Theta)}{\partial v} = 2 \left\{ \frac{\Theta [vch(n\Theta)ch(v\Theta) - nsh(n\Theta)sh(v\Theta)]}{v^2 - n^2} + \right. \\ \left. + \frac{2vnsh(n\Theta)ch(v\Theta) - (v^2 + n^2)ch(n\Theta)sh(v\Theta)}{(v^2 - n^2)^2} \right\}$$

dir.

Karma türevin açılımını yapmak için, (1.11) deki gösterim kullanılır. Şu kullanışlı bağıntı göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{2}(S_{v+1,n} + S_{v-1,n}) = \frac{1}{2}(S_{v,n+1} + S_{v,n-1})$$

aranılan gösterim elde edilir:

$$\ddot{P}_v(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(x) J_n(y) \left[\frac{1}{2}(S_{v,n+1} + S_{v,n-1}) - \frac{v^2}{xy} S_{v,n} \right] \quad (1.23)$$

Son olarak, (1.23) fonksiyonunun v indisine göre türevi aşağıdaki ifade ile temsil edilir:

$$\frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(x) J_n(y) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_{v,n+1}}{\partial v} + \frac{\partial S_{v,n-1}}{\partial v} \right) - \frac{2v}{xy} S_{v,n} \right] - \frac{v^2}{xy} \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v} \quad (1.24)$$

Şimdi, türetilen Neumann serilerinin yakınsak özelliklerini göz önüne alalım. Bu inceleme için, Bessel fonksiyonlarının iyi bilinen asimtotik tahminleri kullanılır. [3, (9.31)]

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ex}{2n} \right)^n, \quad n \gg x,$$

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ey}{2n} \right)^n, \quad n \gg y,$$

ve (1.17)' den kolayca türetilen şu bağıntı ile,

$$S_{v,n} = O \left[\left(\frac{y}{x} \right)^n \frac{ch(v\theta)}{n} \right], \quad n \gg |v|$$

$$F_v(k\rho, kR) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(I)}$$

şeklinde yeni bir gösterim tanımlarsak (burada F , kros-çarpım Bessel fonksiyonu ya da türevlerinden birisini ifade etmektedir) bulunan sonuçlar şu şekilde tablo haline getirilebilir:

Tablo 1.1. Neumann serilerinin (I) genel teriminin asimtotik tahminleri

Fonksiyon	$a_n^{(I)}, n \gg 1$
$P_v(x, y)$	$O \left[\frac{ch(v\theta)}{n^2} \left(\frac{ey}{2n} \right)^{2n} \right]$
$x \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x}, y \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y}$	$O \left[\frac{ch(v\theta)}{n} \left(\frac{ey}{2n} \right)^{2n} \right]$
$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v}$	$O \left[\frac{sh(v\theta)}{n^2} \left(\frac{ey}{2n} \right)^{2n} \right]$
$\ddot{P}_v(x, y)$	$O \left[\frac{ch(v\theta)}{n^2} \left(\frac{ey}{2n} \right)^{2n} \right]$
$\frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v}$	$O \left[\frac{sh(v\theta)}{n^2} \left(\frac{ey}{2n} \right)^{2n} \right]$

Tablo 1.1 ‘ den görüleceği üzere, tüm seriler $y \ll n$ için mutlak ve çok hızlı yakınsarlar. Ek olarak, Weierstrass teoremine göre de düzgün yakınsarlar. x ve/veya y argümanlarına göre düzgün yakınsaklık, sıfır noktası dışında $0 < x_{\min} < x \leq y < y_{\max} < \infty$ sınırlı aralığı için vardır. v indisine göre düzgün yakınsaklık, saf sanal ($\text{Re}(v) = 0$) değerler için her zaman vardır. Bu sebeple, yukarıda yapılmış tüm terimsel türevlemeler ve integrallemeler geçerlidir. Bundan sonraki kısımda, hesaplama açısından daha kullanışlı seri açılımların araştırılmasına devam edilecektir.

1.3. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin ikinci türden seri gösterimleri

Bu kısımda, $P_v(x, y)$ fonksiyonu ve türevlerinin daha kullanışlı bir seri açılımının araştırması yapılacaktır [16]. Bu amaçla, aşağıdaki dönüşümle (1.6) integrali başka bir forma dönüştürülür:

$$t = \frac{2}{\delta} sh \frac{\phi}{2}$$

burada $\delta = \frac{c}{\sqrt{xy}}$, $c = y - x$ dir. Elde edilecek yeni form,

$$P_v(x, y) = \frac{2\delta}{\pi} \int_0^1 \frac{ch \left[2v Arsh \left(\frac{\delta t}{2} \right) \right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta t}{2} \right)^2}} J_0 \left(c \sqrt{1 - t^2} \right) dt \quad (1.25)$$

şeklindedir. Bilinen kuvvet açılımı türevlemesiyle [17],

$$sh \left[2v Arsh \left(\frac{\delta t}{2} \right) \right] = v \delta \left[t + \sum_{n=1}^{\infty} (v, n) \frac{n!}{(2n+1)!} \delta^{2n} t^{2n+1} \right] \quad (1.26)$$

sonucuna ulaşılır. Burada (v, n) , aşağıdaki şekilde açılımı bulunan Hankel sembolüdür [2].

$$\begin{aligned} (v, n) &= \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} + v + n \right)}{n! \Gamma \left(\frac{1}{2} + v - n \right)} = \frac{1}{n! 2^{2n}} \left\{ (4v^2 - 1)(4v^2 - 3) \dots \left[4v^2 - (2n-1)^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{n!} \left[v^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] \cdot \left[v^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] \dots \left[v^2 - \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

buradan (1.25)' deki integral içi deyim aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\frac{ch \left[2v \operatorname{Arsh} \left(\frac{\delta t}{2} \right) \right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta t}{2} \right)^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (v, n) \frac{n!}{(2n)!} \delta^{2n} t^{2n} \quad (1.27)$$

(1.26) ve (1.27) serileri, $\left(\frac{\delta t}{2} \right)^2 < 1$ koşulunda yakınsarlar [17]. $t \in [0,1]$

olduğundan, bu kısıtlama şu koşulları da beraberinde getirir:

$$\delta^2 < 4 \quad (1.28)$$

$$\alpha = \frac{x}{y} > 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,17157288 \quad (1.29)$$

(1.27) açılımının, (1.25) integralinde yerine konmasıyla ve kuvvet serilerinin özellikleri göz önüne alındığında,

$$P_v(x, y) = \frac{2\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (v, n) \frac{n!}{(2n)!} \delta^{2n} \int_0^1 J_0 \left(c\sqrt{1-t^2} \right) t^{2n} dt \quad (1.30)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitliğin sağ tarafındaki integral, birinci belirli Sonin integralinin özel bir tipidir.[1]

$$\int_0^1 J_0 \left(c\sqrt{1-t^2} \right) t^{2n} dt = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right)}{c^{\frac{n+1}{2}}} J_{\frac{n+1}{2}}(c) = (2n-1)!! \frac{j_n(c)}{c^n}$$

Burada $j_n(c) = \left(\frac{\pi}{2c} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{n+1}{2}}(c)$ birinci tip küresel Bessel fonksiyonudur. Son

ifadeyi kullanırsak şu eşitliğe varırız:

$$\begin{aligned} P_v(x, y) &= \frac{2\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (v, n) \frac{n!(2n-1)!!}{(2n)!} \delta^{2n} \frac{j_n(c)}{c^n} = \frac{2\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (v, n) \delta^{2n} \frac{j_n(c)}{(2c)^n} = \\ &= \frac{2\delta}{\pi} \left\{ j_0(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[v^2 - (1/2)^2][v^2 - (3/2)^2] \dots [v^2 - (n-1/2)^2]}{(2n)!!} \delta^{2n} \frac{j_n(c)}{c^n} \right\} \quad (1.31) \end{aligned}$$

Elde edilen bu birinci tip küresel Bessel fonksiyonunun seri açılımı, aynı zamanda Neumann serileri olarak da sınıflandırılır.

(1.31) ifadesi aşağıdaki şekilde kopyalanabilir.

$$P_v(x, y) = \frac{2\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v, n)}{2^n} \left(\frac{\delta^2}{c} \right)^n j_n(c) \quad (1.32)$$

Burada, tanıma göre $\frac{\delta^2}{c} = \frac{c}{xy}$ ' dir. Bundan dolayı, eşit bir form şu şekilde yazılabilir.

$$P_v(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v, n) c^{n+1} j_n(c)}{2^n (xy)^{n+1/2}} \quad (1.33)$$

Buna göre, elde edilen seriler, x 'in ters dereceden y parametesine göre fonksiyonunun açılımı olarak kabul edilebilir.

Argümanlara göre türevin açılımı, (1.33) serisinin direk türevlenmesi ile bulunabilir:

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v, n)}{2^n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c^{n+1} j_n(c)}{(xy)^{n+1/2}} \right]$$

burada,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{c^{n+1} j_n(c)}{(xy)^{n+1/2}} \right] = - \frac{c^{n+1}}{(xy)^{n+1/2}} \left[\frac{n+1/2}{x} j_n(c) + j_{n-1}(c) \right]$$

dir. Benzer şekilde

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v, n)}{2^n} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{c^{n+1} j_n(c)}{(xy)^{n+1/2}} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{c^{n+1} j_n(c)}{(xy)^{n+1/2}} \right] = - \frac{c^{n+1}}{(xy)^{n+1/2}} \left[\frac{n+1/2}{y} j_n(c) - j_{n-1}(c) \right]$$

Sonuç olarak argümanlara göre türevler,

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x} = - \frac{2\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (v, n) \frac{\delta^{2n}}{(2c)^n} \left[\frac{n+1/2}{x} j_n(c) + j_{n-1}(c) \right] \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y} = -\frac{2\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (v, n) \frac{\delta^{2n}}{(2c)^n} \left[\frac{n+1/2}{y} j_n(c) - j_{n-1}(c) \right] \quad (1.35)$$

şeklinde yazılabilir. Bu açılımların türevleri alınırken, şu bilinen eşitlik kullanılmıştır. [3, (10.1.23)]

$$\frac{\partial}{\partial c} [c^{n+1} j_n(c)] = c^{n+1} j_{n-1}(c)$$

İndise göre türevin seri açılımı (1.31) ifadesinin direk türevinin alınması ile bulunabilir.

$$\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v} = \frac{4v\delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (v, n) \frac{\delta^{2n}}{(2c)^n} \left[\sum_{m=1}^n \frac{1}{v^2 - (m-1/2)^2} \right] j_n(c) \quad (1.36)$$

Argümanlara göre karma türevin ifadesi ise, (1.11) deki bağıntının yardımıyla şu şekilde bulunur:

$$\ddot{P}_v(x, y) = \frac{2\delta}{\pi} \left\{ j_0(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(v+1, n) + (v-1, n)}{2} \right] \frac{\delta^{2n}}{(2c)^n} j_n(c) \right\} - \frac{v^2}{xy} P_v(x, y)$$

Burada, parantez içindeki ifadenin dönüştürülmesi gereklidir. $(v-1, n)$ ifadesini açarsak;

$$\begin{aligned} (v-1, n) &= \frac{1}{n!} \left[(v-1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \cdot \left[(v-1)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[(v-1)^2 - \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdot \left[(v-1)^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n!} \underbrace{\left[v^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[v^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[v^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right]}_{(v, n)} \cdot \frac{\left[v - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]}{\left[v + \left(n - \frac{1}{2}\right) \right]} \end{aligned}$$

üst eşitlikteki farklar iki kare farkı olduğundan alt eşitlikteki forma dönüştürülebilir.

Benzer yolla, $(v+1, n)$ ifadesinin açılımı,

$$\begin{aligned} (v+1, n) &= \frac{1}{n!} \left[(v+1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \cdot \left[(v+1)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[(v+1)^2 - \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdot \left[(v+1)^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n!} \underbrace{\left[v^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \cdot \left[v^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[v^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right]}_{(v, n)} \cdot \frac{\left[v + \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]}{\left[v - \left(n - \frac{1}{2}\right) \right]} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu gösterimler yardımıyla,

$$\frac{(v-1, n) + (v+1, n)}{2} = \frac{(v, n)}{2} \left\{ \frac{\left[v - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]}{\left[v + \left(n - \frac{1}{2}\right) \right]} + \frac{\left[v + \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]}{\left[v - \left(n - \frac{1}{2}\right) \right]} \right\} = (v, n) \frac{v^2 + n^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{v^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2}$$

ifadesi bulunur. Bulunan toplam ifadesi fonksiyon eşitliğinde yerine konursa, karma türevin seri açılımı aşağıdaki forma döner.

$$\ddot{P}_v(x, y) = \frac{2\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (v, n) \left[\frac{v^2 + n^2 - (1/2)^2}{v^2 - (n-1/2)^2} - \frac{v^2}{xy} \right] \frac{\delta^{2n}}{(2c)^n} j_n(c) \quad (1.37)$$

Son olarak, v indisine göre karma türev, başlangıç olarak aşağıdaki formdadır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial (v, n)}{\partial v} \left[\frac{v^2 + n^2 - (1/2)^2}{v^2 - (n-1/2)^2} - \frac{v^2}{xy} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (v, n) \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{v^2 + n^2 - (1/2)^2}{v^2 - (n-1/2)^2} - \frac{v^2}{xy} \right] \right\} \frac{\delta^{2n}}{(2c)^n} j_n(c) \end{aligned}$$

Burada,

$$\frac{\partial (v, n)}{\partial v} = (v, n) \sum_{m=1}^n \frac{2v}{v^2 - (m-1/2)^2}, n > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{v^2 + n^2 - (1/2)^2}{v^2 - (n-1/2)^2} - \frac{v^2}{xy} \right] = 2v \left\{ \frac{n - 2n^2}{[v^2 - (n-1/2)^2]^2} - \frac{1}{xy} \right\}$$

dir. Birtakım basit dönüşümlerle, indise göre karma türevin formülü elde edilir:

$$xy \frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v} = \frac{4v\delta}{\pi} \left\{ -j_0(c) + \sum_{n=1}^{\infty} (v, n) \left\{ \frac{xy}{v^2 - (n-1/2)^2} \times \right. \right. \quad (1.38)$$

$$\left. \times \left[\left(v^2 + n^2 - \frac{1}{4} \right) \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{v^2 - (m-1/2)^2} + 1 \right] - \left[\sum_{m=1}^n \frac{v^2}{v^2 - (m-1/2)^2} + 1 \right] \right\} \frac{\delta^{2n}}{(2c)^n} j_n(c)$$

Buradaki tüm açılımlar, $\frac{\delta}{2} \ll 1$ koşulunda hızlı yakınsarlar. Tam sayının yarısı olan v indis değerleri için, serilerin toplamı sınırlıdır.

(1.31), (1.34)-(1.38) formülleri, hesaplama açısından ve ilgilenilen fonksiyonun-türevlerinin asimptotik davranışlarının araştırılması açısından önemli rol oynarlar.

Şimdi, elde edilen Neumann serilerinin yakınsak özelliklerini göz önüne alalım. Bunun için, Hankel sembolünün asimptotik tahminini ele alırsak [2],

$$(v, n) = O \left[\frac{(-1)^n \cos(v\pi) \left(\frac{n}{e} \right)^n}{n^{1/2}} \right], \quad n \gg |v|$$

ve $n \gg c$ koşulunda küresel Bessel fonksiyonları için

$$j_n(c) = O \left[\frac{1}{n} \left(\frac{ec}{2n} \right)^n \right]$$

yazılabilir. Şu yeni gösterimi ele alalım:

$$F_v(x, y) = \frac{2\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(II)}$$

burada F sembolü, ilgilenilen fonksiyonun kendisini ya da türevlerinden herhangi birisini ifade etmektedir. Elde edilen sonuçlar şu şekilde tablolştırılabilir:

Tablo 1.2. Neumann serilerinin (II) asimtotik tahminleri

Fonksiyon	$a_n^{(II)}, n \gg 1$
$P_\nu(x, y)$	$O \left[\frac{(-1)^n \cos(\nu\pi) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{n^{3/2}} \right]$
$x \frac{\partial P_\nu(x, y)}{\partial x}, y \frac{\partial P_\nu(x, y)}{\partial y}$	$O \left[\frac{(-1)^n \cos(\nu\pi) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{n^{1/2}} \right]$
$\frac{\partial P_\nu(x, y)}{\partial \nu}$	$O \left[\frac{(-1)^n \sin(\nu\pi) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{n^{3/2}} \right]$
$\ddot{P}_\nu(x, y)$	$O \left[\frac{(-1)^n \cos(\nu\pi) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{n^{3/2}} \right]$
$\frac{\partial \ddot{P}_\nu(x, y)}{\partial \nu}$	$O \left[\frac{(-1)^n \sin(\nu\pi) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{n^{3/2}} \right]$

Tablo 1.2'nin sonucu olarak; tüm seriler Ermakov testine göre mutlak yakınsarlar ve $\delta \ll 2$ koşulunda bu yakınsama çok hızlı olur. Ek olarak seriler, Weierstrass teoremine göre de düzgün yakınsarlar. x ve/veya y için düzgün yakınsaklık $\alpha_0 < \frac{x}{y} < 1$ koşulu için vardır. ($\alpha_0 = 3 - 2\sqrt{2}$) ν indisine göre düzgün yakınsama ise indisin reel değerleri için geçerlidir. ($\text{Im}(\nu) = 0$). Bu nedenle, yukarıda yapılan tüm terimsel türevleme ve integralleme işlemleri geçerlidir.

1.4. Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin düzgün asimtotik açılımları

İlgilenilen fonksiyonun asimtotik özellikleri, elde edilen gösterimlerin yardımıyla kolayca ifade edilebilir. Şu eşitlemeleri yapalım: $x = k\rho$, $y = kR$,

$c = ka = k(R - \rho)$, $\delta = \frac{a}{\sqrt{\rho R}}$. Buradan (1.32) açılımı şu forma gelir.

$$P_\nu(k\rho, kR) = \frac{2\delta}{\pi} \left\{ j_0(ka) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu, n) \delta^{2n} \frac{j_n(ka)}{(2ka)^n} \right\} \quad (1.39)$$

ka ve ν ' in sabit olduğunu kabul edelim. Burada $\rho \rightarrow \infty$ için $\delta \rightarrow 0$ koşulu vardır ve uç noktalarda ihmal edilebilir. Buradan şu sonuç bulunabilir:

$$P_\nu(k\rho, kR) \sim \frac{2}{\pi} \frac{\sin k(R - \rho)}{k\sqrt{\rho R}}, \quad a = \text{sabit}, \rho \gg 1 \quad (1.40)$$

Bu tahmin, ν indisinden bağımsız olan ve açılıma rehber olacak iyi bilinen bir ifadedir. (bkz. [1, 13, 15, 16]). Göz önünde bulundurulmalıdır ki, (1.40) ifadesi, sabit ρ, R, ν ve $k \rightarrow \infty$ koşullarında geçerlidir.

(1.34) ve (1.35) seri açılımlarına benzer olarak, $\delta \rightarrow 0$ ve/veya $k \rightarrow \infty$ koşullarında, argümanlara göre türevler için derece içermeyen yakınsamalar şu formlarda da yazılabilir:

$$\frac{\partial P_\nu(k\rho, kR)}{\partial(k\rho)} \sim -\frac{2}{\pi k\sqrt{\rho R}} \left[\frac{\sin ka}{2k\rho} + \cos ka \right] \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial P_\nu(k\rho, kR)}{\partial(kR)} \sim -\frac{2}{\pi k\sqrt{\rho R}} \left[\frac{\sin ka}{2kR} - \cos ka \right] \quad (1.42)$$

İndise göre türev için ise, aynı koşullarda ekteki ifade yazılabilir:

$$\frac{\partial P_\nu(k\rho, kR)}{\partial \nu} \sim -\frac{2\nu}{\pi} \frac{1}{(k\rho \cdot kR)^{3/2}} [\sin ka - ka \cos ka] \quad (1.43)$$

Kros-çarpım Bessel fonksiyonunun asimtotik formu $\nu \rightarrow \infty$ koşulunda şu şekle döner: [13]

$$P_\nu(k\rho, kR) \sim \frac{2}{\pi\nu} sh \left[\nu \ln \left(\frac{R}{\rho} \right) \right] \quad (1.44)$$

Bu tahmin, $k \rightarrow 0$ koşulunda (1.6)'daki integral gösterimine yol açar.

$P_\nu(x, y)$ fonksiyonu ve türevlerinin büyük indis değerleri için ($|\nu| \gg 1$) daha doğru ve düzgün asimtotik yaklaşımları bulunabilir. Bu amaçla, Bessel eşitliğini ekteki forma dönüştürsek;

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \left(\nu^2 \frac{z^2 - 1}{z^2} + \frac{1}{4z^2} \right) \right] U(z) = 0 \quad (1.45)$$

bu eşitliğin kısmi çözümleri $z^{1/2} J_\nu(vz), z^{1/2} N_\nu(vz)$ ve ayrıca $z_1^{1/2} z_2^{1/2} P_\nu(vz_1, vz_2)$ fonksiyonlarıdır. Bundan dolayı, gereken fonksiyonun bulunmasında ilerki safalar için $z_1 = \frac{x}{v}, z_2 = \frac{y}{v}$ dönüşümleri yapılmıştır.

ν indisi reel bir sayı ise, (1.45) denkleminin $|z| = 1$ noktasında bir dallanma noktası vardır. Langer dönüşümünü [2] kullanırsak;

$$U_z \equiv f(z) \nu(\xi)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $f(z)$, z' ye bağlı ve tüm tanım aralığında sürekli bir fonksiyondur. Yeni $\nu(\xi)$ fonksiyonu şu eşitliği sağlar:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu^2 \xi \right] \nu(\xi) = 0 \quad (1.46)$$

ve yeni ξ değişkeni şu ifade ile tanımlanır:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(\xi)^{3/2} &= \int_z^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} dt, \quad z \leq 1 \\ \frac{2}{3}(-\xi)^{3/2} &= \int_1^z \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt, \quad z \geq 1\end{aligned}\tag{1.47}$$

Verilen sınır koşulları (1.45) denkleminin birinci ve ikinci tip Airy fonksiyonu doğrultusunda [3] bir çözümünü belirler. Şimdi, (1.45) denkleminin $x = y$ koşulu için beliren çözümünü yazalım.

$$U(z_1) \equiv f(z_1, z_2) \left[Ai(v^{2/3}\xi_1) Bi(v^{2/3}\xi_2) - Ai(v^{2/3}\xi_2) Bi(v^{2/3}\xi_1) \right] \tag{1.48}$$

Burada Ai, Bi fonksiyonları sırasıyla birinci ve ikinci tip Airy fonksiyonlarıdır. Bu ifade, dallanma noktaları civarını da içeren, tüm z değerleri için uygun, tek düzgün asimtotik yaklaşımdır. Burada, dallanma noktasının değişik taraflarında bulunan z_1 ve z_2 değerleri için açılımlar göz önüne alınmamıştır.

Eğer, indis değeri saf sanal bir değer ise ($v = \pm i\mu$),

$$U(z_1) \equiv f(z_1, z_2) \left[Ai(-\mu^{2/3}\xi_1) Bi(-\mu^{2/3}\xi_2) - Ai(-\mu^{2/3}\xi_2) Bi(-\mu^{2/3}\xi_1) \right] \tag{1.49}$$

ifadesi geçerlidir ve ξ değeri şu şekilde ifade edilir:

$$\xi = \left[\pm \frac{3}{2} \int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} dt \right]^{\frac{2}{3}} \tag{1.50}$$

(1.45) ' den yola çıkılarak, dallanma noktalarının yokluğu durumunda, her iki (1.49) ve Liouville-Green yakınsaması (1.44) uygundur. [2]

(1.42) ifadesinin açık formunun belirlenmesi için, $|\arg(z)| < \pi$ ' de düzgün tahminleri kullanırsak [3]

$$J_v(vz) = \left(\frac{4\xi}{1-z^2} \right)^{1/4} \frac{Ai(v^{2/3}\xi)}{v^{1/3}} \left[1 + O(|v|^{-1}) \right] \quad (1.51)$$

$$N_v(vz) = - \left(\frac{4\xi}{1-z^2} \right)^{1/4} \frac{Bi(v^{2/3}\xi)}{v^{1/3}} \left[1 + O(|v|^{-1}) \right] \quad (1.52)$$

ekteki formül elde edilir:

$$P_v(x, y) = J_v(vz_1)N_v(vz_2) - J_v(vz_2)N_v(vz_1) \cong - \left[\frac{16\xi_1\xi_2}{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} \right]^{\frac{1}{4}} \times \quad (1.53)$$

$$\times \frac{1}{v^{2/3}} \left[Ai(v^{2/3}\xi_1)Bi(v^{2/3}\xi_2) - Ai(v^{2/3}\xi_2)Bi(v^{2/3}\xi_1) \right] \left[1 + O(|v|^{-1}) \right]$$

ξ değişkeninin (1.47) ve (1.50) tanım formüllerinde integral değişkeni ξ , reel bir değer alacak şekilde seçilmelidir. [3] Eğer integralin sonucunu τ ile isimlendirirsek, τ aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\tau = \begin{cases} Arch(z^{-1}) - \sqrt{1-z^2}; & v^2 > 0, z < 1 \\ \sqrt{z^2-1} - \arccos(z^{-1}); & v^2 > 0, z > 1 \\ Arsh(|iz|^{-1}) - \sqrt{1+(iz)^2}; & v^2 < 0 \end{cases} \quad (1.54)$$

(1.53) ' deki Kros-çarpım Airy fonksiyonu, $P_v(x, y)$ fonksiyonu ile uyushmaktadır. Gerçekten, Airy fonksiyonları ve silindirik fonksiyonların iç bağlantılarının [1-3] iç bağlantılarını kullanırsak, şu sonuçları elde ederiz:

$$Ai(a_1)Bi(a_2) - Ai(a_2)Bi(a_1) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{a_1 a_2} [I_{-1/3}(b_1)I_{1/3}(b_2) - I_{-1/3}(b_2)I_{1/3}(b_1)] \quad (1.55)$$

$$Ai(-a_1)Bi(-a_2) - Ai(-a_2)Bi(-a_1) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{a_1 a_2} [J_{1/3}(b_1)J_{-1/3}(b_2) - J_{1/3}(b_2)J_{-1/3}(b_1)]$$

Burada $b_n = \frac{2}{3} a_n^{\frac{3}{2}}$, $n=1, 2$. dir. Diğer yandan (1.1) formülünden,

$$I_{-1/3}(b_1)I_{1/3}(b_2) - I_{-1/3}(b_2)I_{1/3}(b_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} P_{1/3}(ib_1, ib_2) \quad (1.56)$$

$$J_{1/3}(b_1)J_{-1/3}(b_2) - J_{1/3}(b_2)J_{-1/3}(b_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} P_{1/3}(b_1, b_2)$$

(1.55) ve (1.56)' kıyaslarsak, ekteki eşitlikleri elde ederiz:

$$Ai(a_1)Bi(a_2) - Ai(a_2)Bi(a_1) = \frac{1}{3} \sqrt{a_1 a_2} P_{1/3}(ib_1, ib_2) \quad (1.57)$$

$$Ai(-a_1)Bi(-a_2) - Ai(-a_2)Bi(-a_1) = -\frac{1}{3} \sqrt{a_1 a_2} P_{1/3}(b_1, b_2)$$

Temel olarak, (1.53) ifadesini şu şekilde yazmak mümkündür:

$$P_v(x, y) \cong -\frac{(\tau_1 \tau_2)^{\frac{1}{2}}}{\left[(1-z_1^2)(1-z_2^2) \right]^{\frac{1}{4}}} \begin{cases} P_{1/3}(iv\tau_2, iv\tau_1) & z_{1,2} < 1, v^2 > 0 \\ P_{1/3}(v\tau_2, v\tau_1) & z_{1,2} > 1, v^2 > 0 \\ P_{1/3}(\mu\tau_2, \mu\tau_1) & v = \pm i\mu \end{cases} \quad (1.58)$$

Burada $\tau_{1,2}$ (1.54)' teki şekliyle tanımlanır.

(1.58) formülü, büyük indis değerleri için, $P_v(x, y)$ fonksiyonunun x, y parametrelerine göre düzgün asimtotik yaklaşımlarını ifade etmektedir. (1.44) formülünde, $P_{1/3}(vz_2, vz_1)$ fonksiyonunun asimtotik yaklaşımında sağ tarafta yerine konmasıyla Liouville-Green açılımını elde ederiz.

$$P_v(x, y) \approx \frac{2}{\pi} \frac{1}{\left[(1-z_1^2)(1-z_2^2) \right]^{\frac{1}{4}}} \begin{cases} \frac{1}{v} \left\{ \begin{aligned} sh v(\tau_1 - \tau_2); & z < 1, v^2 > 0 \\ \sin v(\tau_1 - \tau_2); & z > 1, v^2 > 0 \end{aligned} \right. \\ \frac{\sin \mu(\tau_1 - \tau_2)}{\mu}; & v \pm i\mu \end{cases} \quad (1.59)$$

Bilindiği üzere, asimtotik ifadenin herhangi bir türevi tanımlanmamıştır. Bundan dolayı, argümanlara göre türevin belirlenmesi için şu tahminleri kullanacağız: [3]

$$J'_v(vz) = -\frac{2}{z} \left(\frac{1-z^2}{4\xi} \right)^{1/4} \frac{Ai'(v^{2/3}\xi)}{v^{2/3}} \left[1 + O(|v|^{-2/3}) \right]$$

$$N'_v(vz) = \frac{2}{z} \left(\frac{1-z^2}{4\xi} \right)^{1/4} \frac{Bi'(v^{2/3}\xi)}{v^{2/3}} \left[1 + O(|v|^{-2/3}) \right]$$

$O(|v|^{-2/3})$ ifadesine kadarki kısım için

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x} &= J'_v(vz_1)N_v(vz_2) - J_v(vz_2)N'_v(vz_1) \cong \\ &\cong \frac{2}{z_1} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \frac{1-z_1^2}{1-z_2^2} \right)^{1/4} \frac{1}{v} \left[Ai'(v^{2/3}\xi_1)Bi'(v^{2/3}\xi_2) - Ai'(v^{2/3}\xi_2)Bi'(v^{2/3}\xi_1) \right] \end{aligned} \quad (1.60)$$

yazmak mümkündür, Buradan aranan gösterim (1.57)' den yola çıkılarak,

$$Ai'(a_1)Bi(a_2) - Ai(a_2)Bi'(a_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{3} P_{1/3}(b_1, b_2) + b_1 \frac{\partial P_{1/3}(b_1, b_2)}{\partial b_1} \right] \quad (1.61)$$

şeklinde yazılabilir. (1.61)' in (1.60)' da yerine konması ile,

$$x \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x} \cong \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^{1/2} \left(\frac{1-z_1^2}{1-z_2^2} \right)^{1/4} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{1}{3} P_{1/3}(iv\tau_1, iv\tau_2) + v\tau_1 \frac{\partial P_{1/3}(iv\tau_1, iv\tau_2)}{\partial (v\tau_1)} \right]; \quad z < 1, v^2 > 0 \\ &\left[\frac{1}{3} P_{1/3}(v\tau_1, v\tau_2) + v\tau_1 \frac{\partial P_{1/3}(v\tau_1, v\tau_2)}{\partial (v\tau_1)} \right]; \quad z > 1, v^2 > 0 \\ &\left[\frac{1}{3} P_{1/3}(\mu\tau_1, \mu\tau_2) + \mu\tau_1 \frac{\partial P_{1/3}(\mu\tau_1, \mu\tau_2)}{\partial (\mu\tau_1)} \right]; \quad v = \pm i\mu \end{aligned} \right. \quad (1.62)$$

ifadesi elde edilir. Benzer olarak, $O(|v|^{-2/3})$ ifadesi ile birlikte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y} &= J_v(vz_1)N'_v(vz_2) - J'_v(vz_2)N_v(vz_1) \cong \\ &\cong \frac{2}{z_2} \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{1-z_2^2}{1-z_1^2} \right)^{1/4} \frac{1}{v} \left[Ai(v^{2/3}\xi_1)Bi'(v^{2/3}\xi_2) - Ai'(v^{2/3}\xi_2)Bi(v^{2/3}\xi_1) \right] \end{aligned}$$

elde ederiz. Ekteki eşitliğin yardımıyla,

$$Ai(a_1)Bi'(a_2) - Ai'(a_2)Bi(a_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{3} P_{1/3}(b_1, b_2) + b_2 \frac{\partial P_{1/3}(b_1, b_2)}{\partial b_2} \right]$$

ikinci argümana göre türev için ifade elde edilir.

$$y \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y} \equiv \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^{1/2} \left(\frac{1-z_2^2}{1-z_1^2} \right)^{1/4} \begin{cases} \left[\frac{1}{3} P_{1/3}(iv\tau_1, iv\tau_2) + v\tau_2 \frac{\partial P_{1/3}(iv\tau_1, iv\tau_2)}{\partial(v\tau_2)} \right]; & z < 1, v^2 > 0 \\ \left[\frac{1}{3} P_{1/3}(v\tau_1, v\tau_2) + v\tau_2 \frac{\partial P_{1/3}(v\tau_1, v\tau_2)}{\partial(v\tau_2)} \right]; & z > 1, v^2 > 0 \\ \left[\frac{1}{3} P_{1/3}(\mu\tau_1, \mu\tau_2) + \mu\tau_2 \frac{\partial P_{1/3}(\mu\tau_1, \mu\tau_2)}{\partial(\mu\tau_2)} \right]; & v = \pm i\mu \end{cases} \quad (1.63)$$

(1.41), (1.42) 'den $P_{1/3}(vz_2, vz_1)$ fonksiyonu ve türevlerinin asimtotik yaklaşımlarının (1.55) ve (1.56) formüllerinin sağ taraflarında yerine konmasıyla, Liouville-Green gösterimlerini elde ederiz.

$$x \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial x} \square - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-z_1^2}{1-z_2^2} \right)^{1/4} \begin{cases} \left[ch v(\tau_2 - \tau_1) + \frac{ch v(\tau_2 - \tau_1)}{6v\tau_1} \right]; & z < 1, v^2 > 0 \\ \left[\cos v(\tau_2 - \tau_1) + \frac{\sin v(\tau_2 - \tau_1)}{6v\tau_1} \right]; & z > 1, v^2 > 0 \\ \left[\cos \mu(\tau_2 - \tau_1) + \frac{\sin \mu(\tau_2 - \tau_1)}{6\mu\tau_1} \right]; & v = \pm i\mu \end{cases}$$

$$y \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y} \square \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-z_2^2}{1-z_1^2} \right)^{1/4} \begin{cases} \left[ch v(\tau_2 - \tau_1) + \frac{ch v(\tau_2 - \tau_1)}{6v\tau_2} \right]; & z < 1, v^2 > 0 \\ \left[\cos v(\tau_2 - \tau_1) + \frac{\sin v(\tau_2 - \tau_1)}{6v\tau_2} \right]; & z > 1, v^2 > 0 \\ \left[\cos \mu(\tau_2 - \tau_1) + \frac{\sin \mu(\tau_2 - \tau_1)}{6\mu\tau_2} \right]; & v = \pm i\mu \end{cases}$$

Son yaklaşımlar, (1.59)' un direk türevinin alınması ile elde edilen sonuçlara [6] benzer yaklaşımlardır.

Karma türev için asimtotik açılımlar, $(O(|v|^{-2/3}))$ ifadesi ile birlikte) şu ifadenin yardımı ile bulunabilir:

$$\ddot{P}_v(x, y) \cong -\frac{4}{z_1 z_2} \left[\frac{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}{16\xi_1 \xi_2} \right] \frac{1}{v^{4/3}} \left[Ai'(v^{2/3}\xi_1)Bi'(v^{2/3}\xi_2) - Ai'(v^{2/3}\xi_2)Bi'(v^{2/3}\xi_1) \right]$$

Airy fonksiyonları ve silindirik fonksiyonların türevleri için bağlantılı eşitlikler bize ekteki bağıntıları verir:

$$Ai'(a_1)Bi'(a_2) - Ai'(a_2)Bi'(a_1) = -\frac{1}{3}a_1a_2P_{2/3}(ib_1, ib_2)$$

$$Ai'(-a_1)Bi'(-a_2) - Ai'(-a_2)Bi'(-a_1) = -\frac{1}{3}a_1a_2P_{2/3}(b_1, b_2)$$

Sonuçta, aranan yaklaşım şu formdadır:

$$\ddot{P}_v(x, y) \cong \frac{(\tau_1 \tau_2)^{1/2}}{z_1 z_2} \left[(1-z_1^2)(1-z_2^2) \right]^{1/4} \begin{cases} P_{2/3}(iv\tau_1, iv\tau_2); & z < 1, v^2 > 0 \\ P_{2/3}(v\tau_1, v\tau_2); & z > 1, v^2 > 0 \\ P_{2/3}(\mu\tau_1, \mu\tau_2); & v = \pm i\mu \end{cases} \quad (1.64)$$

(1.58), (1.62)-(1.64)' deki düzgün asimtotik yaklaşımlar, ilgilenilen fonksiyon ve türevlerinin $\alpha = \frac{x}{y} \rightarrow 1$ koşulunda irdelenmesi için kullanışlıdır.

1.5. Kros-çarpım Bessel fonksiyonlarının sıfırları

Aşağıdaki özel gösterimler verilsin:

$$f_v(\kappa, z) = P_v(z, \kappa z)$$

$$g_v(\kappa, z) = \ddot{P}_v(z, \kappa z)$$

Bu fonksiyonlardan birisinin, sabit v ve κ için z - sıfırları veya verilen z ve κ değerleri için v - sıfırları ile ilgilenilmektedir.

Sanal z -sıfırlarının yokluğu. $f_v(\kappa, z)$ [18] için yapılan ispat, v 'nin reel ve $\kappa > 1$ koşulunda $g_v(\kappa, z)$ fonksiyonunun da saf sanal sıfırlarının olmadığını göstermek için değiştirilebilir. Her v ve z değeri için $g_v(\kappa, z)$ fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan, $y > 0$ için, $z = iy$ eşitliğini düşünebiliriz. Şimdi,

$$\begin{aligned} g_v(\kappa, iy) &= J_v'(iy)Y_v'(i\kappa y) - J_v'(i\kappa y)Y_v'(iy) \\ &= -\frac{2}{\pi} [I_v'(y)K_v'(\kappa y) - I_v'(\kappa y)K_v'(y)], \end{aligned}$$

ifadesi ($I_v(y)$ ve $K_v(y)$, modifiye Bessel fonksiyonlarıdır) reel indis ve pozitif argüman değerleri için reeldir. Bundan başka,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{I_v'(y)}{K_v'(y)} \right] = -\frac{(v^2 + y^2)}{y^3 [K_v'(y)]^2},$$

ifadesi, $I_v'(y)/K_v'(y)$ değerinin, kesin şekilde y ' nin monoton fonksiyonu olduğunu belirtir. $K_v'(y)$ fonksiyonu pozitif y değerleri için görünür olduğundan, $g_v(\kappa, z)$ fonksiyonu için saf sanal z -sıfırlarının işlenemeyeceği söylenebilir.

Reel z - sıfırları. Kompleks, saf sanal z -sıfırlarının yokluğunda ($v = n$ değerinin reel olduğu durum için) sadece $z = x > 0$ koşulu göz önünde tutulacaktır. Tamsayı n ve çeşitli κ değerleri için reel sıfırların tabloları

referanslarda verilmiştir. [3] Sabit indis ve büyük argüman değerleri için Bessel fonksiyonları açılımlarını kullanarak, Mc.Mahon [15], ilk olarak bu sıfırların büyük olanları için asimtotik açılımları vermiştir.

$f_n(\kappa, x)$ ' nin diğer büyük sıfırları için,

$$x_{n,s} \sim \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q - p^2}{\beta^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{\beta^5} + \dots ,$$

burada,

$$\beta = \frac{s\pi}{\kappa - 1} \quad (s=N, N+1, \dots; \quad N \gg 1), \quad \mu = 4n^2 ,$$

$$p = \frac{\mu - 1}{2^3 \kappa} , \quad q = \frac{(\mu - 1)(\mu - 25)(\kappa^3 - 1)}{3 \cdot 2^7 \kappa^3 (\kappa - 1)}$$

$$r = \frac{(\mu - 1)(\mu^2 - 114\mu + 1073)(\kappa^5 - 1)}{5 \cdot 2^{10} \kappa^5 (\kappa - 1)}$$

dir. Aşağıdaki değerler ile de, $g_n(\kappa, x)$ için sıfırlar yazılır.

$$p = \frac{\mu + 3}{2^3 \kappa} , \quad q = \frac{(\mu^2 + 46\mu - 63)(\kappa^3 - 1)}{3 \cdot 2^7 \kappa^3 (\kappa - 1)}$$

$$r = \frac{(\mu^3 + 18\mu^2 - 2053\mu + 1899)(\kappa^5 - 1)}{5 \cdot 2^{10} \kappa^5 (\kappa - 1)}$$

Yıllardır, sayısal hesaplamalar gösterir ki, yukarıdaki ifadeler, büyüklük sırasına göre, f_n ' in s ' inci sıfırı ve g_n ' in $(s+1)$ ' inci sıfırını gösterir. İki durum arasındaki fark, $n \neq 0$ için, g_n ' in asimtotik açılımlar ile verilmeyen ekstra bir sıfırının görünmesi ile yorumlanmıştır. [15] Buchholz, $f_n(\kappa, z)$ ve $g_n(\kappa, z)$ ' in değişik seri gösterimlerinden, McMahon' un ifadeleri ile orantılı ve bu “*ihmal*” edilen g_n sıfırı için açılımı göstermiştir. [16]

$$\frac{n}{z} = \sqrt{k} \left\{ 1 + \frac{(k-1)^2}{12k} + \frac{(8n-3)(k-1)^4}{480k^2} + \dots \right\}$$

Waldron (bkz [15]), yeniden, küçük sıfırların değişik tabiatını ifade etmiş ve $g_n(\kappa, z)$ ' in sıfırlarının indekslenmesinin, $s = 0$ yerine $s = 1$ ' den başlanmasını tavsiye etmiştir.

Ekteki teorem, f_n ve g_n ' in büyük sıfırlarının durumunu ifade etmektedir, **TEOREM.** Varsayalım ki,

$$f_v(\kappa, z) = J_v(z)N_v(\kappa z) - N_v(z)J_v(\kappa z) ,$$

$$g_v(\kappa, z) = J_v'(z)N_v'(\kappa z) - N_v'(z)J_v'(\kappa z) ,$$

olsun. Burada, v ve κ , verilen reel veya kompleks sayılardır ve $|\arg \kappa| < \pi$ ' dir.

Bu durumda, $C: |z| = (s + \frac{1}{2})\pi / |\kappa - 1|$ çemberi içinde (s , yeterli büyüklükte pozitif tamsayı) f_v 'nin tam olarak $2s$ tane sıfırı, g_v 'nin ise, $v \neq 0$ ya da $v = 0$ olmasına göre $2s + 2$ veya $2s$ tane sıfırı vardır.

İspat: f_v, z ' in tam fonksiyonu olduğundan, C' nin içinde yer alan sıfırları şu ifade ile verilir:

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\partial \log f_v(\kappa, w)}{\partial w} \partial w$$

Diğer yandan, g_0 fonksiyonu sınırlı z düzleminde regüler analitik olmasına rağmen, $v \neq 0$ için g_v 'nin ikinci derece orijininin bir kutbu vardır. g fonksiyonunun C içinde yer alan sıfırları şu şekilde tanımlanır:

$$N_v = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\partial \log g_v(\kappa, w)}{\partial w} \partial w + 2(1 - \delta_{0v})$$

Burada $\delta_{\mu\nu}$ Kroneker sembolüdür.

Büyük $|w|$ değeri için ($|\arg w| < \pi$),

$$H_v^{(1,2)}(w) = \left(\frac{2}{\pi w} \right)^{1/2} e^{\pm i(w - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi)} \left[1 \pm \frac{i(4v^2 - 1)}{8w} - \frac{(4v^2 - 1)(4v^2 - 9)}{2(8w)^2} + O(w^{-3}) \right],$$

burada H , birinci ya da ikinci tip Hankel fonksiyonunu göstermektedir. Birtakım matematik egzersizleri ile aşağıdaki bağıntıya ulaşılır.

$$f_v(\kappa, w) = \frac{2}{\pi w \sqrt{\kappa}} \left\{ \sin(\kappa - 1)w \left[1 - \frac{(4v^2 - 1)(4v^2 - 9)}{2(8w)^2 \kappa^2} (\kappa^2 + 1) + \frac{(4v^2 - 1)^2}{(8w)^2 \kappa} + O(w^{-4}) \right] + \cos(\kappa - 1)w \left[\frac{(4v^2 - 1)(1 - \kappa)}{8\kappa w} + O(w^{-3}) \right] \right\}.$$

$f_v(k, w)$ fonksiyonunun çiftliğinden dolayı, bu bağıntı argümanlarından bağımsız olarak tüm büyük $|w|$ değerleri için geçerlidir. C konturu üzerinde $\sin(\kappa - 1)w$, sıfırdan uzakta sınırlanmıştır ve birtakım hesaplamalarla gösterilir ki C üzerinde,

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f_v}{\partial w} = (\kappa - 1) \cot(\kappa - 1)w + \frac{(\kappa - 1)^2 (4v^2 - 1)}{8\kappa w} \quad (1.65)$$

$$+ (\kappa - 1)^2 (4v^2 - 1) \left(\frac{1}{8\kappa w} \right) \cot^2(\kappa - 1)w - \frac{1}{w} + O(s^{-2})$$

dir. Benzer şekilde,

$$g_v(\kappa, w) = \frac{2\sqrt{\kappa}}{\pi w} \left\{ \sin(\kappa - 1)w \left[1 + O(w^{-2}) \right] + \cos(\kappa - 1)w \left[\frac{(4v^2 + 3)(1 - \kappa)}{8\kappa w} + O(w^{-3}) \right] \right\},$$

ve C üzerinde şu bağıntı vardır:

$$\frac{1}{g_v} \frac{\partial g_v}{\partial w} = (\kappa - 1) \cot(\kappa - 1)w + \frac{(\kappa - 1)^2 (4v^2 + 3)}{8\kappa w} \quad (1.66)$$

$$+ (\kappa - 1)^2 (4v^2 + 3) \left(\frac{1}{8\kappa w} \right) \cot^2(\kappa - 1)w - \frac{1}{w} + O(s^{-2}) ,$$

f_v ve g_v ' nin C içinde sıfırlarının sayısı (1.65) ve (1.66)' nın kontur integrallenmesi ile sonuç bulur. Örneğin,

$$\begin{aligned} N_f &= 2s + 1 + (4v^2 - 1)(\kappa - 1)^2 \left(\frac{1}{8\kappa} \right) \left[1 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^s \frac{1}{n^2} - \frac{2}{3} \right] - 1 + O(s^{-1}) \\ &= 2s + O(s^{-1}) \end{aligned}$$

dir. (Burada, $\sum_{n=1}^s (1/n^2) = \pi^2/6 + O(s^{-1})$ eşitliği kullanılmıştır) s değerini yeterince büyük bir değer alarak, $O(s^{-1})$ ifadesinin 1' den küçük olmasını garanti altına alabiliriz. Konturun integrali tam sayı olması gerektiğinden $2s$ e eşittir.

Tam olarak (1.66)' dan kıyaslama yoluyla,

$$N_0 = 2(s + 1 - \delta_{0v}),$$

ifadesine ulaşılır. Bu da toremın ispatını tamamlar.

Mc.Mahon' un açılımları reel v için daha önceden verilmiştir. Gerçekten keyfi v ve κ değerleri için (κ , reel olmayan ve negatif bir sayı) geçerlidirler ve büyük tamsayı s değerleri için $s\pi/(\kappa - 1)$ yakınında asimtotik olarak çift $f_v(\kappa, z)$ ve $g_v(\kappa, z)$ fonksiyonlarının büyük z -sıfırlarını gösterirler. Yukarıdaki teoremin sonuçlarından yola çıkılırsa, bu Mc.Mahon ifadelerinin, sırasıyla f_v ' nin s ' inci ve g_v ' nin $(s + 1)$ ' inci ($v = 0$ ise s ' inci) sıfırının asimtotik açılımı olduklarını söyleyebiliriz.

v-sıfırları. Sabit argüman ve büyük indis için Bessel fonksiyonları için geçerli olan ifadelerle genel olarak karşılaşmamamıza rağmen, birtakım yollarla

doğru şekilde elde edilebilir. Örneğin, Γ fonksiyonu için Stirling' in bulduğu sonucun, J_v fonksiyonunun benzer seri açılımlarına uygulanması gösterir ki, düzgün olarak $|\arg v| \leq \pi - \delta$ için,

$$J_v(z) = (2\pi v)^{-1/2} \exp[v + v \log(z/2v)] [1 + O(v^{-1})]$$

dir. Bundan dolayı, $z = x$, $\mu > 0$, ve $n > 0$, için

$$J_{\pm i\mu}(x) = (2\pi\mu)^{-1/2} \exp[\mu\pi/2 \pm i(\mu + \mu \log(x/2\mu) - \pi/4)] [1 + O(\mu^{-1})] \quad (1.67)$$

ve

$$J_n(x) = (2\pi n)^{-1/2} \exp[n - n \log(2n/x)] [1 + O(n^{-1})] \quad (1.68)$$

ifadeleri yazılabilir. $N_n(x)$ için eş ifadenin türetilmesi özel ilgi gerektirir ve [3]' deki gibi düzgün asimtotik açılımlardan elde edilebilir. Özel olarak $n \rightarrow \infty$ için şu ifade yazılabilir:

$$N_n(x) = -(\pi n/2)^{-1/2} \exp[n \log(2n/x) - n] [1 + O(n^{-1})] \quad (1.69)$$

(1.68), (1.69)' eşitliklerinin sonucu olarak,

$$\begin{aligned} J_{n-1}(x) &= (2n/x) J_n(x) [1 + O(n^{-1})] \\ N_{n-1}(x) &= (x/2n) N_n(x) [1 + O(n^{-1})] \end{aligned}$$

dolayısıyla, görülür ki $n \rightarrow \infty$ koşulunda sadece

$$f_n(\kappa, x) \sim (1/n\pi) \exp[n \log \kappa] \quad (1.70)$$

değil, ek olarak uygun rekürans bağıntısıyla

$$g_n(\kappa, x) \sim -(n/\kappa\pi x^2) \exp[n \log \kappa] \quad (1.71)$$

dir. Bu (1.70) ve (1.71) asimtotik ifadelerinden açıktır ki, büyük modülüs için f_v veya g_v için reel v -sıfırları yoktur.

Herhangi ek sıfırlar saf sanal olmalıdır. $f_{i\mu}(\kappa, x) = 0$, $g_{i\mu}(\kappa, x) = 0$ ifadelerinin kökleri,

$$J_{i\mu}(x)J_{-i\mu}(\kappa x) - J_{i\mu}(\kappa x)J_{-i\mu}(x) = 0$$

ifadesininkine benzerdir. En büyük sanal v -sıfırları eğer varsa (1.67)' nin yardımıyla belirlenebilir. Sırasıyla;

$$J_{i\mu}(x)J_{-i\mu}(\kappa x) - J_{i\mu}(\kappa x)J_{-i\mu}(x) = -(i/\mu\pi)e^{\mu\pi} [\sin(\mu \log \kappa) + O(\mu^{-1})]$$

ve

$$J'_{i\mu}(x)J'_{-i\mu}(\kappa x) - J'_{i\mu}(\kappa x)J'_{-i\mu}(x) = -(i\mu/\kappa\pi x^2)e^{\mu\pi} [\sin(\mu \log \kappa) + O(\mu^{-1})]$$

Bu iki bağıntının sağ tarafları, μ ' nun sayılabilir sayıda pozitif değerleri için göz önüne çıkar. Bu nedenle, tam $f_v(\kappa, z)$ ve $g_v(\kappa, z)$ çift fonksiyonlarının her ikisi de reel $z = x$ için sınırsız sayıda sanal v -sıfırlarına sahiptirler ve bu sıfırlar asimtotik olarak;

$$\mu = \frac{s\pi}{\log \kappa} + O(s^{-1}),$$

ifadesi ile verilir. (s büyük pozitif tamsayı)

BÖLÜM 2. KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONU ve TÜREVLERİNİN SAYISAL OLARAK HESAPLANMASI

2.1. Hesaplama teknikleri

(1.6)-(1.10), (1.12) ve (1.13)' deki Kros-çarpım Bessel fonksiyonları ve türevlerinin integral gösterimleri, bilgisayar mantığında hesaplanmaları için kullanılabilen ifadelerdir.

Bu amaçla, verilen integrallere en küçük hata ile yakınsama için bazı kuadratik formüller kullanılmıştır. İlk olarak, eşit aralıklar $h = x_{m+1} - x_m, m = 1, 2, \dots, n$, için Simpson kuralının gelişmiş bir formu uygulanırsa,

$$\int_0^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} f(\phi) d\phi \cong \frac{h}{3} \left[f(0) + 4f(h) + 2f(2h) + 4f(3h) + \dots \right. \\ \left. 4f(nh) + f\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) \right]$$

ifadesine ulaşılır. Bu form hesaplama açısından çok kullanışlıdır. Genel olarak, aralık sayısı bir çift sayı olmalıdır ve integral ifadesi çift olmayan sayıda eşit aralık için irdelenmelidir. Simpson kuralı ile elde edilen birinci yaklaşımı I^S ile gösterirsek, kuadratik formülün hatası aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\left| I^S - \int_0^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} f(\phi) d\phi \right| \leq \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{180} h^4 \max \left| \frac{d^4 f(\xi)}{d\phi^4} \right|, \xi \in \left[0, \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right]$$

Bu teknik, kros-çarpım Bessel fonksiyonu (1.6), indise göre birinci türevi (1.10), argümanlara göre (1.12) ve indise göre karma türevi (1.13) için hesaplama açısından iyi sonuçlar sağlar.

(1.7)-(1.9)' daki integral gösterimler, integral ifadesinde hızlı değişen fonksiyonlar içerdiklerinden, sayısal hesaplama için özel uygun, QUAD ve QUAD8 yordamları kullanılmıştır. Bu iki yordam, verilen hata payı içinde integral sonucunu yakınsamak için sırasıyla Simpson kuralı ve Newton-Cotes 8 panel kuralını (kendi kendini çağırma yöntemi ile) kullanmaktadır. QUAD ve QUAD8 yordamlarının her ikisi de argüman olarak integral teriminin analitik ifadesini alırlar. Bu da, yüksek hassasiyete ulaşınca kadar integrasyon aralıklarının otomatik olarak yordamlarca düşürülmesine olanak sağlar.

İkinci ve çok etkili bir yol ise, (1.16), (1.18), (1.20)-(1.24)' deki Bessel fonksiyonlarının çarpımları ve (1.31), (1.34)-(1.38)' deki küresel birinci tip Bessel fonksiyonunun terimlerdeki seri açılımların kullanılmasıdır. Birinci tip Bessel fonksiyonunun hesaplanmasında, kullanılabilecek etkili yordamlar bulunmaktadır (bilinen algoritmalar için bkz Ek 2) ve bu teknik ilgilenilen kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin hesaplanmasında yüksek hassasiyet sağlar.

2.1-2.6 numaralı tablolar yapılan hesaplamaların hata miktarlarını göstermektedir. Tablolardan görüleceği gibi, hesaplama teknikleri, reel ve saf sanal indis değerleri için yüksek hassasiyet sağlamaktadırlar.

2.2. Kros-arpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin hesapları için goreceli hata tabloları

Bu kısımdaki tablolarda, kros-arpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin hesaplanmalarındaki değerler ve goreceli hata değerleri gösterilmiştir. Bulunan fonksiyon değerleri 9, goreceli hata değerleri ise 4 ondalık derecesine göre verilmiştir.

Tablo 2.1. $P_v(x, y)$ fonksiyonunun hesaplanması için göreceli hata tablosu

v	x / y = 0.4		x / y = 0.65		x / y = 0.9	
	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata
10	1.809102892 E+02	2.8865 E-15	8.758650696 E-01	1.9095 E-14	4.088381528 E-03	2.4868 E-14
9	7.629229096 E+01	1.5543 E-15	5.732137240 E-01	1.1102 E-14	3.257943013 E-03	2.1760 E-14
8	3.218031714 E+01	1.5543 E-15	3.714265213 E-01	5.7731 E-15	2.535956456 E-03	2.5313 E-14
7	1.355435436 E+01	1.7763 E-15	2.370748242 E-01	3.1086 E-15	1.915146841 E-03	1.9539 E-14
6	5.682236506 E+00	2.2426 E-14	1.478393360 E-01	1.9984 E-15	1.389251395 E-03	2.4424 E-14
5	2.354755450 E+00	9.3258 E-15	8.883796868 E-02	1.3544 E-14	9.529592710 E-04	2.2426 E-14
4	9.501508208 E-01	3.1086 E-15	5.018174569 E-02	8.8817 E-15	6.018604035 E-04	2.9976 E-14
3	3.597997239 E-01	1.5543 E-15	2.535335383 E-02	2.5535 E-14	3.324030471 E-04	3.6637 E-14
2	1.149726989 E-01	2.4202 E-14	1.014002556 E-02	2.3536 E-14	1.418595780 E-04	1.1080 E-13
1	1.909547912 E-02	1.1102 E-14	1.944552334 E-03	1.2878 E-14	2.830023511 E-05	2.8443 E-13
0	-5.971875041 E-03	1.5876 E-14	-6.391081292 E-04	9.6145 E-14	-9.425457411 E-06	9.1426 E-13
1i	-2.798647478 E-02	4.3298 E-15	-3.150645055 E-03	2.1316 E-14	-4.708754108 E-05	1.8396 E-13
2i	-7.783726524 E-02	2.1094 E-15	-1.026399658 E-02	2.4424 E-15	-1.596927503 E-04	9.6700 E-14
3i	-1.181028957 E-01	4.4408 E-16	-2.078230906 E-02	1.5543 E-15	-3.461016221 E-04	2.2426 E-14
4i	-1.159146696 E-01	4.4408 E-16	-3.292322455 E-02	1.6653 E-15	-6.044272223 E-04	3.0864 E-14
5i	-6.563881657 E-02	4.4408 E-16	-4.460181553 E-02	1.5543 E-15	-9.320532795 E-04	7.7715 E-15
6i	6.995136668 E-03	8.8817 E-15	-5.376129834 E-02	0	-1.325659325 E-03	5.2180 E-15
7i	6.189151410 E-02	2.4535 E-14	-5.869897869 E-02	1.3322 E-15	-1.781252600 E-03	6.4392 E-15
8i	7.083798072 E-02	9.0261 E-14	-5.833585047 E-02	1.3322 E-15	-2.294206416 E-03	1.3322 E-15
9i	3.513246327 E-02	1.5720 E-13	-5.238749523 E-02	6.6613 E-16	-2.859304600 E-03	6.6613 E-16
10i	-1.690026850 E-02	3.0220 E-13	-4.140988387 E-02	4.4408 E-16	-3.470791601 E-03	1.3322 E-15

Tablo 2.2. $P_v'(x, y)$ fonksiyonunun hesaplanması için göreceli hata tablosu

v	x / y = 0.4		x / y = 0.65		x / y = 0.9	
	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata
10	-1.764320155 E+03	1.9518 E-08	-6.860651043 E+00	3.9975 E-08	5.877837687 E-01	2.0569 E-08
9	-6.652853307 E+02	2.0788 E-08	-3.706541433 E+00	4.8206 E-08	5.925889418 E-01	1.8840 E-08
8	-2.470792502 E+02	2.2481 E-08	-1.837188904 E+00	6.3384 E-08	5.961765571 E-01	1.7380 E-08
7	-8.972827286 E+01	2.4864 E-08	-7.509300714 E-01	1.0114 E-07	5.987986824 E-01	1.6154 E-08
6	-3.144768318 E+01	2.8494 E-08	-1.361216851 E-01	3.6466 E-07	6.006688657 E-01	1.5134 E-08
5	-1.034875212 E+01	3.4781 E-08	1.996366773 E-01	1.6322 E-07	6.019655905 E-01	1.4301 E-08
4	-2.972683413 E+00	4.8662 E-08	3.741944893 E-01	5.7765 E-08	6.028351814 E-01	1.3637 E-08
3	-5.360586273 E-01	1.0877 E-07	4.589414867 E-01	3.1984 E-08	6.033942004 E-01	1.3132 E-08
2	1.943458097 E-01	1.2313 E-07	4.963234322 E-01	2.1119 E-08	6.037313652 E-01	1.2777 E-08
1	3.784796578 E-01	2.8747 E-08	5.105820276 E-01	1.6139 E-08	6.039090149 E-01	1.2566 E-08
0	4.090148080 E-01	1.8401 E-08	5.140755623 E-01	1.4662 E-08	6.039641437 E-01	1.2496 E-08
1i	4.268163498 E-01	1.0793 E-08	5.169667867 E-01	1.3260 E-08	6.040172343 E-01	1.2427 E-08
2i	4.178086282 E-01	4.5148 E-09	5.221856107 E-01	9.4459 E-09	6.041643103 E-01	1.2219 E-08
3i	2.646894992 E-01	2.6128 E-08	5.202843159 E-01	4.0691 E-09	6.043689875 E-01	1.1875 E-08
4i	-6.038071176 E-02	1.0897 E-07	4.983722411 E-01	2.1697 E-09	6.045712976 E-01	1.1402 E-08
5i	-4.162101052 E-01	2.7382 E-09	4.437379675 E-01	9.2037 E-09	6.046886881 E-01	1.0805 E-08
6i	-5.674684725 E-01	9.1344 E-09	3.477371328 E-01	1.8253 E-08	6.046174020 E-01	1.0093 E-08
7i	-3.695891318 E-01	2.0250 E-08	2.090590624 E-01	3.5693 E-08	6.042342203 E-01	9.2756 E-09
8i	8.652354156 E-02	4.5989 E-08	3.558925201 E-02	2.0304 E-07	6.033985436 E-01	8.3607 E-09
9i	5.036150312 E-01	5.1856 E-09	-1.556455330 E-01	3.6508 E-08	6.019547847 E-01	7.3588 E-09
10i	5.810328194 E-01	1.2347 E-08	-3.405785784 E-01	9.1325 E-09	5.997350391 E-01	6.2791 E-09

Tablo 2.3. $\dot{P}_v(x, y)$ fonksiyonunun hesaplanması için göreceli hata tablosu

v	X / y = 0.4		x / y = 0.65		x / y = 0.9	
	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata
10	1.570686981 E+03	2.2102 E-08	4.880526147 E+00	5.6423 E-08	-6.667365424 E-01	1.8152 E-08
9	5.746738499 E+02	2.4262 E-08	2.238924291 E+00	8.0131 E-08	-6.691980484 E-01	1.6700 E-08
8	2.040793464 E+02	2.7441 E-08	7.369783544 E-01	1.5865 E-07	-6.707239340 E-01	1.5464 E-08
7	6.897227496 E+01	3.2611 E-08	-8.543499831 E-02	8.9270 E-07	-6.715542023 E-01	1.4419 E-08
6	2.121290439 E+01	4.2590 E-08	-5.108003758 E-01	9.7579 E-08	-6.718919458 E-01	1.3544 E-08
5	5.159439486 E+00	7.0342 E-08	-7.110629299 E-01	4.6017 E-08	-6.719067289 E-01	1.2825 E-08
4	2.380412147 E-01	6.1275 E-07	-7.897753284 E-01	2.7481 E-08	-6.717374313 E-01	1.2251 E-08
3	-9.904002003 E-01	5.9366 E-08	-8.084344925 E-01	1.8232 E-08	-6.714945930 E-01	1.1812 E-08
2	-1.128405841 E+00	2.1385 E-08	-8.027992418 E-01	1.3110 E-08	-6.712622904 E-01	1.1503 E-08
1	-1.041632491 E+00	1.0533 E-08	-7.928300295 E-01	1.0437 E-08	-6.710995703 E-01	1.1320 E-08
0	-9.939378228 E-01	7.6364 E-09	-7.885024256 E-01	9.5990 E-09	-6.710414604 E-01	1.1259 E-08
1i	-9.390405965 E-01	4.9478 E-09	-7.836974787 E-01	8.7839 E-09	-6.709814212 E-01	1.1198 E-08
2i	-7.423320488 E-01	2.5619 E-09	-7.665632677 E-01	6.4617 E-09	-6.707897604 E-01	1.1016 E-08
3i	-3.626024421 E-01	1.9233 E-08	-7.297744973 E-01	2.9135 E-09	-6.704320464 E-01	1.0716 E-08
4i	1.432562264 E-01	4.6323 E-08	-6.637084057 E-01	1.6357 E-09	-6.698515508 E-01	1.0301 E-08
5i	5.797855608 E-01	1.9848 E-09	-5.596983187 E-01	7.3268 E-09	-6.689702253 E-01	9.7776 E-09
6i	7.087965335 E-01	7.3732 E-09	-4.134716463 E-01	1.5415 E-08	-6.676900506 E-01	9.1498 E-09
7i	4.277752793 E-01	1.7644 E-08	-2.279410444 E-01	3.2873 E-08	-6.658947393 E-01	8.4255 E-09
8i	-1.131966674 E-01	3.5467 E-08	-1.462354545 E-02	4.9621 E-07	-6.634517701 E-01	7.6119 E-09
9i	-5.726270380 E-01	4.5952 E-09	2.067731046 E-01	2.7597 E-08	-6.602147243 E-01	6.7164 E-09
10i	-6.394524496 E-01	1.1313 E-08	4.106854739 E-01	7.6068 E-09	-6.560258942 E-01	5.7464 E-09

Tablo 2.4. $\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonunun hesaplanması için göreceli hata tablosu

v	x / y = 0.4		x / y = 0.65		x / y = 0.9	
	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata
10	1.562805401 E+02	1.9984 E-15	3.680249835 E-01	3.2640 E-14	8.873562363 E-04	3.3306 E-16
9	6.585052973 E+01	8.8817 E-16	2.454845552 E-01	1.9317 E-14	7.749123441 E-04	6.6613 E-16
8	2.778964143 E+01	2.2204 E-16	1.635715720 E-01	1.3766 E-14	6.702721051 E-04	4.4408 E-16
7	1.174150591 E+01	0	1.087919167 E-01	7.3274 E-15	5.723899160 E-04	5.5511 E-16
6	4.963672658 E+00	4.7739 E-14	7.211961179 E-02	3.5527 E-15	4.802852663 E-04	7.7715 E-16
5	2.097165688 E+00	1.5987 E-14	4.750488308 E-02	1.5543 E-15	3.930332869 E-04	9.9920 E-16
4	8.837221192 E-01	6.4392 E-15	3.087640465 E-02	4.4408 E-16	3.097558366 E-04	5.5511 E-16
3	3.695857365 E-01	1.5543 E-15	1.947128691 E-02	2.2204 E-16	2.296130430 E-04	5.5511 E-16
2	1.505238559 E-01	2.2204 E-16	1.138132625 E-02	1.1102 E-16	1.517952127 E-04	3.3306 E-16
1	5.333858297 E-02	6.6613 E-16	5.240221061 E-03	3.3306 E-16	7.551503469 E-05	6.6613 E-16
0	0	0	0	0	0	0
1i	4.112364946 E-02	3.1086 E-15	4.951722436 E-03	2.8865 E-15	7.526059927 E-05	3.7747 E-15
2i	5.186356026 E-02	5.5511 E-16	9.072262644 E-03	3.5527 E-15	1.497597260 E-04	1.3322 E-15
3i	2.276991975 E-02	5.3290 E-15	1.166247680 E-02	3.8857 E-15	2.227432258 E-04	2.2204 E-16
4i	-2.816095994 E-02	1.5543 E-15	1.226622579 E-02	3.4416 E-15	2.934715097 E-04	1.5543 E-15
5i	-6.778707780 E-02	2.2204 E-16	1.074260028 E-02	2.6645 E-15	3.612266607 E-04	1.9984 E-15
6i	-7.031252222 E-02	6.6613 E-16	7.287986055 E-03	6.6613 E-16	4.253193310 E-04	6.2172 E-15
7i	-3.445357963 E-02	1.3544 E-14	2.404627429 E-03	2.8865 E-15	4.850953629 E-04	5.1070 E-15
8i	1.629581688 E-02	4.4408 E-16	-3.179065715 E-03	1.1102 E-15	5.399420698 E-04	4.4408 E-15
9i	5.002148431 E-02	3.5527 E-15	-8.623520108 E-03	4.4408 E-16	5.892941168 E-04	1.5543 E-15
10i	4.772937484 E-02	2.2204 E-16	-1.310979150 E-02	8.8817 E-16	6.326389437 E-04	2.2204 E-16

Tablo 2.5. $\ddot{P}_v(x, y)$ fonksiyonunun hesaplanması için göreceli hata tablosu

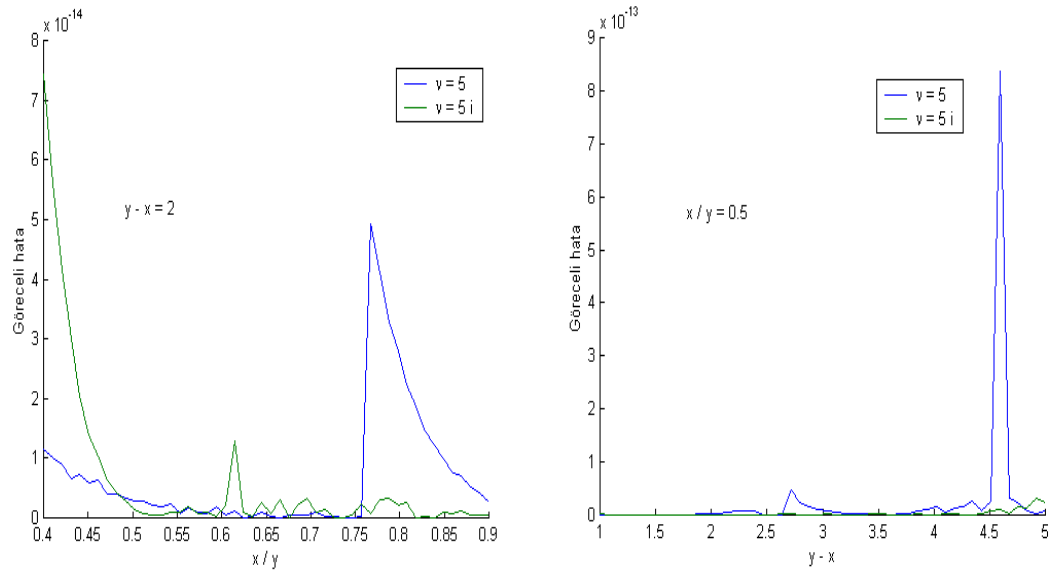
v	X / y = 0.4		x / y = 0.65		x / y = 0.9	
	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata
10	-1.531805858 E+04	3.1086 E-15	-3.776643965 E+01	4.4408 E-16	3.274604367 E+00	7.3274 E-15
9	-5.011275575 E+03	1.5543 E-15	-1.377039950 E+01	1.3322 E-15	2.678188405 E+00	7.1054 E-15
8	-1.566900938 E+03	1.5543 E-15	-2.554163386 E+00	1.5543 E-15	2.135234554 E+00	8.8817 E-16
7	-4.565586829 E+02	2.2204 E-15	1.980135995 E+00	2.4424 E-15	1.649468996 E+00	9.7699 E-15
6	-1.173290585 E+02	1.4432 E-15	3.211701119 E+00	3.3306 E-15	1.223805221 E+00	1.3322 E-15
5	-2.250275340 E+01	4.4408 E-16	2.964166419 E+00	1.5543 E-15	8.604928782 E-01	1.3100 E-14
4	-3.181988560 E-01	9.5479 E-15	2.187153564 E+00	1.5543 E-15	5.612410252 E-01	2.5757 E-14
3	2.601995694 E+00	3.5527 E-15	1.351325172 E+00	1.5543 E-15	3.273183627 E-01	4.4186 E-14
2	1.617634628 E+00	1.5543 E-15	6.742264187 E-01	5.3290 E-15	1.596325032 E-01	4.0634 E-14
1	5.785684162 E-01	2.2204 E-15	2.468337853 E-01	1.6653 E-14	5.878995685 E-02	1.5365 E-13
0	2.094053609 E-01	3.3306 E-15	1.018349018 E-01	1.1546 E-14	2.513809125 E-02	2.4957 E-13
1i	-1.603224814 E-01	3.4416 E-15	-4.417384561 E-02	4.7073 E-14	-8.532388701 E-03	2.8369 E-12
2i	-1.222190900 E+00	2.5535 E-15	-4.867921324 E-01	4.8849 E-15	-1.096541545 E-01	2.1438 E-13
3i	-2.618967719 E+00	3.3306 E-16	-1.231552855 E+00	3.3306 E-15	-2.785500546 E-01	2.7311 E-14
4i	-3.421782801 E+00	8.8817 E-16	-2.263171020 E+00	1.2212 E-15	-5.157312432 E-01	1.9206 E-14
5i	-2.498096933 E+00	6.6613 E-16	-3.518362070 E+00	3.1086 E-15	-8.218573938 E-01	1.1213 E-14
6i	4.381675245 E-01	7.7715 E-16	-4.864192141 E+00	2.2204 E-16	-1.197682191 E+00	4.1078 E-15
7i	3.993821091 E+00	2.5535 E-15	-6.092637354 E+00	1.5543 E-15	-1.643985275 E+00	4.4408 E-16
8i	5.583029820 E+00	1.5543 E-14	-6.938517049 E+00	1.1102 E-15	-2.161492104 E+00	6.6613 E-16
9i	3.327439557 E+00	7.7715 E-15	-7.121955819 E+00	1.1102 E-15	-2.750783487 E+00	4.4408 E-16
10i	-1.996528401 E+00	2.2204 E-15	-6.409437486 E+00	0	-3.412196780 E+00	2.2204 E-16

Tablo 2.6. $\frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonunun hesaplanması için göreceli hata tablosu

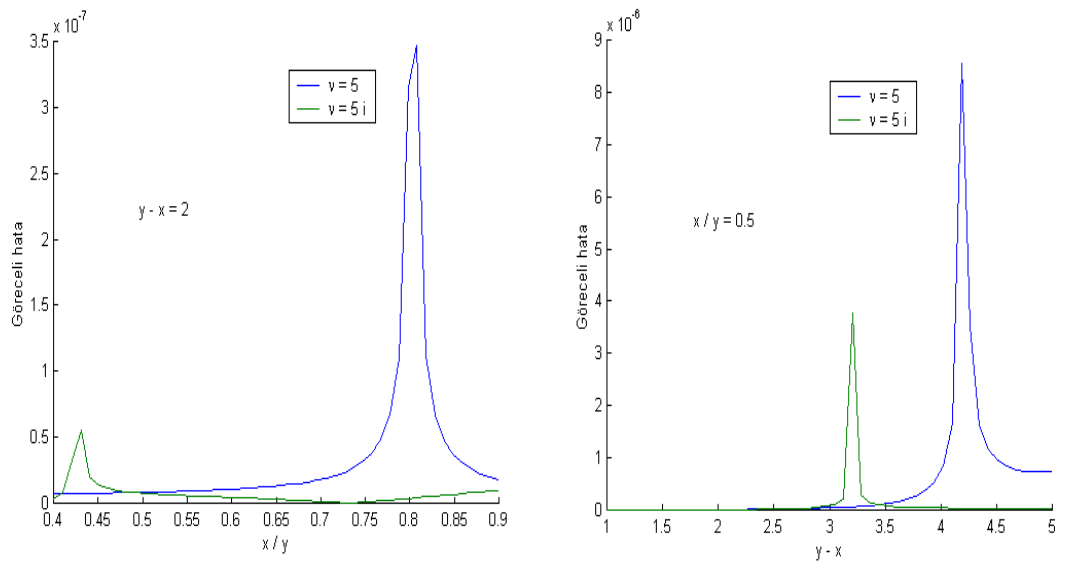
v	x / y = 0.4		x / y = 0.65		x / y = 0.9	
	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata	Hesaplanan değer	Göreceli hata
10	-1.684805385 E+04	8.8817 E-16	-3.345388789 E+01	2.1316 E-14	6.216673250 E-01	7.7715 E-15
9	-5.697876438 E+03	8.8817 E-16	-1.628241842 E+01	7.9936 E-15	5.703820249 E-01	7.1054 E-15
8	-1.867976183 E+03	2.2204 E-16	-7.134794309 E+00	6.6613 E-16	5.149075962 E-01	5.9952 E-15
7	-5.855046105 E+02	2.2204 E-16	-2.478356827 E+00	2.8865 E-15	4.561404127 E-01	5.3290 E-15
6	-1.710000459 E+02	1.3322 E-14	-2.777987549 E-01	4.5519 E-14	3.948142428 E-01	4.4408 E-15
5	-4.391476714 E+01	8.7707 E-15	6.209143957 E-01	6.8833 E-15	3.315272667 E-01	3.9968 E-15
4	-8.215282296 E+00	2.5535 E-14	8.582721170 E-01	2.8865 E-15	2.667663065 E-01	3.5527 E-15
3	1.858181544 E-01	4.5075 E-14	7.791428110 E-01	1.1102 E-15	2.009287464 E-01	3.3306 E-15
2	1.256955849 E+00	2.4424 E-15	5.609771443 E-01	8.2156 E-15	1.343425847 E-01	3.5527 E-15
1	7.338098540 E-01	4.4408 E-16	2.888868864 E-01	5.7731 E-15	6.728502600 E-02	3.3306 E-15
0	0	0	0	0	0	0
1i	7.363073992 E-01	3.1086 E-15	2.929276374 E-01	5.7731 E-15	6.735948348 E-02	7.9936 E-15
2i	1.334318053 E+00	1.7763 E-15	5.936139382 E-01	3.5527 E-15	1.349382611 E-01	5.5511 E-15
3i	1.298591646 E+00	7.7715 E-15	8.938404251 E-01	6.6613 E-16	2.029393965 E-01	5.1070 E-15
4i	9.828799173 E-02	1.4432 E-14	1.159236075 E+00	1.1102 E-15	2.715338375 E-01	3.7747 E-15
5i	-2.010431778 E+00	4.4408 E-16	1.329099160 E+00	2.2204 E-15	3.408452156 E-01	5.9952 E-15
6i	-3.622252380 E+00	1.2212 E-15	1.327594654 E+00	1.7763 E-15	4.109356594 E-01	3.9968 E-15
7i	-3.022724519 E+00	8.6597 E-15	1.084376879 E+00	6.6613 E-16	4.817929314 E-01	3.7747 E-15
8i	1.950768436 E-01	5.9952 E-15	5.596886861 E-01	2.8865 E-15	5.533191798 E-01	1.9984 E-15
9i	4.190860812 E+00	2.2204 E-15	-2.328927524 E-01	1.7763 E-15	6.253215660 E-01	1.3322 E-15
10i	5.820779757 E+00	2.2204 E-16	-1.213113428 E+00	1.3322 E-15	6.975049989 E-01	8.8817 E-16

2.3. Kros-arpım Bessel fonksiyonu ve trevlerinin hesapları için greceli hata grafikleri

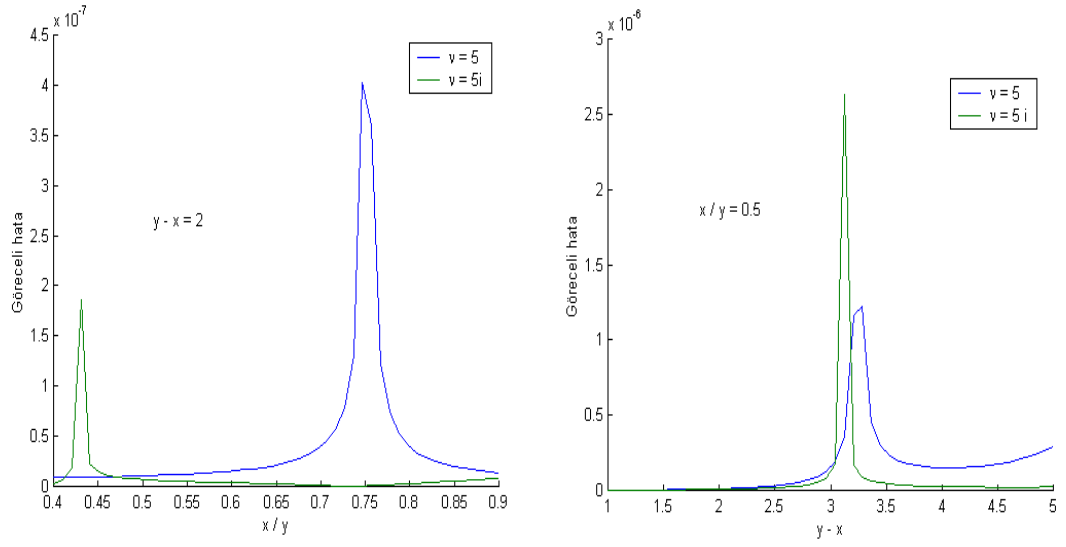
2.1-2.6 numaralı ekteki grafiklerde, kros-arpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin hesaplanmalarındaki göreceli hata payları görselleştirilmiştir.



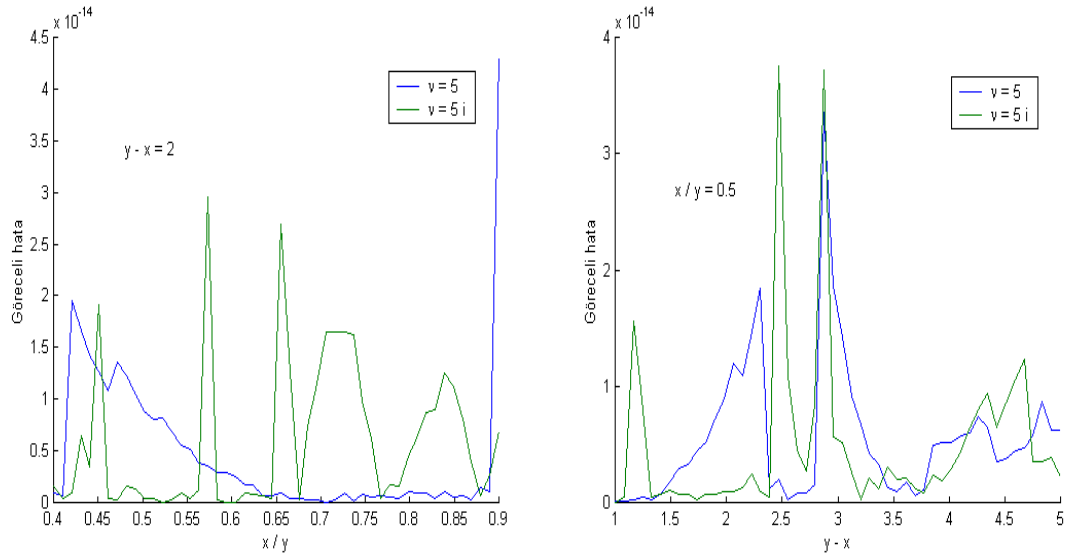
Grafik 2.1. $P_v(x, y)$ fonksiyonunun seri açılımı ile hesaplanması için göreceli hata grafiği



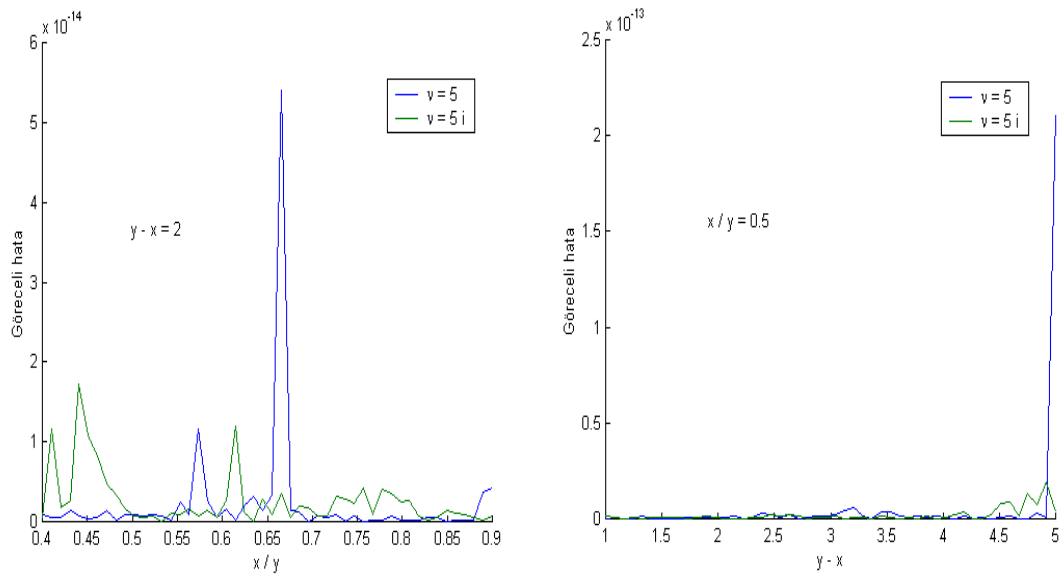
Grafik 2.2. $P'_v(x, y)$ fonksiyonunun seri açılımı ile hesaplanması için göreceli hata grafiği



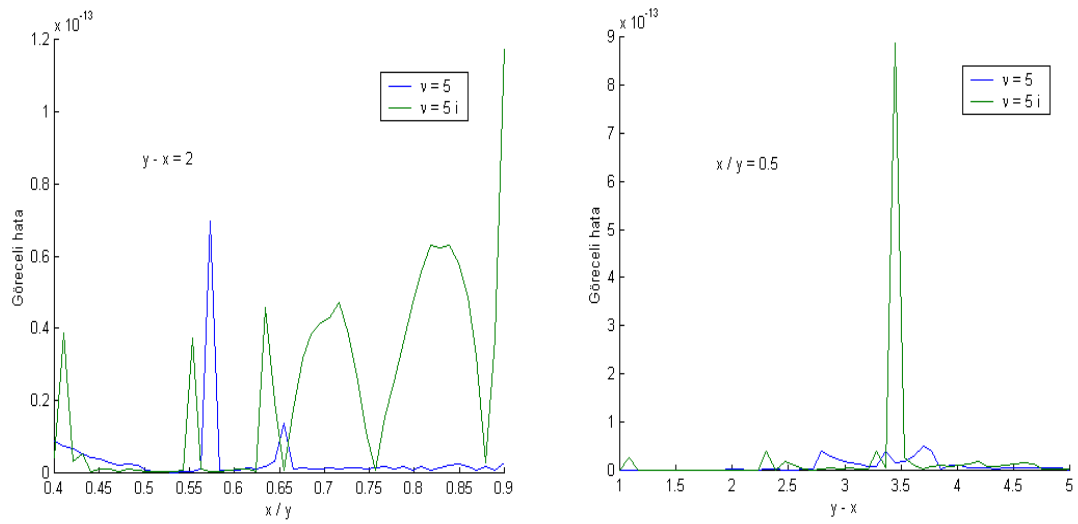
Grafik 2.3. $\dot{P}_v(x, y)$ fonksiyonunun seri açılımı ile hesaplanması için göreceli hata grafiği



Grafik 2.4. $\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonunun seri açılımı ile hesaplanması için göreceli hata grafiği



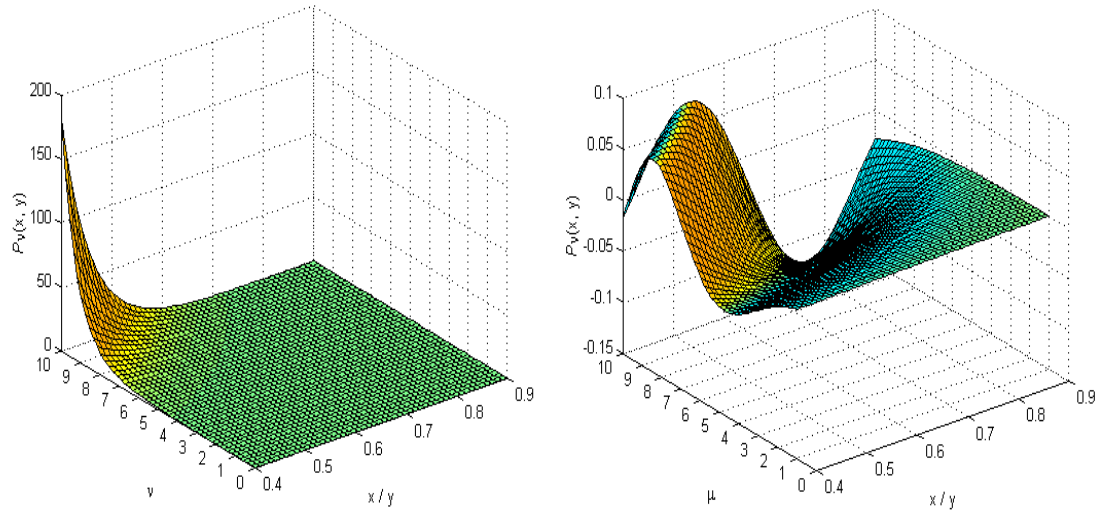
Grafik 2.5. $\ddot{P}_v(x, y)$ fonksiyonunun seri açılımı ile hesaplanması için göreceli hata grafiği



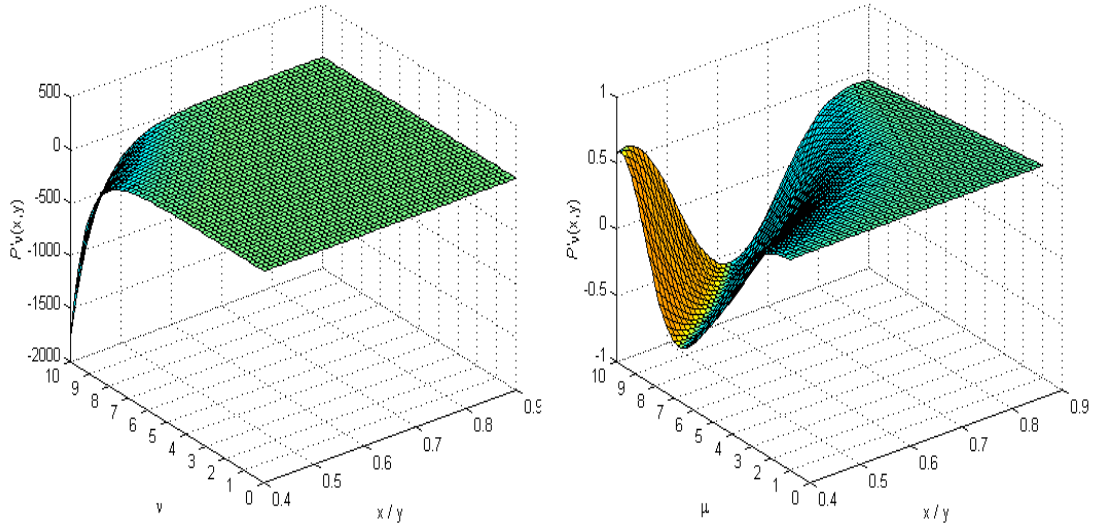
Grafik 2.6. $\frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v}$ fonksiyonunun seri açılımı ile hesaplanması için göreceli hata grafiği

BÖLÜM 3. KROS-ÇARPIM BESSEL FONKSİYONU ve TÜREVLERİNİN GRAFİKLERİ

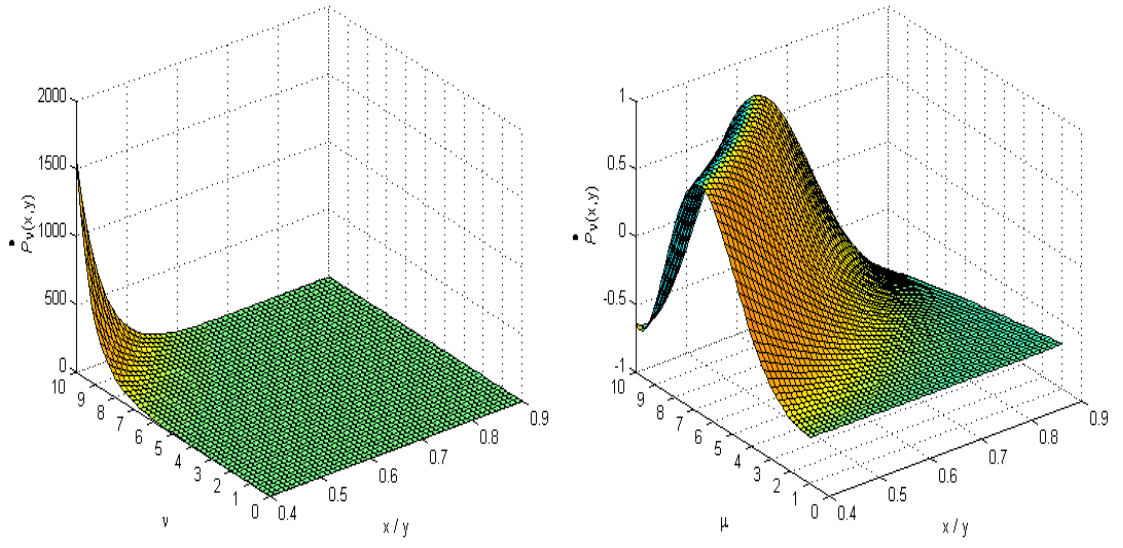
2.7-2.12 numaralı ekteki grafiklerde kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin grafikleri verilmiştir. Sunulan grafikler, fonksiyonun değerlerinin argüman ve indise göre dağılımını daha iyi göstermek amacı ile üç boyutlu çizilmiştir.



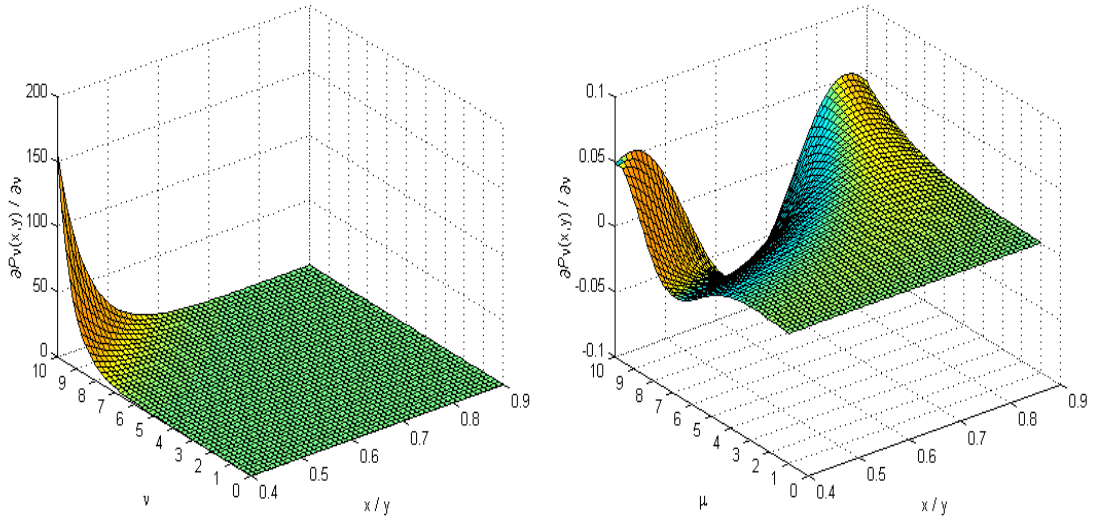
Grafik 2.7. Fonksiyon $P_v(x, y)$, $y - x = \pi$. (a) Reel indis v ,
(b) Saf sanal indis $v=i\mu$



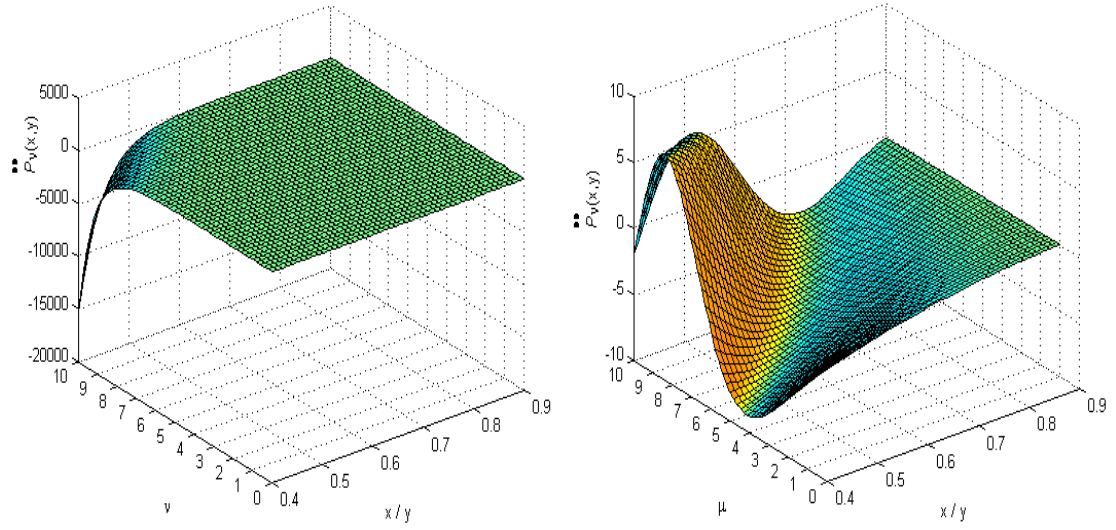
Grafik 2.8. Fonksiyon $P'_v(x, y)$, $y - x = \pi$. (a) Reel indis v ,
(b) Saf sanal indis $v=i\mu$



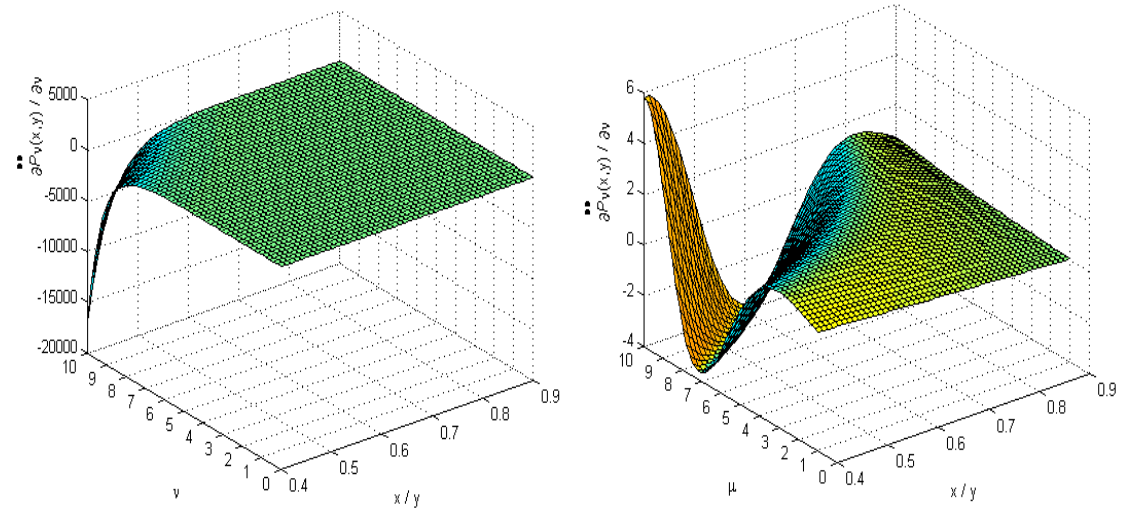
Grafik 2.9. Fonksiyon $\dot{P}_v(x, y)$, $y - x = \pi$. (a) Reel indis v ,
(b) Saf sanal indis $v=i\mu$



Grafik 2.10. Fonksiyon $\frac{\partial P_v(x, y)}{\partial v}$, $y - x = \pi$. (a) Reel indis v ,
(b) Saf sanal indis $v=i\mu$



Grafik 2.11. Fonksiyon $\ddot{P}_v(x, y)$, $y - x = \pi$. (a) Reel indis v ,
(b) Saf sanal indis $v=i\mu$



Grafik 2.12. Fonksiyon $\frac{\partial \ddot{P}_v(x, y)}{\partial v}$, $y - x = \pi$. (a) Reel indis v ,
(b) Saf sanal indis $v=i\mu$

BÖLÜM 4. KROS-ÇARPIM BESSEL

FONKSİYONLARININ UYGULAMALARI

4.1. Kapalı $\rho \in [r, R]$ aralığı için Sturm-Liouville problemi

Kapalı $\rho \in [r, R]$ aralığı için, homojen sınır koşulları altında aşağıdaki homojen denklemin bir çözümünü düşüneceğiz. (k^2 reel bir değer)

$$\left[\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + (k^2 \rho^2 - v^2) \right] U_v(k\rho) = 0 \quad (4.1)$$

Düşünülen problem, ikinci tip kendine eş lineer diferansiyel denklem için Sturm – Liouville problemidir. L_2 uzayındaki Hermite operatörlerinin bilinen teoremleri, (4.1) denkleminin öz değer ve öz vektörlerini tam olarak ifade eder.

Varsayalım ki, $U_\mu(\chi\rho)$, uygun sınır koşulları altında (4.1) denkleminin başka bir çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$\begin{aligned} \int_r^R \left[(k^2 - \chi^2) \rho - \frac{v^2 - \mu^2}{\rho} \right] U_v(k\rho) \bar{U}_\mu(\chi\rho) d\rho &= \\ &= -\rho \left[k U'_v(k\rho) \bar{U}_\mu(\chi\rho) - \chi U_v(k\rho) \bar{U}'_\mu(\chi\rho) \right]_r^R \end{aligned} \quad (4.2)$$

Bu bağıntıdan çıkarılacağı üzere, homojen sınır koşulları altında (4.1) denkleminin çözümleri tam olarak iki ortogonal öz fonksiyonlar sistemi oluşturur. Bunlardan birincisi,

$$\int_r^R U_v(k\rho) \bar{U}_v(\chi\rho) \rho d\rho = \begin{cases} 0, & k \neq \chi \\ \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 |U'_v(k\rho)|^2 + \left(\rho^2 - \frac{v^2}{k^2} \right) |U_v(k\rho)|^2 \right\}_r^R & k = \chi \end{cases} \quad (4.3)$$

ve ikincisi

$$\int_r^R U_\nu(k\rho) \bar{U}_\mu(k\rho) \frac{d\rho}{\rho} = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu \\ \frac{k\rho}{2\nu} \left\{ \bar{U}_\nu(k\rho) \frac{\partial U'_\nu(k\rho)}{\partial \nu} - \frac{\partial U_\nu(k\rho)}{\partial \nu} \bar{U}'_\nu(k\rho) \right\}_r^R & \nu = \mu \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklindedir. İleride her iki öz fonksiyon sistemi paralel şekilde düşünülecektir.

Sıfırdan farklı Wronskian değerinden dolayı, (4.1) denkleminin çözümleri, lineer bağımsız birinci ve ikinci tip silindirik fonksiyonların kombinasyonu olarak düşünülebilir.

$$J_\nu(k\rho)N'_\nu(k\rho) - J'_\nu(k\rho)N_\nu(k\rho) = \frac{2}{\pi k\rho} \quad (4.5)$$

Bundan dolayı, diğer çözüm,

$$U_\nu(k\rho) = C_1 J_\nu(k\rho) + C_2 N_\nu(k\rho) \quad (4.6)$$

şeklindedir. Burada C_1 ve C_2 , ν indisine bağlı değerlerdir..

Eğer, $\rho \in [r, R]$ aralığının uç noktalarında Dirichlet sınır koşulları verilirse,

$$U_\nu(kr) = U_\nu(kR) = 0 \quad (4.7)$$

C_1 ve C_2 skalerleri şu denklem sistemi ile belirlenebilir:

$$\begin{cases} C_1 J_\nu(kr) + C_2 N_\nu(kr) = 0 \\ C_1 J_\nu(kR) + C_2 N_\nu(kR) = 0 \end{cases}$$

buradan,

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{J_\nu(kr)}{N_\nu(kr)} = -\frac{J_\nu(kR)}{N_\nu(kR)} \quad (4.8)$$

(4.8) değerlerinin (4.6) ' da yerine koyarsak,

$$U_\nu(k\rho) = C_1 \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J_\nu(kr)}{N_\nu(kr)} N_\nu(k\rho) \right]$$

ya da

$$U_v(k\rho) = C_1 \left[J_v(k\rho) - \frac{J_v(kR)}{N_v(kR)} N_v(k\rho) \right]$$

elde ederiz. Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alırsak,

$$P_v(x, y) = J_v(x)N_v(y) - J_v(y)N_v(x) \quad (4.9)$$

buradan,

$$U_v(k\rho) = A_v P_v(k\rho, kR) \quad (4.10)$$

$$= B_v P_v(k\rho, kR) \quad (4.11)$$

$$A_v = \frac{C_1}{N_v(kR)}, B_v = \frac{C_1}{N_v(kR)}$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) gösterimleri, aşağıdaki gibi yazılabileceğimiz (4.8) bağıntısından dolayı eştir:

$$P_v(kr, kR) = 0 \quad (4.12)$$

İlgilenilen fonksiyonun L_2 uzayındaki formu,

$$\|P_v\|_y = \left[\int_{kr}^{kR} |P_v(x, y)|^2 \Omega(x) dx \right]^{1/2}$$

biçimindedir. Burada, $\Omega(x) = x^{\pm 1}$ fonksiyonu ağırlık fonksiyonudur. Buradan

$U_v(k\rho)$ çözümü için normalize koşullar şu formu alır:

$$A_v^{-1} = \|P_v\|_{kr}, \quad B_v^{-1} = \|P_v\|_{kR} \quad (4.13)$$

Şimdi, $D_v = \frac{B_v}{A_v}$ yeni gösterimini göz önüne alalım. (4.10) ve (4.13)

bağıntılarından,

$$D_v = \frac{P_v(k\rho, kR)}{P_v(k\rho, kR)} = \frac{N_v(kr)}{N_v(kR)} = \frac{J_v(kr)}{J_v(kR)} = \frac{\|P_v\|_{kr}}{\|P_v\|_{kR}} \quad (4.14)$$

yazılabilir. Bu yazım, $P_v(x, y)$ fonksiyonunun argümanlarına göre türevinin gösterimi için uygundur. (4.5) bağıntısı göz önüne alınırsa,

$$\left. \frac{1}{k} \frac{\partial U_v(k\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=r} = A_v \left. \frac{\partial P_v(k\rho, kr)}{\partial(k\rho)} \right|_{\rho=r} = -\frac{2A_v}{\pi kr}$$

ve

$$\left. \frac{1}{k} \frac{\partial U_v(k\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=r} = B_v \left. \frac{\partial P_v(k\rho, kR)}{\partial(k\rho)} \right|_{\rho=r}$$

yazılabilir. Bu ifadeler eşitlenirse,

$$kr \left. \frac{\partial P_v(k\rho, kr)}{\partial(k\rho)} \right|_{\rho=r} = -\frac{2}{\pi} D_v^{-1} \quad (4.15)$$

elde edilir. Benzer yolla ikinci bağıntı bulunur.

$$kR \left. \frac{\partial P_v(k\rho, kr)}{\partial(k\rho)} \right|_{\rho=R} = -\frac{2}{\pi} D_v \quad (4.16)$$

(4.3) koşulunu sağlayan birinci fonksiyon sistemi için, $P_v(x, y)$ fonksiyonunun normunun karesi

$$\begin{aligned} \int_r^R |P_v(k\rho, kr)|^2 \rho d\rho &= \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left[\frac{\partial P_v(k\rho, kr)}{\partial(k\rho)} \right]^2 \right\}_r^R = \\ &= \frac{R^2}{2} \left[\frac{\partial P_v(k\rho, kr)}{\partial(k\rho)} \right]_{\rho=R}^2 - \frac{r^2}{2} \left[\frac{\partial P_v(k\rho, kr)}{\partial(k\rho)} \right]_{\rho=r}^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklindedir. (4.5) ve (4.16) bağıntıları kullanılırsa,

$$\|P_v\|_{kr}^2 = \frac{1}{2k^2} \left(-\frac{2}{\pi} D_v \right)^2 - \frac{r^2}{2} \left(-\frac{2}{\pi kr} \right)^2 = \frac{2}{\pi^2 k^2} (D_v^2 - 1) \quad (4.18)$$

formülü elde edilir. Benzer yolla, $P_v(k\rho, kR)$ fonksiyonunun normu bulunabilir. Bununla beraber, (4.14) kullanılarak, (4.18) den

$$\|P_v\|_{kR}^2 = \frac{2}{k^2 \pi^2} (1 - D_v^{-2}) \quad (4.19)$$

yazılır. (4.4) koşulunu sağlayan ikinci fonksiyon sistemi için $P_v(x, y)$ fonksiyonunun normunun karesi aşağıdaki şekildedir.

$$\|P_v\|_{kr}^2 = -\frac{D_v}{\pi v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} [P_v(k\rho, kr)]_{\rho=R} = \left[k\rho \frac{\partial P_v(k\rho, kr)}{\partial(k\rho)} \cdot \frac{\partial P_v(k\rho, kr)}{2v\partial v} \right]_{\rho=R} \quad (4.20)$$

$$\|P_v\|_{kR}^2 = -\frac{D_v^{-1}}{\pi v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} [P_v(k\rho, kR)]_{\rho=r} = \left[k\rho \frac{\partial P_v(k\rho, kR)}{\partial(k\rho)} \cdot \frac{\partial P_v(k\rho, kR)}{2v\partial v} \right]_{\rho=r} \quad (4.21)$$

$P_v(x, y)$ fonksiyonunun normu için ihtiyaç duyulan ifadeler, (4.14)-(4.16) formüllerindeki D_v 'nin uygun değerlerinin (4.18)-(4.21) bağıntılarında yerine konması ile bulunabilir.

Neumann sınır koşulları altında,

$$U'_v(kr) = U'_v(kR) = 0 \quad (4.22)$$

çözümü şu şekilde yazmak mümkündür:

$$U_v(k\rho) = C_v \dot{P}_v(k\rho, kr) \quad (4.23)$$

burada $C_v = \frac{C_1}{N'_v(kr)}$ ve $\dot{P}_v(x, y) \equiv \frac{\partial P_v(x, y)}{\partial y}$ dir. Aşağıdaki eşitlikten dolayı

$$J'_v(kr)N'_v(kR) = J'_v(kR)N'_v(kr) \quad (4.24)$$

çözüm ayrıca $F_v = \frac{C_1}{N'_v(kR)}$ olmak üzere şu formda yazılabilir:

$$U_v(k\rho) = F_v \dot{P}_v(k\rho, kR) \quad (4.25)$$

tanımdan,

$$\ddot{P}_v(x, y) \equiv \frac{\partial^2 P_v(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \dot{P}_v(x, y)}{\partial x}$$

(4.24) koşulu,

$$\ddot{P}_v(kr, kR) = 0 \quad (4.26)$$

formuna dönüşür. Önceki duruma benzer şekilde $\dot{D}_v = \frac{F_v}{C_v}$ gösterimi ile (4.23)

ve (4.25) bağıntılarından,

$$\dot{D}_v = \frac{\dot{P}_v(k\rho, kr)}{\dot{P}_v(k\rho, kR)} = \frac{N'_v(kr)}{N'_v(kR)} = \frac{J'_v(kr)}{J'_v(kR)} = \frac{\|\dot{P}_v\|_{kr}}{\|\dot{P}_v\|_{kR}} \quad (4.27)$$

yazılır ve buradan,

$$kr \cdot \dot{P}_v(kr, kR) = \frac{2}{\pi} \dot{D}_v^{-1} \quad (4.28)$$

$$kR \cdot \dot{P}_v(kR, kr) = \frac{2}{\pi} \dot{D}_v \quad (4.29)$$

bulunur.

(4.3)' deki ortogonalite koşulunu sağlayan birinci fonksiyon sistemi için $P_v(x, y)$ fonksiyonunun normunun karesi şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \int_r^R \left| \dot{P}_v(k\rho, kr) \right|^2 \rho d\rho &= \left\{ \frac{k^2 \rho^2 - v^2}{2k^2} \dot{P}_v^2(k\rho, kr) \right\}_r^R = \\ &= \frac{k^2 R^2 - v^2}{2k^2} \left[\frac{2\dot{D}_v}{\pi kR} \right]^2 - \frac{k^2 r^2 - v^2}{2k^2} \left[\frac{2}{\pi kr} \right]^2 \end{aligned}$$

Bundan dolayı birinci durum için,

$$\|\dot{P}_v\|_{kr}^2 = \frac{2}{\pi^2 k^2} \left\{ \dot{D}_v^2 \left[1 - \left(\frac{v}{kR} \right)^2 \right] - \left[1 - \left(\frac{v}{kr} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.30)$$

yazılır. (4.27) ' den ise

$$\|\dot{P}_v\|_{kR}^2 = \frac{2}{\pi^2 k^2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{v}{kR} \right)^2 \right] - \dot{D}_v^{-2} \left[1 - \left(\frac{v}{kr} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.31)$$

bulunur.

Son olarak, (4.4) ortogonallik koşulun sağlayan ikinci fonksiyon sistemi için $P_v(x, y)$ fonksiyonunun normunun karesi şu formdadır:

$$\|\dot{P}_v\|_{kr}^2 = \frac{\dot{D}_v}{\pi v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[\ddot{P}_v(k\rho, kr) \right]_{\rho=R} = \left[k\rho \dot{P}_v(k\rho, kr) \frac{\partial \ddot{P}_v(k\rho, kr)}{2v\partial v} \right]_{\rho=R} \quad (4.32)$$

$$\|\dot{P}_v\|_{kR}^2 = -\frac{D_0^{-1}}{\pi v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[\ddot{P}_v(k\rho, kr) \right]_{\rho=r} = -\left[k\rho \dot{P}_v(k\rho, kr) \frac{\partial \ddot{P}_v(k\rho, kr)}{2v\partial v} \right]_{\rho=r} \quad (4.33)$$

$\dot{P}_v(x, y)$ fonksiyonunun normu için gereken ifade, (4.27)-(4.29) bağıntılarındaki uygun $\dot{D}_v$ değerlerinin (4.30)-(4.33) formüllerinde yerine konması ile belirlenir.

Not edilmelidir ki, (4.18)-(4.21) ve (4.30)-(4.33) ifadeleri sadece sırasıyla (4.12) ve (4.26) koşullarında pozitif değerler sağlar.

Bundan dolayı, (4.1) denkleminin Dirichlet ve Neumann sınır koşulları probleminin özfonksiyonları, $P_v(x, y)$ fonksiyonu ve türevi ile ifade edilebilir.

SONUÇLAR

Çalışmada kros-çarpım Bessel fonksiyonların ve sıfırlarının irdelenmesi probleminin analitik ve sayısal araştırma sonuçları kombine edilmiştir.

Kros-çarpım Bessel fonksiyonlarının argümanlara ve indise göre (üçüncü dereceye kadar) türevleri elde edilmiştir. İntegral gösterimler baz alınarak, fonksiyonların ve tüm türevlerinin ana özellikleri açıklanmıştır.

İlgilenilen fonksiyonların tamsayı indis için birinci Neumann seri gösterimleri elde edilmiştir. Bu gösterimlerin yakınsak özellikleri analitik olarak araştırılmış, argümanlara göre ve saf sanal indis değerlerine göre mutlak ve düzgün yakınsadıkları bulunmuştur. Bu seriler üssel olarak hızlı yakınsaklık özelliğine sahiptirler.

Fonksiyonların birinci tip küresel Bessel fonksiyonları terimleri ile ikinci Neumann seri gösterimleri elde edilmiştir. Serilerin yakınsak özellikleri analitik olarak analiz edilmiştir. Bulunduğu üzere, argümanlara göre ve sadece reel indis değerlerine göre mutlak ve düzgün yakınsamaktadırlar. Bu seriler de üssel olarak hızlı yakınsaklık özelliğine sahiptirler. Bu sebeple, birinci Neumann serileri için tamamlayıcı özellik taşırlar.

Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin düzgün asimtotik açılımları, büyük mutlak indis değerli Bessek fonksiyonları için Olver açılımları yardımıyla elde edilmiştir.

Kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve karma türevi için k - sıfırları ve v -sıfırlarının yaklaşımları sunulmuştur.

Tüm elde edilen gösterimler basit bir şekilde kros-çarpım Bessel fonksiyonu ve türevlerinin sayısal olarak irdelenmesi için kullanılmıştır. Bulunan sonuçlar ve hesaplamadaki hata payları grafikleştirilmiştir.

Bessel fonksiyonunun kapalı $\rho \in [r, R]$ aralığında Sturm-Liouville probleminin ortonormalize özfonksiyonlarının iki sistemi ele alınmıştır.

Birinci tip Bessel fonksiyonunun hesaplama yöntemlerinin hassasiyet sağlamada etkinlikleri açısından kıyaslaması yapılmıştır.

EKLER

Ek 1. Birinci tip Bessel fonksiyonunun hesaplanma yöntemleri

Birinci tip Bessel fonksiyonunun hesaplanması için, Kuvvet Serileri Metodu, Rasyonel Metod (Rekürans tekniğini de içeren) ve Rekürans Metodu olmak üzere üç yöntem ele alınacaktır.

- **Kuvvet Serileri Metodu**

Herhangi bir reel ν değeri için $J_\nu(z)$ Bessel fonksiyonu seriler gösterimi yardımıyla,

$$J_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^m z^{2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$

şeklinde tanımlanabilir. Eğer $\nu = n$ ise, Bessel fonksiyonunun tanımı aşağıdaki gibidir:

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+n}}{2^{2m+n} m! (m+n)!}$$

Paydadaki faktöriyelerden dolayı, bütün z değerleri için bu seriler yakınsarlar. 0 ve 1 arasındaki değerler için Kuvvet Serileri metodunun hassasiyeti çok yüksektir. Ama $z \geq 1$ değerleri için bu metodun hassasiyeti düşer. z , 1 değerinden uzaklaştıkça yuvarlama hatalarından dolayı, algoritma yanlış değerler verir. (bkz. Program 1)

Bundan dolayı, küçük argüman değerleri için Kuvvet Serileri metodu hesaplama açısından çok kullanışlıdır. Ama büyük z değerleri için başka kullanışlı metodlar uygulanmalıdır.

- **Rasyonel Metod**

$x < \nu$ argumanları için, Bessel fonksiyonlarının ikisi de aşağıdaki asimtotik formla ($0 < x \leq \nu$) niteliksel olarak basit kuvvet gösterimlerine uyarlar;

$$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \quad \nu \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

$x > \nu$ için, Bessel fonksiyonları nitelik olarak, ($x^{-1/2}$ ile genliği sönümlenen) sinüs ve kosinüs dalgalarına uyarlar. $x \ll \nu$ için asimtotik gösterim aşağıdaki gibidir:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (\text{A.2})$$

Büyük ν değerleri için x ' in ν ' ye yaklaştığı bölgelerde ($x \ll \nu$) ise Bessel fonksiyonlarının tipik genliği ise

$$J_\nu(\nu) \sim \frac{2^{1/3}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} \frac{1}{\nu^{2/3}} \sim \frac{0.4773}{\nu^{1/3}} \quad (\text{A.3})$$

şeklindedir.

Daha önceden görüldüğü üzere Bessel fonksiyonları,

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad (\text{A.4})$$

rekürans bağıntısını sağlarlar. Bessel fonksiyonlarının hesaplanmasına yönelik uygulanacak pratik yöntem iki kısma bölünebilir: Birincisi, J_0, J_1 değerlerinin nasıl hesaplanacağı, ikincisi, ise diğer, J değerlerinin bulunabilmesi için, rekürans bağıntılarının kararlı bir biçimde nasıl kullanılacağıdır.

Sıfır ve herhangi bir değer arasındaki x değerleri için (biz 8 değerini kullanacağız) rasyonel fonksiyonlar yardımıyla $J_0(x)$ ve $J_1(x)$ değerlerine yakınsama yapılır. $0 < x < 8$ için yakınsama formları ($n=0,1$) []

$$J_n(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \left[P_n(8/x) \cos(X_n) - Q_n(8/x) \sin(X_n) \right] \quad (\text{A.5})$$

şeklindedir. Burada

$$X_n \equiv x - \frac{2n+1}{4}\pi \quad (\text{A.6})$$

eşittir ve P_0, P_1, Q_0 ve Q_1 ($0 < 8/x < 1$.) şeklindeki argümanlar için polinomlardır. P' ler çift, Q' lar tek polinomlardır.

Çeşitli rasyonel fonksiyonlar ve polinomların katsayıları Hart (1968) tarafından değişik hassasiyet dereceleri için verilmiştir. (Yöntemin detayları için bkz Program 2 – 4)

Ele alınacak ikinci kısım ise, $n \geq 2$ derecelerindeki $J_n(x)$ Bessel fonksiyonlarının bulunması için, (A.4) rekürans formülünün ne şekilde kullanılacağıdır. n üzerinde rekürans işlemine J_0 ve J_1' dan başlanabilir. Ama artan yönde rekürans, n değeri x değerini aşmadığı sürece kararlı yapıdadır. Bu, pratikte sıkça karşımıza çıkan büyük x ve küçük n değerleri için yapılan çağrılarda kullanışlıdır.

Zor olanı ise, $x < n$ değerleri içindir. Burada uygulanabilecek en iyi yol, Miller' in algoritmasıdır. (Doğru çözüme ulaşmak için, Rekürans işlemlerinin herhangi bir başlangıç değerinden başlayarak *azalan* yönde uygulanması) J_0 veya J_1 değerlerine gelindiğinde ise, rekürans yolu boyunca biriken toplam kullanılarak sonuç normalize edilebilir.

Tek eksik kalan nokta, istenen değerin belirli bir hassasiyet derecesinde bulunabilmesi için, azalan yönde rekürans sırasında kullanılacak “ n ” başlangıç değerine karar verilmesindedir. (A.1) ve (A.3) nolu asimtotik formlarla oynanırsa, bu değerin istenen “ n ” değerinden ek bir derece daha fazla [sabit x n]^{1/2} olması gerektiği düşünülebilir. (Kabaca, sabitin karekökü, hassasiyet derecesine eşit olmalıdır)

Bu düşüncelerin ifade edilmesi Program 4' de ele alınmıştır

• Rekürans Metodu:

Şimdi, $J_n(x)$ ' in hesaplanması için Rasyonel metoddan daha iyi bir hassasiyet gösteren Rekürans metodu üzerinde duracağız. Daha önce görüldüğü üzere, Bessel fonksiyonu için rekürans bağıntıları artan yönde kararlı yapıda değildir. Burada sunulan metod, rekürans bağıntılarını ters yönde kullanmaktadır. Herhangi bir büyük $n = \eta$ için , $J_n(x)$ bulunmakta ve düşük derecedeki fonksiyonlar ters yöndeki rekürans bağıntısı ile bulunmaktadır.

Rekürans bağıntısını kullanabilmek için, iterasyona başlayacağımız $J_\eta(x) \ll 1$ koşuluna uyan uygun büyüklükte bir η değerinin belirlenmesi gerekmektedir. Aşağıdaki bağıntıları tanımlarsak;

$$J_{\eta}(x) = \alpha \quad \text{ve} \quad J_{\eta-1}(x) = \beta$$

burada α , herhangi bir değer, β ise, α' ya bağlı bir değerdir. β değeri sürekli kesirler yardımıyla bulunabilir.

Rekürans bağıntısını $J_n(x)$ ile bölersek aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\frac{J_{n-1}(x)}{J_n(x)} = \frac{2n}{x} - \frac{J_{n+1}(x)}{J_n(x)} \quad (\text{A.7})$$

ve $Z_n = \frac{J_n}{J_{n-1}}$ şeklinde tanımlar ve (A.7) bağıntısında yerine koyarsak,

$$Z_n = \frac{1}{\frac{2n}{x} - Z_{n+1}}$$

bağıntısı elde edilir. Z_{n+1} teriminin açılımı ile de Z_n için sürekli kesirler açılımı bulunabilir.

$$Z_n = \frac{1}{\frac{2n}{x} - \frac{1}{\frac{2(n+1)}{x} - \frac{1}{\frac{2(n+2)}{x} - \dots}}}$$

Rekürans bağıntısını kullanabilmek için, α değerinin bulunması gereklidir. Verilen bir x değeri için, bu $J_{\eta}(x)$ değeri, ölçüt faktöründen küçük olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\alpha < 10^{-m} J_v(x)$$

olmalıdır. Burada $J_v(x)$, bulunması istenen değer ve m de garanti edilmesi istenen doğru dijital sayıdır. $\eta \propto x$ oldukça, $J_{\eta}(x)$ değeri asimtotik olarak aşağıdaki formdadır.

$$J_{\eta}(x) \sim \frac{e^{\eta(\tanh \gamma - \gamma)}}{\sqrt{2\pi\eta \tanh \gamma}}$$

burada,

$$\gamma = \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 - (x/\eta)^2}}{x/\eta} \right]$$

dir. Algoritmada α değeri,

$$\alpha = 10^{-m} e^{-(\eta/5+48)}$$

seçilmiştir

Eğer bu başlangıç değerleri ile rekürans bağıntılarını uygularsak, bulunan $J_v(x)$ değeri gerçek değer, v den bağımsız olan bir çarpanına eşit olacaktır. Böylece

$$1 = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)$$

bağıntısı, bize normalizasyon faktörünün bulunmasına yarar. Sonuç değeri , hesaplanan değer, normalizasyon faktörüne bölümüne eşittir.

Metod için geçerli algoritma, Program 5' de verilmiştir. Algoritmanın hassasiyeti, küçük x değerleri için yine Kuvvet Serileri metodundan düşüktür. Ancak, büyük x değerleri için ($x \gg 1$), bize diğer iki metoddan daha hassas değerler vermektedir. (bkz Tablo Ek.1)

Tablo Ek.1. Birinci tip Bessel fonksiyonu hesaplama göreceli hata tablosu.

X	Göreceli Hata		
	Kuvvet Serileri Metodu	Rasyonel Metod	Rekürans Metodu
$J_0(x)$			
0.0	0	2.831409995351919 E-09	0
0.1	0	2.710749236906940 E-09	0
0.2	0	2.356618371375257 E-09	0
0.3	0	1.792201287998007 E-09	1.135631360713131 E-16
0.4	0	1.054927218995149 E-09	0
0.5	0	1.947080336632265 E-10	0
0.6	0	7.284190417657049 E-10	0
0.7	0	1.647140059958457 E-09	0
0.8	0	2.490071989869472 E-09	1.311874768087779 E-16
0.9	0	3.185183282157277 E-09	2.749697351846158 E-16
1.0	0	3.663246063198482 E-09	1.450896995806655 E-16
5.0	3.438253178955947 E-15	1.575481872866280 E-08	3.125684708141770 E-16
10.0	3.780709915037618 E-14	2.720607883422061 E-10	1.128570123891826 E-16
15.0	1.162570003508659 E-10	8.636899376184344 E-09	6.097672290219446 E-16
20.0	4.727763221534455 E-09	5.539909364518937 E-11	0
25.0	1.246905391261688 E-07	9.419756187224146 E-10	5.766386841048766 E-16
30.0	1.216991909300666 E-04	6.932170677703942 E-10	8.034104324545650 E-16
$J_1(x)$			
0.0	0	0	0
0.1	1.389514950915139 E-16	1.458087513742801 E-10	0
0.2	1.394740871981613 E-16	1.276687215095345 E-10	4.184222615944838 E-16
0.3	1.871345545565960 E-16	9.897228461755614 E-11	0
0.4	0	6.191854123441779 E-11	1.415908796916068 E-16
0.5	0	1.938411699363624 E-11	1.145653705067835 E-16
0.6	1.936203694522408 E-16	2.526881355610359 E-11	0
0.7	0	6.842082604766118 E-11	1.687290874082597 E-16
0.8	1.505011476296961 E-16	1.064416356588073 E-10	1.505011476296961 E-16
0.9	0	1.359533131344475 E-10	0
1.0	0	1.540809891726993 E-10	2.522944090043037 E-16
5.0	1.694587501493689 E-15	2.976069139708248 E-09	1.694587501493689 E-16
10.0	7.980740251552603 E-14	3.921568164067666 E-09	3.032681295589989 E-15
15.0	3.218433117584365 E-11	2.165809768492265 E-10	1.353243739287294 E-16
20.0	3.685276012495862 E-09	2.394694602914248 E-09	2.076483477160146 E-15
25.0	4.434091632248354 E-07	1.600150586718190 E-10	2.214241751297894 E-16
30.0	1.268323190894294 E-05	1.024537010973897 E-09	4.674581431786473 E-16
$J_2(x)$			
0.0	0	0	0
0.1	1.736169832118025 E-16	1.736169832118025 E-16	1.736169832118025 E-16
0.2	1.740517955168647 E-16	3.481035910337294 E-16	5.221553865505941 E-16
0.3	0	3.107191337113441 E-15	0
0.4	3.516094428751218 E-16	5.608170613858193 E-14	3.516094428751218 E-16
0.5	0	5.230694015747904 E-13	1.133657133885545 E-16
0.6	4.767350418845954 E-16	3.230356643810018 E-12	1.589116806281984 E-16
0.7	1.180346074958413 E-16	1.504964852493476 E-11	3.541038224875240 E-16
0.8	1.830413791302558 E-16	5.702599254389382 E-11	1.830413791302558 E-16
0.9	1.467209012363501 E-16	1.845276496251303 E-10	0
1.0	2.415555597123858 E-16	5.271283397378014 E-10	3.623333395685787 E-16
5.0	8.940891111515339 E-16	5.171351187097350 E-08	1.341133666727301 E-15
10.0	3.466308829468234 E-14	1.288660259237087 E-10	0
15.0	1.637103923796701 E-10	3.097739552658848 E-09	1.669139722490460 E-16
20.0	2.888260071383969 E-09	1.575234211022536 E-10	1.731030409981710 E-16
25.0	2.597640513329773 E-07	8.380123457040317 E-10	1.305594195058557 E-16
30.0	2.275719385609259 E-04	8.665600622175637 E-10	1.238278797560185 E-15

Ek 2. Birinci tip Bessel fonksiyonunu hesaplama için örnek programlar

Bu kısımda, birinci tip Bessel fonksiyonunun yukarıda değinilen hesaplama tekniklerine ait algoritmalara örnek programlar verilmiştir. Sunulan programlar, Matlab paketinde yazılmış ve derlenmiştir.

Program 1

```

function y = PowerBesselJ(X, T)

Tolerance = 1e-16;

[r, k] = size(X);

for N = 1:T + 1
    for J = 1:k

        LocValue = X(1, J);
        MIndex = 0;
        A = 1;
        for I = 1:(N-1)
            A = A * (LocValue / (2 * I));
        end

        Summ = A;
        APrev = 0;
        while (abs(A / Summ) > Tolerance)
            MIndex = MIndex + 1;
            APrev = A;
            A = (-APrev) * 0.25 * (LocValue / MIndex) * (LocValue /
MIndex);
            A = A * MIndex / (MIndex + N - 1);
            Summ = Summ + A;
        end

        y(J, N) = Summ;
    end
end

```

Program 2

```

function y = RatBesselJ0(X)

[r, k] = size(X);

for J = 1:k
    LocValue = X(1, J);
    if abs(LocValue) < 8.0
        s = LocValue * LocValue;
        ans1 = 57568490574.0 + s * (-13362590354.0 + s *
            (651619640.7 + s * (-11214424.18 + s *
                (77392.33017 + s * (-184.9052456)))));
        ans2 = 57568490411.0 + s * (1029532985.0 + s *
            (9494680.718 + s * (59272.64853 + s *
                (267.8532712 + s * 1.0))));
        y(J, 1) = ans1 / ans2;
    else
        ax = abs(LocValue);
        z = 8.0 / ax;
        s = z * z;
        xx = ax - 0.785398164;
        ans1 = 1.0 + s * (-0.1098628627e-2 + s *
            (0.2734510407e-4 + s * (-0.2073370639e-5 +
                s * 0.2093887211e-6)));
        ans2 = -0.1562499995e-1 + s * (0.1430488765e-3 + s *
            (-0.6911147651e-5 + s * (0.7621095161e-6 -
                s * 0.934945152e-7)));
        ans = sqrt(0.636619772 / ax) * (cos(xx) *
            ans1 - z * sin(xx) * ans2);
        y(J, 1) = ans;
    end
end

```

Program 3

```

function y = RatBesselJ1(X)

[r, k] = size(X);

for J = 1:k
    LocValue = X(1, J);
    if abs(LocValue) < 8.0
        s = LocValue * LocValue;
        ans1 = LocValue * (72362614232.0 + s * (-7895059235.0 +
            s * (242396853.1 + s * (-2972611.439 + s *
                (15704.48260 + s * (-30.16036606))))));
        ans2 = 144725228442.0 + s * (2300535178.0 + s * (18583304.74
+
            s * (99447.43394 + s * (376.9991397 + s * 1.0))));
        y(J, 1) = ans1 / ans2;
    else
        ax = abs(LocValue);
        z = 8.0 / ax;
        s = z * z;
        xx = ax - 2.356194491;
        ans1 = 1.0 + s * (0.183105e-2 + s * (-0.3516396496e-4 +
            s * (0.2457520174e-5 + s * (-0.240337019e-6))));
        ans2 = 0.04687499995 + s * (-0.2002690873e-3 + s *
            (0.8449199096e-5 + s * (-0.88228987e-6 +
                s * 0.105787412e-6)));
        ans = sqrt(0.636619772 / ax) * (cos(xx) * ans1 -
            z * sin(xx) * ans2);
        if X < 0.0
            ans = -ans;
        end
        y(J , 1) = ans;
    end;
end

```

Program 4

```

function y = RatBesselJ(X, T)

[r, k] = size(X);

iacc = 40;
bigno = 1.0e+10;
bigni = 1.0e-10;

for N = 1:(T + 1)
    if N == 1
        y(:,N) = RatBesselJ0(X);
    elseif N == 2
        y(:,N) = RatBesselJ1(X);
    else
        for J = 1:k
            LocValue = X(1, J);
            if LocValue == 0
                y(J, N) = 0;
            else
                if abs(LocValue) > 1.0 * (N - 1)
                    tox = 2.0 / abs(LocValue);
                    bjm = RatBesselJ0(abs(LocValue));
                    bj = RatBesselJ1(abs(LocValue));
                    for D = 1:(N - 2)
                        bjp = D * tox * bj - bjm;
                        bjm = bj;
                        bj = bjp;
                    end
                    ansx = bj;
                else
                    tox = 2.0 / abs(LocValue);
                    LL = fix(((N - 1) + fix(sqrt(1.0 * (iacc * (N -
1)))))) / 2);
                    m = 2 * LL;
                    ansx = 0.0;
                    jsum = 0;
                    sum = 0.0;
                    bjp = 0.0;
                    bj = 1.0;
                    D = m;
                    while (D >= 1)
                        bjm = D * tox * bj - bjp;
                        bjp = bj;
                        bj = bjm;
                        if abs(bj) > bigno
                            bj = bj * bigni;

                            bjp = bjp * bigni;
                            ansx = ansx * bigni;
                            sum = sum * bigni;
                        end
                        if jsum ~= 0
                            sum = sum + bj;
                        end
                        jsum = 1 - jsum;
                    if D == (N - 1)

```

```

        ansx = bjp;
    end
    D = D - 1;
end
    sum = 2.0 * sum - bj;
    ansx = ansx / sum;
end
    if (LocValue < 0.0)
        g = rem((N - 1) / 2)
        if g ~= 0
            ansx = -ansx;
        end
    end
    y(J, N) = ansx;
end
end
end
end
end

```

Program 5

```

function W = RecurseBesselJ(X, T)

[r, k] = size(X);

for DD = 1:k
    LocValue = X(1, DD);

    if (LocValue < 10)
        M = fix(49 / (3.6 - log10(LocValue)) + 9);
    else
        if (LocValue < 50)
            M = fix(1.743 * LocValue + 31);
        else
            M = fix(1.6 * LocValue + 36.5);
        end
    end
end

M = fix((M + 1) / 2) * 2;
M1 = 2 * (M - 1);
M2 = M - 1;
J1 = M + 2;
for J = J1:300
    y(DD, J) = 0;
end
C = 1;
A = (M1 + 4) / LocValue;
D = (M1 + 2) / LocValue;
B = A * D - 1;
G = 1;
J = 6;
Found = 0;
while ((J <= 206) & (Found == 0))
    P = G;
    H = (M1 + J) / LocValue;
    E = C;
    C = A;
    A = H * C - E;
    F = D;
    D = B;
    B = H * D - F;
    G = A / B;
    if (abs((G - P) / G) < 1E-9)
        Found = 1;
    end
    J = J + 2;
end

A = 1E-9 * exp(-M * 0.2 - 48);
C = A / G;
y(DD, M + 1) = A;
y(DD, M) = C;
P = M;
H = 2 / LocValue;
D = A;

for J = 1:M2

```

```

    P = P - 1;
    B = P * H * C - D;
    D = C;
    C = B;
    y(DD, M - J) = B;
end

J = 3;
while J <= M2
    A = A + y(DD, J1 - J);
    J = J + 2;
end;

F = 1 / (y(DD, 1) + 2 * A);
J1 = M + 1;

for J = 1:J1
    ZX = y(DD, J);
    y(DD, J) = ZX * F;
end
end

for B = 1:(T + 1)
    for Q = 1:k
        W(Q, B) = y(Q, B);
    end
end
end

```

KAYNAKLAR

1. WATSON, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1958.
2. ERDELYI, A. et al., Higher Transcendental Functions, vol. 2, ch. 7, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., 1953.
3. ABRAMOWITZ, M., and STEGUN, I. A. (eds.), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National Bureau of Standards, Washington, DC, 1972.
4. LEWIN, L., CHANG, D.C., and KUESTER, E.F., Electromagnetic Waves and Curved Structures, IEE Electromagnetic waves series 2, Peter Peregrinus, England, 1977
5. MAHMOUD, S. F., Electromagnetic Waveguides Theory and Applications, IEE Electromagnetic waves series 32, Peter Peregrinus, England, 1991
6. MITTRA, R., ed., Computer Techniques for Electromagnetics, Pergamon Press, New York, 1973
7. WEISSHAAR, A., GOODNICK, S.M., and TRIPATHI, V.K.: 'A rigorous and efficient method of moment solution for curved waveguide bends', *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1992, **40**, (12), pp. 2200-2206
8. HSU, J.-P., and ANADA, T.: 'Systematic analysis method of E- and H-plane circular bend of rectangular waveguide'. MTT-S International Microwave Symposium, MWSYM'95, May 1995, Florida, USA, pp. 749-752
9. MONGIARDO, M., MORINI, A., and ROZZI, T.: 'Analysis and design of full-band matched waveguide bend', *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1995, **43**, (12), pp. 2965-2970
10. CORNET, P., DUSSEAUX, R., and CHANDEZON, J.: 'Wave propagation in curved waveguides of rectangular cross section', *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1999, **47**, (7), pp. 965-972
11. SOLS, F., and MACUCCI, M.: 'Circular bend in electron waveguides', *Physical Review B*, 1990, **41**, (17), pp. 11887 – 11891
12. LENT, C. S.: 'Transmission through a bend in an electron waveguide', *Applied Physics Letters*, 1990, **56**, (25), pp. 2554 – 2556
13. BUCHHOLZ, H., Calculation of Electrical and Magnetic Fields. Germany, 1956.

14. JAHNKE, E., EMDE, F., and LOSH, F., Tables of Higher Functions, 6th ed., McGraw – Hill, Inc., New York, 1960
15. COCHRAN, J. A., ‘Remarks on the zeros of cross-product Bessel functions’, J. Soc. Indust. Appl. Math., 1964, **12**, (3), pp. 581-587
16. BUCHHOLZ, H., ‘Approximation formulae for a well-known difference of products of two cylinder functions’, Z. Angew. Math. Mech., 1949, **29**, (11/12), pp. 356-367
17. GRADSHTEYN, I. S., and RYZHIK, I. M., Tables of Integrals, Series, and Products, 5th ed., Academic Press, USA, 1994.
18. GRAY, A., MATHEWS G. B., and MACROBERT, T. M., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2-nd ed., Macmillan and Co., London, England, 1931.

ÖZGEÇMİŞ

Ali ŞANLI, 14 Mart 1974’ de Afyon’ da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Antalya’ da tamamladı. 1988 yılında girdiği İstanbul Atatürk Fen Lisesi’ nden 1991 yılında mezun oldu. Marmara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Endüstri Mühendisliği bölümünde lisans eğitimini tamamladı. 1998 yılı güz döneminde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı.