

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CARLESON EĞRİLERİNDE TANIMLI OPERATÖRLERİN
BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA
SINIRLILIK KRİTERLERİ

HATİCE ARMUTCU
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2022

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CARLESON EĞRİLERİNDE TANIMLI
OPERATÖRLERİN BAZI FONKSİYON
UZAYLARINDA SINIRLILIK KRİTERLERİ

HATİCE ARMUTCU
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. TAHİR AZEROĞLU
II. DANIŞMANI
PROF. DR. VAGİF GULİYEV

GEBZE

2022

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**THE BOUNDEDNESS CRITERIONS OF THE
OPERATORS DEFINED ON CARLESON
CURVES IN SOME FUNCTION SPACES**

HATİCE ARMUTCU
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. TAHİR AZEROĞLU
II. THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. VAGİF GULİYEV

GEBZE

2022



DOKTORA JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09/06/2022 tarih ve 2022/28 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 22/06/2022 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Hatice Armutcu'nun tez çalışması Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE

: Prof. Dr. Ali AKBULUT

ÜYE

: Doç. Dr. Fatih DİKMEN

ÜYE

: Dr. Öğr. Üyesi Tuğba AKYEL

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve .../..... sayılı kararı.

ÖZET

Bu çalışmada, Carleson eğrileri üzerinden operatörlerin sınırlılık kriterleri, çeşitli fonksiyon uzaylarında incelenmiştir.

Carleson eğrileri üzerinde tanımlı maksimal, potansiyel ve kesirli maksimal operatörler lokal genelleştirilmiş Morrey ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarında ele alınmıştır. Potansiyel operatör ve kesirli maksimal operatör için; lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarında zayıf ve güçlü Spanne-Guliyev tipi sınırlılık, zayıf ve güçlü Adams-Guliyev tipi sınırlılık ve zayıf ve güçlü Adams-Gunawan tipi sınırlılık kriterleri verilmiştir.

Ayrıca, Carleson eğrilerinde tanımlı maksimal operatör, maksimal komütatör ve maksimal operatörden üretilen komütatör Orlicz uzaylarında incelenmiştir. Komütatörler ve maksimal operatörün, Carleson eğrileri üzerinden Orlicz uzaylarında sınırlı olması için gerek ve yeter koşulları bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Carleson Eğrileri, Potansiyel Operatör, Lokal Genelleştirilmiş Morrey Uzayları, Orlicz Uzayları, Maksimal Komütatör.

SUMMARY

In this work, the boundedness criterions of the operators over Carleson curves in the some function spaces have been examined.

The maximal operator, the potential operator and the fractional maximal operator defined on Carleson curves have been discussed on the local generalized Morrey spaces and generalized Morrey spaces. For the potential operator and the fractional maximal operator, it has been given a characterization the strong and weak Spanne-Guliyev type boundedness, the strong and weak Adams-Guliyev type boundednes and the strong and weak Adams-Gunawan type boundednes on local generalized Morrey spaces.

Moreover, the maximal operator, the maximal commutator and the commutator of the maximal operator defined on Carleson curves have been examined over Orlicz spaces. For the commutators and the maximal operator have been established necessary and sufficent conditions for the boundedness on Orlicz spaces over Carleson curves.

Key Words: Carleson Curves, Potential Operator, Local Generalized Morrey Spaces, Orlicz Spaces, Maximal Commutator.

TEŞEKKÜR

Doktora hayatımda her zaman yardımda bulunan danışmanlarım Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU ve Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV'e, saygı ve minnet duyarım.

Bütün eğitim hayatım boyunca her türlü desteklerinden dolayı annem ve babama, sevgili eşime ve değerli aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim süresi içinde "2211-A Doktora Burs" desteklerinden dolayı TÜBİTAK-BİDEB'e teşekkürlerimi arz ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Ön Bilgiler	1
1.2. Literatür Özeti	4
2. LOKAL GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIK	8
2.1. Carleson Eğrilerinde Maksimal Operatör	12
2.2. Carleson Eğrilerinde Potansiyel Operatör	17
2.2.1. Spanne-Guliyev Tipi Sonuç	17
2.2.2. Adams-Guliyev Tipi Sonuç	23
2.3. Carleson Eğrilerinde Kesirli Maksimal Operatör	29
2.3.1 Spanne-Guliyev Tipi Sonuç	29
2.3.2 Adams-Guliyev Tipi Sonuç	35
2.3.3 Adams-Gunawan Tipi Sonuç	38
3. ORLÍCZ UZAYLARINDA SINIRLILIK	42
3.1. Carleson Eğrilerinde Maksimal Operatör	45
3.2. Carleson Eğrilerinde Maksimal Komütatör	49
3.3. Carleson Eğrilerinde Maksimal Operatör Komütatörü	59
4. SONUÇLAR	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	67
EKLER	68

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklamalar</u>
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$B(t, r)$	: t merkezli r yarıçaplı yuvar
Γ	: Sonlu uzunluktaki bir eğri
$\nu(\Gamma)$	: Γ eğrisinin uzunluğu
M_Γ	: Γ üzerinde tanımlı maksimal operatör
I_Γ^α	: Potansiyel (kesirli integral) operatör
M_Γ^α	: Kesirli maksimal operatör
$M_{b,\Gamma}$	: Maksimal komütatör
$[b, M_\Gamma]$	: Maksimal operatör ve b fonksiyonun komütatörü
L_p^{loc}	: p . mertebeden lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
L_p	: Lebesgue uzayı
WL_p	: Zayıf Lebesgue uzayı
$L_{p,\lambda}$	: Morrey uzayı
$WL_{p,\lambda}$	: Zayıf Morrey uzayı
$\tilde{L}_{p,\lambda}$	: Modifiyeli Morrey uzayı
$W\tilde{L}_{p,\lambda}$	: Zayıf modifiyeli Morrey uzayı
$LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}$	: Lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı
$WLM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}$	: Zayıf lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı
$M_{p,\varphi}$	: Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$WM_{p,\varphi}$	: Zayıf Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
L^Φ	: Orlicz Uzayı
WL^Φ	: Zayıf Orlicz uzayı

1. GİRİŞ

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili bazı temel kavram ve bilgilere yer verilmiştir.

1.1. Ön Bilgiler

$\mathbb{C}$ kompleks düzleminde $\Gamma = \{t \in \mathbb{C} : t \in t(s), 0 \leq s \leq l \leq \infty\}$ kümesine sonlu uzunluklu Jordan eğrisi denir. Burada $v(t) = s$ yay-uzunluk ölçüsü, $l = v(\Gamma)$ Γ eğrisinin uzunluğudur.

$B(t, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - t| < r\}$ t merkezli r yarıçaplı yuvardır.

$$\Gamma(t, r) := \Gamma \cap B(t, r), \quad t \in \Gamma, r > 0 \quad (1.1)$$

Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi,

$$v\Gamma(t, r) \leq c_0 r, \quad \forall t \in \Gamma, r > 0 \quad (1.2)$$

bağlantısında, t ve r den bağımsız sonlu $c_0 > 0$ sabiti ile sağlanırsa, Carleson eğrisi denir.

Çeşitli uzaylarda Carleson eğrileri ile bağlantılı uzaylarda dahil, tanımlı maksimal operatör, potansiyel operatör, kesirli maksimal operatör birçok yazar tarafından araştırılmıştır [2], [5], [6], [8], [12], [18]-[20], [22], [24]-[27].

f lokal integrallenebilir fonksiyon ve Γ Carleson eğrisi olmak üzere, M_Γ maksimal operatörü

$$M_\Gamma f(t) = \sup_{r>0} (v\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau)| dv(\tau), \quad t \in \Gamma \quad (1.3)$$

I_Γ^α potansiyel operatörü (kesirli integral operatörü),

$$I_\Gamma^\alpha f(t) = \int_\Gamma \frac{f(\tau)}{|t - \tau|^{1-\alpha}} dv(\tau), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in \Gamma \quad (1.4)$$

M_F^α kesirli maksimal operatörü

$$M_F^\alpha f(t) = \sup_{r>0} \left(\nu \Gamma(t, r) \right)^{-1+\alpha} \int_{\Gamma(t, r)} |f(\tau)| d\nu(\tau), \quad t \in \Gamma \quad (1.5)$$

olarak tanımlanır.

$1 \leq p < \infty$ ve Γ Carleson eğrisi olsun, $L_p(\Gamma)$ Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(t)|^p d\nu(t) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.6)$$

normuna göre ölçülebilir f fonksiyonların kümesidir.

$1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve Γ Carleson eğrisi olsun, $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzayı

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} = \sup_{\substack{r>0 \\ t \in \Gamma}} r^{\frac{-\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t, r))} < \infty \quad (1.7)$$

normuna göre ölçülebilir f fonksiyonların kümesidir.

$1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $[r]_1 = \min\{1, r\}$ ve Γ Carleson eğrisi olsun, $\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)$ modifiyeli Morrey uzayı

$$\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)} = \sup_{\substack{r>0 \\ t \in \Gamma}} [r]_1^{\frac{-\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t, r))} < \infty \quad (1.8)$$

normuna göre ölçülebilir f fonksiyonların kümesidir.

$\lambda > 1$ veya $\lambda < 0$ olursa, Γ üzerinde sıfıra denk olan bütün fonksiyonların kümesi Θ olmak üzere, $\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma) = L_{p,\lambda}(\Gamma) = \Theta$.

$$\begin{aligned} L_{p,0}(\Gamma) &= \tilde{L}_{p,0}(\Gamma) = L_p(\Gamma) \\ \tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma) &= L_{p,\lambda}(\Gamma) \cap L_p(\Gamma) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)} = \max \left\{ \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}, \|f\|_{L_p(\Gamma)} \right\}$$

olduğu görülür [13],[15].

$1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve Γ Carleson eğrisi olsun.

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}(\Gamma)} = \sup_{\beta > 0} \beta \sup_{\substack{r > 0 \\ t \in \Gamma}} \left(r^{-\lambda} \int_{\{\tau \in \Gamma(t,r) : |f(\tau)| > \beta\}} dv(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.10)$$

normuna göre Γ üzerinde lokal integrallenebilir f fonksiyonların kümesine $WL_{p,\lambda}(\Gamma)$ zayıf Morrey uzayı denir.

$1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $[r]_1 = \min\{1, r\}$ ve Γ Carleson eğrisi olsun.

$$\|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)} = \sup_{\beta > 0} \beta \sup_{\substack{r > 0 \\ t \in \Gamma}} \left([r]_1^{-\lambda} \int_{\{\tau \in \Gamma(t,r) : |f(\tau)| > \beta\}} dv(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.11)$$

normuna göre Γ üzerinde lokal integrallenebilir f fonksiyonların kümesine $W\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)$ zayıf modifiyeli Morrey uzayı denir.

T lineer operatör olsun. Uygun b fonksiyonu ve T operatöründen üretilen $[b, T]$ komütatörü

$$[b, T]f = bT(f) - T(bf) \quad (1.12)$$

$b \in L_1^{loc}(\Gamma)$ ve $t \in \Gamma$ olsun. $M_{b,\Gamma}$ maksimal komütatör

$$M_{b,\Gamma}(f)(t) = \sup_{r > 0} \left(v\Gamma(t, r) \right)^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |b(t) - b(\tau)| |f(\tau)| dv(\tau) \quad (1.13)$$

b fonksiyonu ve M_Γ operatörün ürettiği komütatör

$$[b, M_\Gamma]f(t) = b(t)M_\Gamma f(t) - M_\Gamma(bf)(t), \quad t \in \Gamma \quad (1.14)$$

olarak tanımlanır.

1.2. Literatür Özeti

Morrey uzayları, ilk defa C.B. Morrey tarafından 1938 yılında eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları ve varyasyonlar hesabı ile ilgili çalışmalarda ortaya konulmuştur [24]. Daha sonra bu uzaylar, Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinin araştırılmasında ve potansiyel teorisinde kullanılmıştır.

Birçok çalışmada çeşitli Morrey uzayları tanımlandı. Mizuhara (1991), Nakai (1994) ve Guliyev (1994) birbirinden bağımsız olarak $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarını, Komori ve Shirai (2009) $L_{p,k}(w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarını, Guliyev (2012) $M_w^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları kavramını verdi [4], [37], [64].

Adams (1978) Riesz potansiyel operatörü, Chiarenza ve Frasca (1987) maksimal ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörleri için $L_{p,\lambda}(R^n)$ Morrey uzaylarında ilk sınırlılık kriterlerini elde etmişlerdir [1].

Maksimal ve singüler integral operatörler, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin diferansiyel özelliklerinin araştırılmasında önemli rol oynar.

Samko N., kuasi metrik ölçü uzaylarında tanımlanmış M_Γ maksimal operatörün sınırlı olmasını incelemiştir [28]. Bu çalışmada Carleson eğrileri üzerinde tanımlanmış $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzayları ele alınmıştır:

Teorem 1.1: Γ Carleson eğrisi, $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Bu durumda, M_Γ operatörü $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ uzayından $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

Kokilashvili V. ve Meskhi A., kuasi metrik ölçü uzaylarında tanımlanmış I_Γ^α ve M_Γ^α operatörlerin sınırlılık kriterlerini incelemiştir [22]. Bu çalışmada Carleson eğrileri üzerinde tanımlanmış $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzayları ele alınmıştır:

Teorem 1.2: (Spanne tipi sonuç) Γ Carleson eğrisi, $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \lambda_1 < \frac{p}{q}$, $\frac{\lambda_1}{p} = \frac{\lambda_2}{q}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$ olsun. Bu durumda, I_Γ^α ve M_Γ^α operatörleri $L_{p,\lambda_1}(\Gamma)$ uzayından $L_{p,\lambda_2}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

Carleson eğrileri üzerinde tanımlı $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ Morrey uzaylarında I_F^α ve M_F^α operatörlerin Adams tipi sınırlılık [1], [11] çalışmalarından elde edilmiştir:

Teorem 1.3: (Adams tipi sonuç) Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \lambda < 1 - \alpha$ ve $1 \leq p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ olsun.

- i) $1 < p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ ise, bu durumda I_F^α ve M_F^α operatörlerinin $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ uzayından $L_{q,\lambda}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olması için yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır, ayrıca sonsuz eğri durumunda bu şart gerek koşuldur.
- ii) $p = 1$ ise, bu durumda I_F^α ve M_F^α operatörlerinin $L_{1,\lambda}(\Gamma)$ uzayından $WL_{q,\lambda}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olması için yeter koşul $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır, ayrıca sonsuz eğri durumunda bu şart gerek koşuldur.

Carleson eğrilerinde tanımlı I_F^α ve M_F^α operatörlerin $\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)$ modifiyeli Morrey uzayında sınırlılık ispatlanmıştır [17]:

Teorem 1.4: (Guliyev tipi sonuç) Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \lambda < 1 - \alpha$ ve $1 \leq p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ olsun.

- i) $1 < p < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ ise, bu durumda I_F^α ve M_F^α operatörlerin $\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)$ uzayından $\tilde{L}_{q,\lambda}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olması için yeter koşul $\alpha \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır, ayrıca sonsuz eğri durumunda bu şart gerek koşuldur.
- ii) $p = 1$ ise, bu durumda I_F^α ve M_F^α operatörlerin $\tilde{L}_{1,\lambda}(\Gamma)$ uzayından $W\tilde{L}_{q,\lambda}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olması için yeter koşul $\alpha \leq 1 - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olmasıdır, ayrıca sonsuz eğri durumunda bu şart gerek koşuldur.

Komütatör yaklaşımları kısmi diferansiyel denklemler ve harmonik analizin birçok uygulama alanlarında önemli rol oynarlar.

Komütatörler için ilk sonuçlar, genelleşmiş Hardy uzaylarının belirli faktörizasyon teoremleri için 1976 yılında Coifman, Rochberg ve Weiss tarafından

verildi. Elde edilen teoremlerin 1978'lerde S. Janson tarafından daha basit ispatları verilmiştir [34], [46]-[50].

$M_{b,\Gamma}$ maksimal komütatörü ve $[b, M_\Gamma]$ maksimal operatör komütatörü çok benzer olmasına rağmen temelde farklıdırlar. $M_{b,\Gamma}$ maksimal komütatörü BMO da olan sembole sahip singüler integral operatörlerin komütatörlerinin incelenmesinde önemli rol oynar [48]-[51]. Lineer olmayan $[b, M_\Gamma]$ maksimal operatör komütatörü, H_1 ve BMO uzaylarından olan fonksiyonların çarpımının incelenmesinde kullanılabilir [52]. $[b, M_\Gamma]$ maksimal operatör komütatörün L_p uzaylarında sınırlılık kriterleri için gerek ve yeter koşulları [51] de verilmiştir.

Bu tez çalışmasının, ikinci bölümünde; Carleson eğrileri üzerinde lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları ile genelleştirilmiş Morrey uzayları tanımlanmış ayrıca Carleson eğrilerinde tanımlı maksimal, potansiyel ve kesirli maksimal operatörlerin bu uzaylarda zayıf ve güçlü sınırlılık kriterleri verilmiştir. Bu bölümün ana sonuçlarından Teorem 2.3 ve Teorem 2.8 aşağıda verilmiştir:

Teorem 2.3: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$ ve (φ_1, φ_2) ikilisi

$$\sup_{r < \tau < \infty} \tau^{-\frac{1}{p}} \operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi_1(t_0, s) s^{\frac{1}{p}} \leq C \varphi_2(t_0, r) \quad (2.29)$$

şartını sağlasın. Burada C sabiti $t_0 \in \Gamma$ ve r 'den bağımsızdır. Bu durumda, M_Γ operatörü $p > 1$ iken $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{p,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $LM_{1,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{1,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 2.8: (Adams-Guliyev tipi) Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < \frac{1}{p}, 1 \leq p < q < \infty$ ve $\varphi \in \Omega_p$

$$\sup_{r < \tau < \infty} \tau^{-1} \operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi(t, s) s \leq C \varphi(t, r) \quad (2.54)$$

ile

$$\int_r^\infty \tau^{\alpha-1} \varphi(t, \tau)^{\frac{1}{p}} d\tau \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \quad (2.55)$$

şartlarını sağlasın. Burada $C > 0$ sabiti $r > 0$ ve $t \in \Gamma$ den bağımsızdır. Bu durumda, $p > 1$ iken I_Γ^α operatörü $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $M_{1,\varphi}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

Üçüncü bölümde, Young fonksiyonları, Orlicz uzayı, maksimal fonksiyon, maksimal komütatör ve maksimal operatör komütatörü hakkında temel kavramlar verilmiş ve operatör ve komütatörlerin Carleson eğrileri üzerinde tanımlı Orlicz uzaylarında sınırlı olması için gerek ve yeter koşulları elde edilmiştir. Ana sonuçlardan biri olan Teorem 3.3 aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.3: $\phi \in Y$ Young fonksiyonu, Γ Carleson eğrisi ve $b \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun.

- i) $\Phi \in \nabla_2$ ise, bu durumda $L^\Phi(\Gamma)$ uzayında $M_{b,\Gamma}$ operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO(\Gamma)$ olmasıdır.*
- ii) $\Phi \in \Delta_2$ ise, bu durumda $L^\Phi(\Gamma)$ uzayında $M_{b,\Gamma}$ operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO(\Gamma)$ olmasıdır.*
- iii) $\Phi \in \Delta_2 \cup \nabla_2$ ise, bu durumda $L^\Phi(\Gamma)$ uzayında $M_{b,\Gamma}$ operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO(\Gamma)$ olmasıdır.*

Dördüncü ve son bölüm ise, sonuçlara ayrılmıştır.

2. LOKAL GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIK

Bu bölümde Carleson eğrileri üzerinde tanımlı maksimal, potansiyel ve kesirli maksimal operatörlerin lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılık kriterleri verilmiştir.

$LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ lokal genelleştirilmiş Morrey ve $WLM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ zayıf lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları aşağıdaki şekilde ifade edilir [16],[17].

$\Gamma \times (0, \infty)$ üzerinde $\varphi(t, r)$ pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \leq p < \infty$, $t_0 \in \Gamma$ olsun. $LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları

$$\|f\|_{LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)} = \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(t_0, r)} \frac{1}{(v\Gamma(t_0, r))^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} < \infty \quad (2.1)$$

normuna göre bütün $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ fonksiyonlar kümesidir.

$\Gamma \times (0, \infty)$ üzerinde $\varphi(t, r)$ pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \leq p < \infty$, $t_0 \in \Gamma$ olsun. $WLM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ zayıf lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları

$$\|f\|_{WLM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)} = \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(t_0, r)} \frac{1}{(v\Gamma(t_0, r))^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{WL_p(\Gamma(t_0, r))} < \infty \quad (2.2)$$

normuna göre bütün $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ fonksiyonlar kümesidir.

$M_{p,\varphi}(\Gamma)$ Genelleştirilmiş Morrey uzayları ve $WM_{p,\varphi}(\Gamma)$ zayıf lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$1 \leq p < \infty$ ve $\Gamma \times (0, \infty)$ üzerinde $\varphi(t, r)$ pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi}(\Gamma)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} = \sup_{\substack{r>0 \\ t \in \Gamma}} \frac{1}{\varphi(t, r)} \frac{1}{(v\Gamma(t, r))^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t, r))} < \infty \quad (2.3)$$

normuna göre bütün $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ fonksiyonlar kümesidir.

$1 \leq p < \infty$ ve $\Gamma \times (0, \infty)$ üzerinde $\varphi(t, r)$ pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $WM_{p, \varphi}(\Gamma)$ zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı

$$\|f\|_{WM_{p, \varphi}} = \sup_{\substack{r > 0 \\ t \in \Gamma}} \frac{1}{\varphi(t, r)} \frac{1}{(v\Gamma(t, r))^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{WL_p(\Gamma(t, r))} < \infty \quad (2.4)$$

normuna göre bütün $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ fonksiyonlar kümesidir.

v ağırlık fonksiyonu olmak üzere, $\|g\|_{L_{\infty, v}(0, \infty)} = \operatorname{ess\,sup}_{t > 0} v(t)g(t) < \infty$

normuna göre bütün $g(t), t > 0$ fonksiyonlar kümesi $L_{\infty, v}(0, \infty)$ sembolü ile gösterilir ve $L_{\infty}(0, \infty) \equiv L_{\infty, 1}(0, \infty)$ olduğu ifade edilir.

$(0, \infty)$ üzerinde bütün Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\mathfrak{M}(0, \infty)$ ve $\mathfrak{M}^+(0, \infty)$ ise, $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan bütün fonksiyonları içeren alt kümesi olsun.

$\mathfrak{A} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{M}^+(0, \infty; \uparrow) : \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0 \right\}$ ve $(0, \infty)$ üzerinde azalmayan $\mathfrak{M}^+(0, \infty)$ içindeki bütün fonksiyonların konisi $\mathfrak{M}^+(0, \infty; \uparrow)$ ile belirtilir.

$(0, \infty)$ üzerinde u sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $g \in \mathfrak{M}(0, \infty)$ için $\bar{S}_u$ supremal operatörü $(\bar{S}_u g)(t) := \|ug\|_{L_{\infty}(t, \infty)}, t \in (0, \infty)$ olarak gösterilir.

Teorem 2.1: v_1 ve v_2 fonksiyonları, herhangi bir $t > 0$ için $0 < \|v_1\|_{L_{\infty}(t, \infty)} < \infty$ ve $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyon u olsun. Bu durumda, $\bar{S}_u$ supremal operatörü $\mathfrak{A}$ konisinde $L_{\infty, v_1}(0, \infty)$ uzayından $L_{\infty, v_2}(0, \infty)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\|v_2 \bar{S}_u(\|v_1\|_{L_{\infty}(\cdot, \infty)}^{-1})\|_{L_{\infty}(0, \infty)} < \infty \quad (2.5)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [7].

Lemma 2.1: $\Gamma \times (0, \infty)$ üzerinde $\varphi(t, r)$ pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve $t_0 \in \Gamma$ olsun. bazı $r > 0$ için

$$\sup_{r < \tau < \infty} \frac{1}{\varphi(t_0, \tau)} \frac{1}{(v\Gamma(t_0, \tau))^{\frac{1}{p}}} = \infty \quad (2.6)$$

olursa, $LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma) = \Theta$ olur.

İspat 2.1: (2.6) sağlanıyor ve f fonksiyonu sıfırdan farklı olsun. Bu durumda, $r > 0$ için $\|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|f\|_{LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}} &\geq \sup_{r < \tau < \infty} \frac{1}{\varphi(t_0, \tau)} \frac{1}{(v\Gamma(t_0, \tau))^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, \tau))} \\ &\geq \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \sup_{r < \tau < \infty} \frac{1}{\varphi(t_0, \tau)} \frac{1}{(v\Gamma(t_0, \tau))^{\frac{1}{p}}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dolayısıyla $\|f\|_{LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}} = \infty$ bulunur. ■

Hatırlatma 2.1: $\Omega_{p,loc}$ ile $\Gamma \times (0, \infty)$ üzerindeki bütün φ pozitif ölçülebilir fonksiyonlar gösterilir öyle ki her $r > 0$ için

$$\left\| \frac{1}{\varphi(t_0, \tau)} \frac{1}{(v\Gamma(t_0, \tau))^{\frac{1}{p}}} \right\|_{L_\infty(r, \infty)} < \infty \quad (2.8)$$

elde edilir. Lemma 2.1 hatırlanarak, daima $\varphi \in \Omega_{p,loc}$ olduğu kabul edilir.

Lemma 2.2: $\Gamma \times (0, \infty)$ üzerinde $\varphi(t, r)$ pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

i) $r > 0$ ve her $t \in \Gamma$ için

$$\sup_{r < \tau < \infty} \frac{1}{\varphi(t, \tau)} \frac{1}{(v\Gamma(t, \tau))^{\frac{1}{p}}} = \infty \quad (2.9)$$

olursa, $M_{p,\varphi}(\Gamma) = \Theta$ olur.

ii) $r > 0$ ve her $t \in \Gamma$ için

$$\sup_{0 < \tau < r} \frac{1}{\varphi(t, \tau)} = \infty \quad (2.10)$$

olursa, $M_{p,\varphi}(\Gamma) = \emptyset$ olur.

Hatırlatma 2.2: Ω_p ile $\Gamma \times (0, \infty)$ üzerindeki bütün φ pozitif ölçülebilir fonksiyonların kümesi gösterilir öyle ki her $r > 0$ için uygun olarak

$$\sup_{t \in \Gamma} \left\| \frac{1}{\varphi(t, \tau)} \frac{1}{(v\Gamma(t, \tau))^{\frac{1}{p}}} \right\|_{L_\infty(r, \infty)} < \infty \text{ ve } \sup_{t \in \Gamma} \left\| \frac{1}{\varphi(t, \tau)} \right\|_{L_\infty(0, r)} < \infty \quad (2.11)$$

elde edilir.

Lemma 2.2 aracılığıyla her zaman $\varphi \in \Omega_p$ kabul edilir.

$\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu, öyle bir $C > 0$ sabiti vardır ki $r \leq s$ için

$$\varphi(r) \leq C\varphi(s), \quad (\varphi(r) \geq C\varphi(s)) \quad (2.12)$$

olursa, hemen hemen artan (hemen hemen azalan) fonksiyon olarak tanımlanır.

$1 < p < \infty$ olsun. $t \in (0, \infty) \rightarrow t^{\frac{1}{p}}\varphi(t) \in (0, \infty)$ hemen hemen artan olmak üzere, hemen hemen azalan bütün $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonların kümesini $\mathcal{G}_p$ ile gösterilir.

Nakai, her $0 < t \leq T < \infty$, $\rho(t)t^{\frac{n}{p}} \leq \rho(T)T^{\frac{n}{p}}$ olmak üzere, ρ fonksiyonun kendisinin azalan olduğu bir ρ fonksiyonun olduğunu göstermiştir.

Ayrıca $LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma) = LM_{p,\rho}^{\{t_0\}}(\Gamma)$, $M_{p,\varphi}(\Gamma) = M_{p,\rho}(\Gamma)$ eşitliklerini ispat etmiştir.

Lemma 2.3: $1 \leq p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$, $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ ve Γ_0 yuvarın karakteristik fonksiyonu X_{Γ_0} olsun. Bu durumda $X_{\Gamma_0} \in LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma) \cap M_{p,\varphi}(\Gamma)$ olur.

Bunun yanı sıra, $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi(r_0)} &\leq \|X_{\Gamma_0}\|_{WLM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}} \leq \|X_{\Gamma_0}\|_{LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}} \leq \frac{C}{\varphi(r_0)} \\ \frac{1}{\varphi(r_0)} &\leq \|X_{\Gamma_0}\|_{WM_{p,\varphi}} \leq \|X_{\Gamma_0}\|_{M_{p,\varphi}} \leq \frac{C}{\varphi(r_0)}\end{aligned}\tag{2.13}$$

olur.

İspat 2.3: $1 \leq p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$ ve Γ içindeki keyfi bir $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ yuvarı olsun.

$$\|X_{\Gamma_0}\|_{WLM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}} = \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(r)} \left(\frac{|\Gamma(t_0, r) \cap \Gamma_0|}{v\Gamma(t_0, r)} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{\varphi(r_0)} \left(\frac{|\Gamma_0 \cap \Gamma_0|}{|\Gamma_0|} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\varphi(r_0)}$$

olduğu açıktır.

$r \leq r_0$ ise, $\varphi(r_0) \leq C\varphi(r)$ ve her $t \in \Gamma$ için

$$\frac{1}{\varphi(r)} \left(\frac{|\Gamma(t_0, r) \cap \Gamma_0|}{v\Gamma(t_0, r)} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\varphi(r)} \leq \frac{C}{\varphi(r_0)}\tag{2.14}$$

Diğer taraftan, $r_0 \leq r$ ise, her $t \in \Gamma$ için $\varphi(r_0)r_0^{\frac{1}{p}} \leq C\varphi(r)r^{\frac{1}{p}}$ ve her $t \in \Gamma$ için

$$\frac{1}{\varphi(r)} \left(\frac{|\Gamma(t_0, r) \cap \Gamma_0|}{v\Gamma(t_0, r)} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{|\Gamma(t_0, r) \cap \Gamma_0|^{\frac{1}{p}}}{c_2^{\frac{1}{p}}\varphi(r)r^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{|\Gamma_0|^{\frac{1}{p}}}{c_2^{\frac{1}{p}}\varphi(r)r^{\frac{1}{p}}} = \frac{r_0^{\frac{1}{p}}}{\varphi(r)r^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{C}{\varphi(r_0)}$$

Böylece ispat tamamlanır. ■

2.1. Carleson Eğrilerinde Maksimal Operatör

Bu bölümde, Carleson eğrilerinde tanımlı, $LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ lokal genelleştirilmiş Morrey ve $M_{p,\varphi}(\Gamma)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki M_Γ maksimal operatörün sınırlı olması için kriterler verilecektir.

Ağırlıklı Hardy operatörü, w bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$H_w g(t) = \int_t^\infty g(s)w(s) dx, \quad 0 < t < \infty \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2: $(0, \infty)$ üzerinde v_1, v_2 ve w ağırlık fonksiyonları ve $v_1(t)$ orijinin komşuluğunda dıştan sınırlı olsun.

$$\operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_2(t) H_w g(t) \leq C \operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_1(t) g(t) \quad (2.16)$$

eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$B = \sup_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \frac{w(s)}{\operatorname{ess\,sup}_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty \quad (2.17)$$

olmasıdır. Burada g fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ve azalmayandır ve $C > 0$ sabittir. Ayrıca $C = B$ değeri (2.16) için en iyi sabittir [16].

Aşağıdaki lemma M_Γ maksimal operatörün Guliyev tipi lokal yaklaşımıdır [3],[14].

Lemma 2.4: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$ ve $t_0 \in \Gamma$ olsun. Bu durumda, $p > 1$ ve keyfi $r > 0$ olmak üzere

$$\|M_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \lesssim \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))} + r^{\frac{1}{p}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, \tau))} \quad (2.18)$$

eşitsizliği her $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ için gerçekleşir. Ayrıca $p = 1$ iken,

$$\|M_\Gamma f\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} \lesssim \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, 2r))} + r \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, \tau))} \quad (2.19)$$

eşitsizliği her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ için gerçekleşir.

İspat 2.4: $1 < p < \infty$ olsun. Keyfi $\Gamma(t_0, r)$ yuvarı için, $f_1 = f|_{\chi_{\Gamma(t_0, 2r)}}$ ve $f_2 = f|_{\chi_{c(\Gamma(t_0, 2r))}}$ olacak şekilde $f = f_1 + f_2$ fonksiyonunu bölelim.

Böylelikle $\|M_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \leq \|M_\Gamma f_1\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} + \|M_\Gamma f_2\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))}$ elde edilir. $M_\Gamma: L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma)$ maksimal operatörün sürekli olması ve Teorem 1.1 yardımıyla, $\|M_\Gamma f_1\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \lesssim \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))}$ bulunur.

$\Gamma(t_0, \tau)$ yuvarından keyfi bir y noktası alalım. $\Gamma(y, \tau) \cap c(\Gamma(t_0, 2r)) \neq \emptyset$ ise, $\tau > r$ olur. Gerçekten, $z \in \Gamma(y, \tau) \cap c(\Gamma(t_0, 2r))$ alınırsa, $\tau > |y - z| \geq |t - z| - |t - y| > 2r - r = r$ olur. Böylece,

$$M_\Gamma f_2(y) \leq 2 \sup_{\tau > r} \frac{1}{v\Gamma(t_0, 2\tau)} \int_{\Gamma(t_0, 2\tau)} |f(z)| dv(z) \quad (2.20)$$

$$= 2 \sup_{\tau > 2r} \frac{1}{v\Gamma(t_0, \tau)} \int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)| dv(z) \leq 2 \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1} \int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)| dv(z)$$

bulunur. Buradan, her $y \in \Gamma(t_0, \tau)$ için,

$$M_\Gamma f_2(y) \leq 2 \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1} \int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)| dv(z) \quad (2.21)$$

çıkarılır. Sonuç olarak,

$$\|M_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \lesssim \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))} + r^{\frac{1}{p}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1} \int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)| dv(z)$$

elde edilir. $p = 1$ durumunda; keyfi $\Gamma(t_0, r)$ için

$$\|M_\Gamma f\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} \leq \|M_\Gamma f_1\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} + \|M_\Gamma f_2\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} \quad (2.22)$$

olduğu açıktır. $M_\Gamma: L_1(\Gamma) \rightarrow WL_1(\Gamma)$ maksimal operatörün sürekli olması ve Teorem 1.1 yardımıyla,

$$\|M_\Gamma f_1\|_{WL_1(\Gamma)} \lesssim \|f\|_{1(\Gamma(t_0, 2r))} \quad (2.23)$$

bulunur. Böylece (2.21) yardımıyla (2.43) elde edilir. ■

Lemma 2.5: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$ ve $t_0 \in \Gamma$ olsun. Bu durumda, $p > 1$ ve Γ içindeki keyfi $r > 0$ olmak üzere

$$\|M_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \lesssim r^{\frac{1}{p}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, \tau))} \quad (2.24)$$

eşitsizliği her $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ için gerçekleşir. Ayrıca $p = 1$ iken

$$\|M_\Gamma f\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} \lesssim r \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, \tau))} \quad (2.25)$$

eşitsizliği her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ için gerçekleşir.

İspat 2.5: $1 < p < \infty$ olsun.

$$M_1 := r^{\frac{1}{p}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1} \int_{\Gamma(t_0, r)} |f(z)| dv(z) \quad (2.26)$$

ve $M_2 := \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))}$ olarak tanımlayalım. Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$M_1 \lesssim r^{\frac{1}{p}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)|^p dv(z) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.27)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$r^{\frac{1}{p}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)|^p dv(z) \right)^{\frac{1}{p}} \gtrsim r^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{\tau > 2r} \tau^{\frac{1}{p}} \right) \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))} \approx M_2 \quad (2.28)$$

olur. Lemma 2.1'den dolayı $\|M_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \leq M_1 + M_2$ elde edilir ve (2.24) bulunur. $p = 1$ için (2.25) eşitsizliği (2.43) dan doğrudan çıkar. ■

Teorem 2.3: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$ ve (φ_1, φ_2) ikilisi

$$\sup_{r < \tau < \infty} \tau^{-\frac{1}{p}} \operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi_1(t_0, s) s^{\frac{1}{p}} \leq C \varphi_2(t_0, r) \quad (2.29)$$

şartını sağlasın. Burada C sabiti $t_0 \in \Gamma$ ve r 'den bağımsızdır. Bu durumda, M_Γ operatörü $p > 1$ iken $LM_{p, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{p, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $LM_{1, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{1, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

İspat 2.6: Teorem 2.1 ve Lemma 2.5'ten, $p \in (1, \infty)$ ise,

$$\begin{aligned} \|M_\Gamma f\|_{LM_{p, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)} &\lesssim \sup_{r > 0} \varphi_2(t_0, r)^{-1} \sup_{\tau > r} \tau^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, \tau))} \\ &\lesssim \sup_{r > 0} \varphi_1(t_0, r)^{-1} r^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} = \|f\|_{LM_{p, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$p = 1$ ise,

$$\begin{aligned} \|M_\Gamma f\|_{WLM_{p, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)} &\lesssim \sup_{r > 0} \varphi_2(t_0, r)^{-1} \sup_{\tau > r} \tau^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, \tau))} \\ &\lesssim \sup_{r > 0} \varphi_1(t_0, r)^{-1} r^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, r))} = \|f\|_{LM_{1, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

bulunur. ■

Teorem 2.3'ten aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.1: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_p$

$$\sup_{r < \tau < \infty} \tau^{-\frac{1}{p}} \operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi_1(t, s) s^{\frac{1}{p}} \leq C \varphi_2(t, r) \quad (2.32)$$

şartını sağlasın. Burada $C > 0$ sabiti $r > 0$ ve t den bağımsızdır. Bu durumda, M_Γ maksimal operatörü $p > 1$ iken $M_{p,\varphi_1}(\Gamma)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $M_{1,\varphi_1}(\Gamma)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 2.2: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$ ile t ve r den bağımsız C sabiti için $\varphi \in \mathcal{G}_p$ olsun. Bu durumda, M_Γ maksimal operatörü $p > 1$ iken $M_{p,\varphi}(\Gamma)$ üzerinde sınırlıdır ve $p = 1$ iken $M_{1,\varphi}(\Gamma)$ uzayından $WM_{1,\varphi}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

2.2. Carleson Eğrilerinde Potansiyel Operatör

Carleson eğrilerinde tanımlı, $LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki I_Γ^α kesirli integral operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

$1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$ iken $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına ve $1 < q < \infty$, $1 - \frac{1}{q} = \alpha$ iken, $LM_{1,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına I_Γ^α operatörün zayıf ve güçlü Spanne-Guliyev tipi sınırlılık kriterleri verilecektir.

Ayrıca, $M_{p,\varphi}(\Gamma)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki $1 < p < q < \infty$ iken $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına ve $p = 1$, $1 < q < \infty$ halinde $M_{1,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına I_Γ^α operatörün Adams-Guliyev tipi sınırlılık kriterleri verilecektir.

2.2.1. Spanne-Guliyev Tipi Sonuç

Teorem 2.4: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ ve $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ olsun. Bu durumda, $p > 1$ için

$$\|I_\Gamma^\alpha f\|_{L_q(\Gamma(t_0,r))} \leq C r^{\frac{1}{q}} \int_{2r}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{q}-1} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0,\tau))} d\tau \quad (2.33)$$

ve $p = 1$ için

$$\|I_{\Gamma}^{\alpha} f\|_{WL_q(\Gamma(t_0, r))} \leq C r^{\frac{1}{q}} \int_{2r}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{q}-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, \tau))} d\tau \quad (2.34)$$

bulunur. Burada $C > 0$ sabiti $r > 0$, $t_0 \in \Gamma$, f den bağımsızdır.

İspat 2.6: $f_1 = f_{\chi_{\Gamma(t_0, 2r)}}$ ve $f_2 = f_{\chi_{c(\Gamma(t_0, 2r))}}$ olacak şekilde $f = f_1 + f_2$ bölelim.

Böylelikle

$$I_{\Gamma}^{\alpha} f(t) = I_{\Gamma}^{\alpha} f_1(t) + I_{\Gamma}^{\alpha} f_2(t) \quad (2.35)$$

$1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ olsun. $f_1 \in L_p(\Gamma)$ ve I_{Γ}^{α} operatörünün $L_p(\Gamma)$ uzayından $L_q(\Gamma)$ uzayına sınırlı olmasından (Teorem 1.2), C sabiti f den bağımsız olmak üzere

$$\begin{aligned} \|I_{\Gamma}^{\alpha} f_1\|_{L_q(\Gamma)} &\leq C \|f_1\|_{L_p(\Gamma)} = C \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))} \\ &\leq C r^{\frac{1}{q}} \int_{2r}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{q}-1} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, \tau))} d\tau \end{aligned} \quad (2.36)$$

elde edilir.

$z \in \Gamma(t_0, r)$, $y \in c(\Gamma(t_0, 2r))$ şartları ele alınırsa, $\frac{1}{2}|z - y| \leq |t - y| \leq \frac{3}{2}|t - z|$ bulunur. Bu durumda, her $z \in \Gamma(t_0, r)$ için

$$|I_{\Gamma}^{\alpha} f_2(z)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{1-\alpha} \int_{c(\Gamma(t_0, 2r))} |t - y|^{\alpha-1} |f(y)| dv(y) \quad (2.37)$$

elde edilir. Fubini teoreminden

$$\int_{c(\Gamma(t_0, 2r))} |t - y|^{\alpha-1} |f(y)| dv(y) \approx \int_{c(\Gamma(t_0, 2r))} |f(y)| dv(y) \int_{|t-y|}^{\infty} \tau^{\alpha-2} d\tau \quad (2.38)$$

$$\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |t-y| < \tau} |f(y)| dv(y) \tau^{\alpha-2} d\tau \lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(y)| dv(y) \tau^{\alpha-2} d\tau$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_{c(\Gamma(t_0, 2r))} |t-y|^{\alpha-1} |f(y)| dv(y) \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, \tau))} \tau^{-\frac{1}{q}-1} d\tau \quad (2.39)$$

bulunur ve her $z \in \Gamma(t_0, r)$ için

$$|I_r^\alpha f_2(z)| \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, \tau))} \tau^{-\frac{1}{q}-1} d\tau \quad (2.40)$$

elde edilir. Ayrıca, her $p \in [1, \infty)$ için

$$\|I_r^\alpha f_2(z)\|_{L_q(\Gamma(t_0, r))} \lesssim r^{\frac{1}{q}} \int_{2r}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{q}-1} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, \tau))} d\tau \quad (2.41)$$

eşitsizliği gerçekleşir. (2.36) ve (2.41) den (2.33) eşitsizliği bulunur.

Son olarak, $p = 1$ iken I_r^α operatörün zayıf $(1, q)$ sınırlı olmasından (Teorem 1.2), C sabiti t_0 ve r den bağımsız olmak üzere

$$\|I_r^\alpha f_1(z)\|_{WL_q(\Gamma(t_0, r))} \lesssim C \|f_1\|_{L_1(\Gamma)} \lesssim C r^{\frac{1}{q}} \int_{2r}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{q}-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, \tau))} d\tau \quad (2.42)$$

bulunur. (2.41) ve (2.42) den (2.34) eşitsizliği sağlanır. ■

Teorem 2.5: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, $t_0 \in \Gamma$, $\varphi_1 \in \Omega_{p,loc}$, $\varphi_2 \in \Omega_{q,loc}$ olmak üzere

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi_1(t_0, s) s^{\frac{1}{p}}}{\tau^{\frac{1}{q}}} \frac{d\tau}{\tau} \leq C \varphi_2(t_0, r) \quad (2.43)$$

φ şartını (φ_1, φ_2) ikilisi sağlasın. Burada C sabiti $r > 0$ ve $t_0 \in \Gamma$ dan bağımsızdır. Bu durumda, I_Γ^α operatörü $p > 1$ iken $LM_{p, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{q, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $LM_{1, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{q, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

İspat 2.7: $v_1(r) = \varphi_1(t_0, r)^{-1} r^{-\frac{1}{p}}$, $v_2(r) = \varphi_2(t_0, r)^{-1}$ ve $w(r) = r^{-\frac{1}{q}}$ olacak şekilde, Teorem 2.2 ve Teorem 2.4 yardımıyla $p > 1$ iken

$$\begin{aligned} \|I_\Gamma^\alpha f\|_{LM_{q, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(t_0, r)^{-1} \int_r^\infty s^{-\frac{1}{q}-1} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, s))} ds \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(t_0, r)^{-1} r^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} = \|f\|_{LM_{p, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

ve $p = 1$ iken

$$\begin{aligned} \|I_\Gamma^\alpha f\|_{WLM_{q, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(t_0, r)^{-1} \int_r^\infty s^{-\frac{1}{q}-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, s))} ds \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(t_0, r)^{-1} r^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, r))} = \|f\|_{LM_{1, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.45)$$

elde edilir. ■

Teorem 2.5'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, $\varphi_1 \in \Omega_p$, $\varphi_2 \in \Omega_q$ olmak üzere

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi_1(t, s) s^{\frac{1}{p}}}{\tau^{\frac{1}{q}}} \frac{d\tau}{\tau} \leq C \varphi_2(t, r) \quad (2.46)$$

φ şartını (φ_1, φ_2) ikilisi sağlasın. Burada C sabiti r ve t den bağımsızdır. Bu durumda, I_Γ^α operatörü $p > 1$ için $M_{p, \varphi_1}(\Gamma)$ uzayından $M_{q, \varphi_2}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $M_{1, \varphi_1}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q, \varphi_2}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

Aşağıdaki lemma temel sonucun ispatında kullanılır.

Lemma 2.6: Γ Carleson eğrisi ve $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ olsun. Bu durumda, her $t \in \Gamma_0$ için $r_0^\alpha \lesssim I_\Gamma^\alpha \chi_{\Gamma_0}$ eşitsizliği elde edilir.

İspat 2.8: $y, t \in \Gamma_0$ olursa, $|t - y| \leq |t - t_0| + |t_0 - y| < 2r_0$. $0 < \alpha < 1$ olduğundan, $r_0^{\alpha-1} \leq 2^{1-\alpha} |t - y|^{\alpha-1}$ bulunur. Buradan

$$I_\Gamma^\alpha \chi_{\Gamma_0} = \int_\Gamma \chi_{\Gamma_0}(y) |t - y|^{\alpha-1} dv(y) = \int_{\Gamma_0} |t - y|^{\alpha-1} dv(y) \geq c_0 2^{1-\alpha} r_0^\alpha \quad (2.47)$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem temel sonuçlardan biridir.

Teorem 2.6: Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $t_0 \in \Gamma$ ve $p, q \in [1, \infty)$ olsun.

- i) $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ ise, bu durumda (2.46) şartı, $LM_{p, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{q, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına I_Γ^α operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur. Ayrıca $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ iken (2.46) şartı, $LM_{p, \varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{q, \varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına I_Γ^α operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur.
- ii) $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ ise, bu durumda her $r > 0$ iken

$$r^\alpha \varphi_1(r) \leq C \varphi_2(r) \quad (2.48)$$

şartı, $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından

$LM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına I_Γ^α operatörün sınırlı olması için gerek koşuldur. Burada

$C > 0$ sabiti r den bağımsızdır.

iii) $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ olsun. $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$

$$\int_r^\infty s^{\alpha-1} \varphi_1(s) ds \leq Cr^\alpha \varphi_1(r) \quad (2.49)$$

regülerlik şartı sağlarsa, (2.48) şartı $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına I_Γ^α operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ ise, bu durumda (2.48) şartı, $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına I_Γ^α operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Burada $C > 0$ sabiti r den bağımsızdır.

İspat 2.9: Teoremin birinci kısmı Teorem 2.5 de ispatlanmıştır. Teoremin ikinci kısmı için, $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ ve $t \in \Gamma_0$ olsun. Lemma 2.6 yardımıyla, $r_0^\alpha \lesssim C I_\Gamma^\alpha \chi_{\Gamma_0}(r)$ verilir. Böylelikle, Lemma 2.3 ve Lemma 2.6 dan

$$r_0^\alpha \lesssim (v(\Gamma_0))^{-\frac{1}{p}} \|I_\Gamma^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{L_q(\Gamma_0)} \lesssim \varphi_2(r_0) \|I_\Gamma^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{M_{q,\varphi_2}} \lesssim \varphi_2(r_0) \|\chi_{\Gamma_0}\|_{M_{p,\varphi_1}} \lesssim \frac{\varphi_2(r_0)}{\varphi_1(r_0)}$$

veya

$$\text{her } r_0 > 0 \text{ için, } r_0^\alpha \lesssim \frac{\varphi_2(r_0)}{\varphi_1(r_0)} \Leftrightarrow r_0^\alpha \varphi_1(r_0) \lesssim \varphi_2(r_0) \quad (2.50)$$

bulunur. Bu ifade her $r_0 > 0$ için doğru olduğundan ispat tamamlanır.

Teoremin üçüncü kısmın ispatı, teoremin birinci ve ikinci kısımlarından çıkar. ■

Hatırlatma 2.3: Teorem 2.6'teki $\varphi_1(r) = r^{\frac{\lambda-1}{p}}$ ve $\varphi_2(r) = r^{\frac{\mu-1}{q}}$ olarak alınırsa, (2.49)

şartı ve (2.48) şartı sırasıyla $0 < \lambda < 1 - \alpha p$ ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ ya denktir. Dolayısıyla,

Teorem 2.6'ten Teorem 1.3 elde edilir.

2.2.2. Adams-Guliyev Tipi Sonuç

Aşağıdaki noktasal yaklaşım temel sonuçlarımızın ispatlarında önemli rol oynar.

Teorem 2.7: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty, 0 < \alpha < 1$ ve $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ olsun. Bu durumda

$$|I_\Gamma^\alpha f(t)| \leq Cr^\alpha M_\Gamma f(t) + C \int_r^\infty s^{\alpha-\frac{1}{p}-1} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,s))} ds \quad (2.51)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $C > 0$ sabiti $r > 0, t \in \Gamma$ ve f den bağımsızdır.

İspat 2.10: $f_1 = f_{\chi_{\Gamma(t,2r)}}$ ve $f_2 = f_{\chi_{\Gamma^c(t,2r)}}$ olacak şekilde $f = f_1 + f_2$ yazalım.

Böylelikle

$$I_\Gamma^\alpha f(t) = I_\Gamma^\alpha f_1(t) + I_\Gamma^\alpha f_2(t) \quad (2.52)$$

yazılır. $I_\Gamma^\alpha f_1(t)$ her $z \in \Gamma$ için Hedberg in (sayfa 354, [29]) yaklaşımından $|I_\Gamma^\alpha f_1(z)| \leq C_1 r^\alpha M_\Gamma f(z)$ elde ederiz.

$I_\Gamma^\alpha f_2(t)$ her $z \in \Gamma$ için (2.40) dan

$$|I_\Gamma^\alpha f_2(z)| \leq \int_{\Gamma(t,2r)} |t-y|^{\alpha-1} |f(y)| d(y) \leq C \int_{2r}^\infty s^{\alpha-\frac{1}{p}-1} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,s))} ds \quad (2.53)$$

yardımıyla (2.51) bulunur. ■

Carleson eğrilerinde I_Γ^α kesirli integralin Adams-Guliyev tipi sonucu aşağıda ifade edilir [14].

Teorem 2.8: (Adams-Guliyev tipi) Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < \frac{1}{p}, 1 \leq p < q < \infty$ ve $\varphi \in \Omega_p$

$$\sup_{r < \tau < \infty} \tau^{-1} \operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi(t, s) s \leq C \varphi(t, r) \quad (2.54)$$

ile

$$\int_r^\infty \tau^{\alpha-1} \varphi(t, \tau)^{\frac{1}{p}} d\tau \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \quad (2.55)$$

şartlarını sağlasın. Burada $C > 0$ sabiti $r > 0$ ve $t \in \Gamma$ den bağımsızdır. Bu durumda, $p > 1$ iken I_Γ^α operatörü $M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $M_{1, \varphi}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

İspat 2.11: $1 \leq p < \infty$ ve $f \in M_{p, \varphi}(\Gamma)$ olsun. Teorem 2.7 yardımıyla (2.51) sağlanır. (2.55) şartı ve (2.51) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |I_\Gamma^\alpha f(t)| &\lesssim r^\alpha M_\Gamma f(t) + \int_r^\infty s^{\alpha-\frac{1}{p}-1} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,s))} ds \\ &\leq r^\alpha M_\Gamma f(t) + \|f\|_{M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)} \int_r^\infty s^{\alpha-1} \varphi(t, s)^{\frac{1}{p}} ds \\ &\leq r^\alpha M_\Gamma f(t) + r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \|f\|_{M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

elde edilir. Böylece her $t \in \Gamma$ için $r = \left(\frac{M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}{M_\Gamma f(t)} \right)$ seçilirse,

$$|I_\Gamma^\alpha f(t)| \lesssim (M_\Gamma f(t))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \quad (2.57)$$

bulunur.

Teorem 2.3'teki M_Γ maksimal operatörün $M_{p, \varphi}(\Gamma)$ deki sınırlı olması ve (2.54) şartı sayesinde teorem aşağıdaki şekilde ifade olunur.

$1 < p < q < \infty$ ise,

$$\begin{aligned}
\|I_{\Gamma}^{\alpha} f\|_{M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} &\lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{\substack{t \in \Gamma \\ r > 0}} \varphi(t,r)^{-\frac{p}{q}} r^{-\frac{1}{q}} \|M_{\Gamma} f\|_{L_p(\Gamma(t,r))}^{\frac{p}{q}} \\
&\lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \|M_{\Gamma} f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{\frac{p}{q}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

ve $p = 1 < q < \infty$ ise,

$$\begin{aligned}
\|I_{\Gamma}^{\alpha} f\|_{WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} &\lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{1-\frac{1}{q}} \sup_{\substack{t \in \Gamma \\ r > 0}} \varphi(t,r)^{-\frac{1}{q}} r^{-\frac{1}{q}} \|M_{\Gamma} f\|_{WL_1(\Gamma(t,r))}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{1-\frac{1}{q}} \|M_{\Gamma} f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

olur. ■

Aşağıdaki teorem temel sonuçlardan biridir.

Teorem 2.9: Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < q < \infty$ ve $\varphi \in \Omega_p$ olsun.

- i) (2.54) şartını $\varphi(t,r)$ sağlarsa, (2.55) şartı $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına I_{Γ}^{α} operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < q < \infty$ ise, bu durumda (2.55) şartı, $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına I_{Γ}^{α} operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur.
- ii) $\varphi \in \mathcal{G}_p$ ise, bu durumda her $r > 0$ için

$$r^{\alpha} \varphi(r)^{\frac{1}{p}} \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \tag{2.60}$$

şartı, I_{Γ}^{α} operatörün $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına ve $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olması için gerek koşuldur.

Burada $C > 0$ sabiti r den bağımsızdır.

- iii) Her $r > 0$ için

$$\int_r^\infty s^{\alpha-1} \varphi(s)^{\frac{1}{p}} ds \leq C r^\alpha \varphi(r)^{\frac{1}{p}} \quad (2.61)$$

regülerlik şartını $\varphi \in \mathcal{G}_p$ sağlarsa, (2.60) şartı, $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına I_F^α operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < q < \infty$ ise, bu durumda (2.60) şartı, $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına I_F^α operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Burada $C > 0$ sabiti r den bağımsızdır.

İspat 2.12: Teoremin birinci kısmı, Teorem 2.8'in sonucudur. Teoremin ikinci kısmı için, $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ ve $t \in \Gamma_0$ olsun. Lemma 2.6 yardımıyla, $r_0^\alpha \lesssim C I_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}(r)$ verilir.

Böylelikle, Lemma 2.3 ve Lemma 2.6'dan

$$\begin{aligned} r_0^\alpha &\lesssim (v(\Gamma_0))^{-\frac{1}{q}} \|I_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{L_q(\Gamma_0)} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \|I_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} \\ &\lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \|\chi_{\Gamma_0}\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

veya

$$\text{her } r_0 > 0 \text{ için, } r_0^\alpha \varphi(r_0)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \lesssim 1 \Leftrightarrow r_0^\alpha \varphi(r_0)^{\frac{1}{p}} \lesssim r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \quad (2.63)$$

bulunur. Bu ifade her $t \in \Gamma$ ve $r_0 > 0$ için doğru olduğundan ispat tamamlanır.

Teoremin üçüncü kısmı, teoremin birinci ve ikinci kısımlarından çıkar. ■

Carleson eğrilerinde tanımlı I_F^α kesirli integral için Adams-Guliyev tipi sonuç aşağıda verilmiştir:

Teorem 2.10: Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < q < \infty$, $\varphi \in \Omega_p$ (2.54) şartı ve

$$r^\alpha \varphi(t, r) + \int_r^\infty s^{\alpha-1} \varphi(t, s) ds \leq C \varphi(t, r)^{\frac{p}{q}} \quad (2.64)$$

eşitsizliğini sağlasın. $p > 1$ iken I_Γ^α operatörü $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $M_{1,\varphi}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır. Burada $C > 0$ sabiti $t \in \Gamma$ ve $r > 0$ den bağımsızdır.

İspat 2.13: $1 \leq p < \infty$ ve $f \in M_{p,\varphi}(\Gamma)$ olsun. Teorem 2.7 yardımıyla, (2.51) eşitsizliği mevcuttur. (2.55) şartı ve (2.51) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |I_\Gamma^\alpha f(t)| &\lesssim r^\alpha M_\Gamma f(t) + \int_r^\infty s^{\alpha-\frac{1}{p}-1} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,s))} ds \\ &\leq r^\alpha M_\Gamma f(t) + \|f\|_{M_{p,\varphi}(\Gamma)} \int_r^\infty s^{\alpha-1} \varphi(t,s) ds \end{aligned} \quad (2.65)$$

Bu durumda, (2.64) ve (2.65) yardımıyla

$$\begin{aligned} |I_\Gamma^\alpha f(t)| &\lesssim \min \left\{ \varphi(t,r)^{\frac{p}{q}-1} M_\Gamma f(t), \varphi(t,r)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p,\varphi}(\Gamma)} \right\} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \min \left\{ r^{\frac{p}{q}-1} M_\Gamma f(t), r^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p,\varphi}(\Gamma)} \right\} = (M_\Gamma f(t))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p,\varphi}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \end{aligned} \quad (2.66)$$

minimum kısımları dengeye vardığında ulaştığımız supremum kullanıldı. Teorem 2.3 ve (2.66) den

$1 < p < q < \infty$ ise,

$$\|I_\Gamma^\alpha f\|_{M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \|M_\Gamma f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{\frac{p}{q}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)} \quad (2.67)$$

$p = 1 < q < \infty$ ise,

$$\|I_\Gamma^\alpha f\|_{WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{1-\frac{1}{q}} \|M_\Gamma f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)} \quad (2.68)$$

olur. ■

Aşağıdaki teorem temel sonuçlardan biridir.

Teorem 2.11: Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < q < \infty$ ve $\varphi \in \Omega_p$ olsun.

- i) (2.54) şartını $\varphi(t, r)$ sağlarsa, (2.64) şartı $M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}^{\frac{1}{p}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}^{\frac{1}{q}}(\Gamma)$ uzayına I_F^α operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < q < \infty$ ise, bu durumda (2.64) şartı, $M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}^{\frac{1}{p}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}^{\frac{1}{q}}(\Gamma)$ uzayına I_F^α operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur.
- ii) $\varphi \in \mathcal{G}_p$ ise, bu durumda her $r > 0$ için

$$r^\alpha \varphi(r)^{\frac{1}{p}} \leq C \varphi(r)^{\frac{1}{q}} \quad (2.69)$$

şartı, I_F^α operatörün $M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}^{\frac{1}{p}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}^{\frac{1}{q}}(\Gamma)$ uzayına ve

$M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}^{\frac{1}{p}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}^{\frac{1}{q}}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olması için gerek koşuldur.

Burada $C > 0$ sabiti r den bağımsızdır.

- iii) (2.61) regülerlik şartını $\varphi \in \mathcal{G}_p$ sağlarsa, (2.69) şartı $M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}^{\frac{1}{p}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}^{\frac{1}{q}}(\Gamma)$ uzayına I_F^α operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < q < \infty$ ise, bu durumda (2.69) şartı, $M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}^{\frac{1}{p}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}^{\frac{1}{q}}(\Gamma)$ uzayına I_F^α operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur.

İspat 2.14: Teoremin birinci kısmı, Teorem 2.10'nun sonucudur. Teoremin ikinci kısmı için, $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ ve $t \in \Gamma_0$ olsun. Lemma 2.6 yardımıyla, $r_0^\alpha \lesssim C I_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}(r)$ olur. Böylelikle, Lemma 2.3 ve Lemma 2.6'dan

$$\begin{aligned} r_0^\alpha &\lesssim (v(\Gamma_0))^{-\frac{1}{q}} \|I_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{L_q(\Gamma_0)} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \|I_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{M_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}^{\frac{1}{q}}(\Gamma)} \\ &\lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \|\chi_{\Gamma_0}\|_{M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}^{\frac{1}{p}}(\Gamma)} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.70)$$

veya

$$\text{her } r_0 > 0 \text{ için, } r_0^\alpha \varphi(r_0)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \lesssim 1 \Leftrightarrow r_0^\alpha \varphi(r_0)^{\frac{1}{p}} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \quad (2.71)$$

bulunur. Bu ifade her $t \in \Gamma$ ve $r_0 > 0$ için doğru olduğundan ispat tamamlanır. Teoremin üçüncü kısmının ispatı, teoremin birinci ve ikinci kısımlarından çıkar. ■

Hatırlatma 2.4: Teorem 2.9' da $\varphi(r) = r^{\lambda-1}$ olarak alınırsa, (2.61) şartı $0 < \lambda < 1 - \alpha p$ şartına ve (2.60) şartı $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ şartına denktir. Dolayısıyla, Teorem 2.9' dan Teorem 1.3 elde edilir.

Hatırlatma 2.5: Teorem 2.9' da $\varphi(r) = [r]_1^{\lambda-1}$ olarak alınırsa, (2.61) şartı $0 < \lambda < 1 - \alpha$ şartına ve (2.60) şartı $\alpha \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{1-\lambda}$ şartına denktir. Dolayısıyla, Teorem 2.9' dan Teorem 1.4 elde edilir.

2.3. Carleson Eğrilerinde Kesirli Maksimal Operatör

Bu bölümde, $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}(\Gamma)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları ve $M_{p,\varphi}(\Gamma)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları üzerinde M_F^α kesirli maksimal operatörün Spanne-Guliyev tipi sınırlılık, Adams-Guliyev tipi sınırlılık ve Adams-Gunawan tipi sınırlılık için kriterler verilecektir.

2.3.1. Spanne-Guliyev Tipi Sonuç

Aşağıdaki lemma M_F^α kesirli maksimal operatörün Guliyev tipi lokal yaklaşımıdır [3],[14].

Lemma 2.7: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < q < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$ ve $t_0 \in \Gamma$ olsun. Bu durumda, $p > 1$ ve keyfi $r > 0$ için

$$\|M_F^\alpha f\|_{L_p(\Gamma(t_0,r))} \lesssim \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0,2r))} + r^{\frac{1}{p}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0,\tau))} \quad (2.72)$$

eşitsizliği her $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ için gerçekleşir. Ayrıca $p = 1$ için

$$\|M_F^\alpha f\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} \lesssim \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, 2r))} + r \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, \tau))} \quad (2.73)$$

eşitsizliği her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ için gerçekleşir.

İspat 2.15: $1 < p < q < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$ olsun. Keyfi $\Gamma(t_0, r)$ yuvarı için, $f_1 = f_{\chi_{\Gamma(t_0, 2r)}}$ ve $f_2 = f_{\chi_{c(\Gamma(t_0, 2r))}}$ olacak şekilde $f = f_1 + f_2$ bölelim. Böylelikle

$$\|M_F^\alpha f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \leq \|M_F^\alpha f_1\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} + \|M_F^\alpha f_2\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \quad (2.74)$$

$M_F^\alpha: L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma)$ kesirli maksimal operatörün sürekli olması ve Teorem 1.3 yardımıyla,

$$\|M_F^\alpha f_1\|_{L_q(\Gamma(t_0, r))} \lesssim \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))} \quad (2.75)$$

bulunur. $\Gamma(t_0, \tau)$ yuvarından keyfi bir y noktası alalım.

$\Gamma(y, \tau) \cap c(\Gamma(t_0, 2r)) \neq \emptyset$ ise, $\tau > r$ olur. Gerçekten, $z \in \Gamma(y, \tau) \cap c(\Gamma(t_0, 2r))$ alınır, $\tau > |y - z| \geq |t - z| - |t - y| > 2r - r = r$ olur. Diğer taraftan, $\Gamma(y, \tau) \cap c(\Gamma(t_0, 2r)) \subset \Gamma(t_0, 2\tau)$. Gerçekten, $z \in \Gamma(y, \tau) \cap c(\Gamma(t_0, 2r))$ alınır, $|t - z| \leq |y - z| + |t - y| < \tau + r < 2\tau$. Böylelikle,

$$\begin{aligned} M_F^\alpha f_2(y) &= \sup_{\tau > 0} \frac{1}{(v\Gamma(t_0, \tau))^{1-\alpha}} \int_{\Gamma(y, \tau) \cap c(\Gamma(t_0, 2r))} |f(z)| dv(z) \\ &\leq 2 \sup_{\tau > r} \frac{1}{(v\Gamma(t_0, 2\tau))^{1-\alpha}} \int_{\Gamma(t_0, 2\tau)} |f(z)| dv(z) \\ &= 2 \sup_{\tau > 2r} \frac{1}{(v\Gamma(t_0, \tau))^{1-\alpha}} \int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)| dv(z) \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\leq 2 \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1+\alpha} \int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)| dv(z)$$

bulunur. Buradan, her $y \in \Gamma(t_0, \tau)$ için,

$$M_F^\alpha f_2(y) \leq 2 \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1+\alpha} \int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)| dv(z) \quad (2.77)$$

çıkarılır. Sonuç olarak,

$$\|M_F^\alpha f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \lesssim \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))} + r^{\frac{1}{p}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1+\alpha} \int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)| dv(z) \quad (2.78)$$

elde edilir. $p = 1$ durumunda; keyfi $\Gamma(t_0, r)$ yuvarı için

$$\|M_F^\alpha f\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} \leq \|M_F^\alpha f_1\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} + \|M_F^\alpha f_2\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} \quad (2.79)$$

olduğu açıktır. $M_F^\alpha: L_1(\Gamma) \rightarrow WL_1(\Gamma)$ kesirli maksimal operatörün sürekli olması ve Teorem 1.3 yardımıyla, $\|M_F^\alpha f_1\|_{WL_1(\Gamma)} \lesssim \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, 2r))}$ bulunur. (2.77) dan (2.73) elde edilir. ■

Lemma 2.8: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < q < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$ ve $t_0 \in \Gamma$ olsun. Bu durumda, $p > 1$ ve Γ içindeki keyfi $r > 0$ için

$$\|M_F^\alpha f\|_{L_q(\Gamma(t_0, r))} \lesssim r^{\frac{1}{q}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, \tau))} \quad (2.81)$$

eşitsizliği her $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ için gerçekleşir. Ayrıca $p = 1$ için

$$\|M_F^\alpha f\|_{WL_1(\Gamma(t_0, r))} \lesssim r^{\frac{1}{q}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, \tau))} \quad (2.82)$$

eşitsizliği her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ için gerçekleşir.

İspat 2.16: $1 < p < q < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$ olsun.

$$M_1 := r^{\frac{1}{q}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-1+\alpha} \int_{\Gamma(t_0, r)} |f(z)| dv(z) \quad (2.83)$$

ve $M_2 := \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))}$ olarak tanımlayalım. Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$M_1 \lesssim r^{\frac{1}{q}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)|^p dv(z) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.84)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$r^{\frac{1}{q}} \sup_{\tau > 2r} \tau^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{\Gamma(t_0, \tau)} |f(z)|^p dv(z) \right)^{\frac{1}{p}} \gtrsim r^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{\tau > 2r} \tau^{-\frac{1}{q}} \right) \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, 2r))} \approx M_2 \quad (2.85)$$

olur. Lemma 2.7'den dolayı $\|M_F^\alpha f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} \leq M_1 + M_2$ elde edilir ve (2.81) ye varılır. $p = 1$ için (2.82) eşitsizliği (2.73)'ten doğrudan çıkar. ■

M_F^α kesirli maksimal operatörün $LM_{p, \varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayında Spanne-Guliyev tipi sonucu aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 2.12: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < q < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$, $t_0 \in \Gamma$ ve $\varphi_1 \in \Omega_{p, loc}$, $\varphi_2 \in \Omega_{q, loc}$ iken

$$\sup_{r < \tau < \infty} \tau^{\alpha - \frac{1}{p}} \operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi_1(t_0, s) s^{\frac{1}{p}} \leq C \varphi_2(t_0, r) \quad (2.86)$$

φ_1, φ_2 şartını (φ_1, φ_2) sağlasın. Burada C sabiti r den bağımsızdır. Bu durumda, M_Γ^α operatörü $p > 1$ iken $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $LM_{1,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

İspat 2.17: Teorem 2.1 ve Lemma 2.8'den,

$p \in (1, \infty)$ ise,

$$\begin{aligned} \|M_\Gamma^\alpha f\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(t_0, r)^{-1} \sup_{\tau>r} \tau^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, \tau))} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(t_0, r)^{-1} r^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t_0, r))} = \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.87)$$

$p = 1$ ise,

$$\begin{aligned} \|M_\Gamma^\alpha f\|_{WLM_{p,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(t_0, r)^{-1} \sup_{\tau>r} \tau^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, \tau))} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(t_0, r)^{-1} r^{-1} \|f\|_{L_1(\Gamma(t_0, r))} = \|f\|_{LM_{1,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.88)$$

bulunur. ■

Teorem 2.12'den aşağıdaki sonuç elde edilir [14].

Sonuç 2.4: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < q < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$, $\varphi_1 \in \Omega_p$ ve $\varphi_2 \in \Omega_q$ olmak üzere

$$\sup_{r < \tau < \infty} \tau^{\alpha - \frac{1}{q}} \operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi_1(t, s) s^{\frac{1}{p}} \leq C \varphi_2(t, r) \quad (2.89)$$

şartını sağlasın. Burada C sabiti t ile r den bağımsızdır. Bu durumda, M_Γ^α operatörü $p > 1$ iken $M_{p,\varphi_1}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $M_{1,\varphi_1}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi_2}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

Temel sonuçlar için aşağıdaki lemma verilecektir.

Lemma 2.9: Γ Carleson eğrisi ve $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ olsun. Bu durumda, her $t \in \Gamma_0$ için $r_0^\alpha \leq CM_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}(t)$ eşitsizliği elde edilir.

İspat 2.18:

$$M_F^\alpha f(t) = \sup_{t \in B} |B|^{-1+\alpha} \int_B |f(\tau)| dv(\tau) \quad (2.90)$$

olmak üzere, $M_F^\alpha f(t) \leq 2^{1-\alpha} M_F^\alpha f(t)$ olduğu bilinir. $t \in \Gamma_0$ ve (2.90) kullanılarak, $M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}(t) \geq C M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}(t) \geq C \sup_{t \in B} |B|^{-1+\alpha} |B \cap \Gamma_0| \geq C |\Gamma_0|^{-1+\alpha} |\Gamma_0 \cap \Gamma_0| = C r_0^\alpha$ elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem temel sonuçlardan biridir.

Teorem 2.13: Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $t_0 \in \Gamma$ ve $p, q \in [1, \infty)$ olsun.

- i) $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ ise, bu durumda (2.86) şartı, $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ ise, bu durumda (2.86) şartı, $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur.
- ii) $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ ise, bu durumda her $r > 0$ için

$$r^\alpha \varphi_1(r) \leq C \varphi_2(r) \quad (2.91)$$

şartı, M_F^α operatörün $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına ve $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olması için gerek koşuldur. Burada C sabiti r den bağımsızdır.

- iii) $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ olsun. $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ ise, bu durumda (2.91) şartı $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için

gerek ve yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ ise, bu durumda (2.91) şartı, $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur.

İspat 2.19: Teoremin birinci kısmı Teorem 2.12'de ispatlanmıştır. Teoremin ikinci kısmı için, $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ ve $t \in \Gamma_0$ olsun. Lemma 2.9 yardımıyla, $r_0^\alpha \leq C M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}(r)$ verilir. Böylelikle, Lemma 2.3 ve Lemma 2.9 dan

$$\begin{aligned} r_0^\alpha &\lesssim (v(\Gamma_0))^{-\frac{1}{p}} \|M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{L_q(\Gamma_0)} \lesssim \varphi_2(r_0) \|M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{M_{q,\varphi_2}} \\ &\lesssim \varphi_2(r_0) \|\chi_{\Gamma_0}\|_{M_{p,\varphi_1}} \lesssim \frac{\varphi_2(r_0)}{\varphi_1(r_0)} \end{aligned} \quad (2.92)$$

veya

$$\text{her } r_0 > 0 \text{ için, } r_0^\alpha \lesssim \frac{\varphi_2(r_0)}{\varphi_1(r_0)} \Leftrightarrow r_0^\alpha \varphi_1(r_0) \lesssim \varphi_2(r_0) \quad (2.93)$$

bulunur. Bu ifade her $r_0 > 0$ için doğru olduğundan ispat tamamlanır.

Teoremin üçüncü kısmın ispatı, teoremin birinci ve ikinci kısımlarından çıkar. ■

2.3.2. Adams-Guliyev Tipi Sonuç

Temel sonuçlarımız için Guliyev noktasal yaklaşımı önemli bir rol oynar.

Teorem 2.14: Γ Carleson eğrisi, $1 \leq p < \infty, 0 < \alpha < 1$ ve $f \in L_p^{loc}(\Gamma)$ olsun. Bu durumda,

$$M_F^\alpha f(t) \leq C r^\alpha M_F f(t) + C \sup_{r < s < \infty} s^{\alpha - \frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,s))} \quad (2.94)$$

gerçeklenir. Burada C sabiti $r > 0, t \in \Gamma$ ve f den bağımsızdır.

İspat 2.20: $f_1 = f_{\chi_{\Gamma(t,2r)}}$ ve $f_2 = f_{\chi_{c(\Gamma(t,2r))}}$ olacak şekilde $f = f_1 + f_2$ tanımlayalım.

Böylelikle $M_F^\alpha f(t) \leq M_F^\alpha f_1(t) + M_F^\alpha f_2(t)$ bulunur. $M_F^\alpha f_1(t)$ her $z \in \Gamma$ için Hedberg in ([29] sayfa 354) yaklaşımından $|M_F^\alpha f_1(z)| \leq C_1 r^\alpha M_\Gamma f(z)$ elde ederiz. $M_F^\alpha f_2(t)$ her $z \in \Gamma$ için (2.77) dan ve

$$M_F^\alpha f_2(t) \leq 2 \sup_{s>r} \tau^{-1+\alpha} \int_{\Gamma(t,s)} |f(z)| dv(z) \leq C \sup_{r<s<\infty} s^{\alpha-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,s))} \quad (2.95)$$

yardımla (2.94) bulunur. ■

Carleson eğrilerinde M_F^α kesirli integralin Adams-Guliyev tipi sonucu aşağıda ifade edilir [14].

Teorem 2.15: (Adams-Guliyev tipi sonuç) Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, $1 \leq p < q < \infty$ olmak üzere $\varphi \in \Omega_p$

$$\sup_{r<\tau<\infty} \tau^{-1} \operatorname{ess\,inf}_{\tau<s<\infty} \varphi(t,s) s \leq C \varphi(t,r) \quad (2.96)$$

ile

$$\sup_{r<\tau<\infty} \tau^\alpha \varphi(t,\tau)^{\frac{1}{p}} \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \quad (2.97)$$

şartlarını sağlasın. Burada C sabiti $r > 0$ ve $t \in \Gamma$ den bağımsızdır. Bu durumda, $p > 1$ iken M_F^α operatörü $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $M_{1,\varphi}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

İspat 2.21: $1 \leq p < \infty$ ve $f \in M_{p,\varphi}(\Gamma)$ olsun. Teorem 2.14 yardımıyla (2.94) sağlanır. (2.97) şartı ve (2.94) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} M_F^\alpha f(t) &\lesssim r^\alpha M_\Gamma f(t) + \sup_{s>r} s^{\alpha-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,s))} \\ &\leq r^\alpha M_\Gamma f(t) + \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)} \sup_{s>r} s^\alpha \varphi(t,s)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq r^\alpha M_\Gamma f(t) + r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.98)$$

elde edilir. Böylece her $t \in \Gamma$ için $r = \left(\frac{M_{p,\varphi}^{\frac{1}{p}}(\Gamma)}{M_{\Gamma}f(t)} \right)$ seçilirse,

$$M_{\Gamma}^{\alpha}f(t) \lesssim (M_{\Gamma}f(t))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p,\varphi}^{\frac{1}{p}}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \quad (2.99)$$

bulunur. Teorem 2.12'deki M_{Γ}^{α} operatörün $M_{p,\varphi}(\Gamma)$ deki sınırlı olması ve (2.96) şartı sayesinde teorem aşağıdaki şekilde ifade olunur.

$1 < p < q < \infty$ ise,

$$\begin{aligned} \|M_{\Gamma}^{\alpha}f\|_{M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} &\lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{\substack{t \in \Gamma \\ r > 0}} \varphi(t,r)^{-\frac{p}{q}} r^{-\frac{1}{q}} \|M_{\Gamma}f\|_{L_p(\Gamma(t,r))}^{\frac{p}{q}} \\ &\lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \|M_{\Gamma}f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{\frac{p}{q}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.100)$$

$p = 1 < q < \infty$ ise,

$$\begin{aligned} \|M_{\Gamma}^{\alpha}f\|_{WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} &\lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{1-\frac{1}{q}} \sup_{\substack{t \in \Gamma \\ r > 0}} \varphi(t,r)^{-\frac{1}{q}} r^{-\frac{1}{q}} \|M_{\Gamma}f\|_{WL_1(\Gamma(t,r))}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{1-\frac{1}{q}} \|M_{\Gamma}f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (2.101)$$

olur. ■

Aşağıdaki teorem temel sonuçlardan biridir.

Teorem 2.16: Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < q < \infty$ ve $\varphi \in \Omega_p$ olsun.

- i) (2.96) şartını $\varphi(t,r)$ sağlarsa, (2.97) şartı $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına M_{Γ}^{α} operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < q < \infty$ ise, bu durumda (2.97) şartı, $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına M_{Γ}^{α} operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur.

ii) $\varphi \in \mathcal{G}_p$ ise, bu durumda her $r > 0$ için

$$r^\alpha \varphi(r)^{\frac{1}{p}} \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \quad (2.102)$$

şartı, M_F^α operatörün $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına ve $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olması için gerek koşuldur. Burada C sabiti r den bağımsızdır.

iii) $\varphi \in \mathcal{G}_p$ ise, bu durumda (2.102) şartı $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < q < \infty$ ise, bu durumda (2.102) şartı, $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur.

İspat 2.22: Teoremin birinci kısmı, Teorem 2.15'ün sonucudur. Teoremin ikinci kısmı için, $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ ve $t \in \Gamma_0$ olsun. Lemma 2.9 yardımıyla, $r_0^\alpha \lesssim C M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}(r)$ verilir. Böylelikle, Lemma 2.3 ve Lemma 2.9'dan

$$\begin{aligned} r_0^\alpha &\lesssim (v(\Gamma_0))^{-\frac{1}{q}} \|M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{L_q(\Gamma_0)} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \|M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} \\ &\lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \|\chi_{\Gamma_0}\|_{M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.103)$$

veya

$$\text{her } r_0 > 0 \text{ için, } r_0^\alpha \varphi(r_0)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \lesssim 1 \Leftrightarrow r_0^\alpha \varphi(r_0)^{\frac{1}{p}} \lesssim r_0^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \quad (2.104)$$

bulunur. Bu ifade her $t \in \Gamma$ ve $r_0 > 0$ için doğru olduğundan ispat tamamlanır.

Teoremin üçüncü kısmının ispatı, teoremin birinci ve ikinci kısımlarından çıkar. ■

2.3.3. Adams-Gunawan Tipi Sonuç

Carleson eğrilerinde tanımlı M_F^α kesirli maksimal operatörün Adams-Gunawan tipi sonucu aşağıda ifade edilir [31],[32].

Teorem 2.17: (Adams-Gunawan tipi sonuç) Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < q < \infty$ ve (2.96) şartı

$$r^\alpha \varphi(t, r) + \int_r^\infty s^{\alpha-1} \varphi(t, s) ds \leq C \varphi(t, r)^{\frac{p}{q}} \quad (2.105)$$

eşitsizliğini $\varphi \in \Omega_p$ sağlasın. Burada C sabiti $t \in \Gamma$ ve $r > 0$ den bağımsızdır. Bu durumda, $p > 1$ iken M_Γ^α operatörü $M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $p = 1$ iken $M_{1, \varphi}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır.

İspat 2.23: $1 \leq p < \infty$ ve $f \in M_{p, \varphi}(\Gamma)$ olsun. Teorem 2.14 yardımıyla, (2.94) eşitsizliği mevcuttur. (2.97) şartı ve (2.94) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} M_\Gamma^\alpha f(t) &\lesssim r^\alpha M_\Gamma f(t) + \sup_{s>r} s^{\alpha-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t, s))} \\ &\leq r^\alpha M_\Gamma f(t) + \|f\|_{M_{p, \varphi}(\Gamma)} \sup_{s>r} s^\alpha \varphi(t, s) \end{aligned} \quad (2.106)$$

Bu durumda, (2.103) ve (2.106) yardımıyla

$$\begin{aligned} M_\Gamma^\alpha f(t) &\lesssim \min \left\{ \varphi(t, r)^{\frac{p}{q}-1} M_\Gamma f(t), \varphi(t, r)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p, \varphi}(\Gamma)} \right\} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \min \left\{ r^{\frac{p}{q}-1} M_\Gamma f(t), r^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p, \varphi}(\Gamma)} \right\} = (M_\Gamma f(t))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p, \varphi}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \end{aligned} \quad (2.107)$$

minimum kısımları dengeye vardığında supremum kullanıldı. Teorem 2.12 ve (2.107) den,

$1 < p < q < \infty$ ise,

$$\|M_\Gamma^\alpha f\|_{M_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} \lesssim \|f\|_{M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{1-\frac{p}{q}} \|M_\Gamma f\|_{M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)}^{\frac{p}{q}} \lesssim \|f\|_{M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)} \quad (2.108)$$

$p = 1 < q < \infty$ ise,

$$\|M_F^\alpha f\|_{WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{1-\frac{1}{q}} \|M_F f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)}^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi}(\Gamma)} \quad (2.109)$$

olur. ■

Aşağıdaki teorem temel sonuçlardan biridir.

Teorem 2.18: Γ Carleson eğrisi, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < q < \infty$ ve $\varphi \in \Omega_p$ olsun.

- i) (2.96) şartını $\varphi(t, r)$ sağlarsa, (2.103) şartı $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < q < \infty$ ise, bu durumda (2.103) şartı, $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için yeter koşuldur.
- ii) $\varphi \in \mathcal{G}_p$ ise, bu durumda her $r > 0$ için

$$r^\alpha \varphi(r)^{\frac{1}{p}} \leq C \varphi(r)^{\frac{1}{q}} \quad (2.110)$$

şartı, M_F^α operatörün $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına ve $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olması için gerek koşuldur. Burada C sabiti r den bağımsızdır.

- iii) $\varphi \in \mathcal{G}_p$ ise, bu durumda (2.110) şartı $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < q < \infty$ ise, bu durumda (2.110) şartı, $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(\Gamma)$ uzayından $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(\Gamma)$ uzayına M_F^α operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur.

İspat 2.24: Teoremin birinci kısmı, Teorem 2.18'in sonucudur. Teoremin ikinci kısmı için, $\Gamma_0 = \Gamma(t_0, r_0)$ ve $t \in \Gamma_0$ olsun. Lemma 2.9 yardımıyla, $r_0^\alpha \lesssim C M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}(r)$ verilir.

Böylelikle, Lemma 2.3 ve Lemma 2.9'dan

$$\begin{aligned}
r_0^\alpha &\lesssim (v(\Gamma_0))^{-\frac{1}{q}} \|M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{L_q(\Gamma_0)} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \|M_F^\alpha \chi_{\Gamma_0}\|_{M_{q, \varphi^{\frac{1}{q}}(\Gamma)}} \\
&\lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \|\chi_{\Gamma_0}\|_{M_{p, \varphi^{\frac{1}{p}}(\Gamma)}} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

veya

$$\text{her } r_0 > 0 \text{ için, } \quad r_0^\alpha \varphi(r_0)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \lesssim 1 \Leftrightarrow r_0^\alpha \varphi(r_0)^{\frac{1}{p}} \lesssim \varphi(r_0)^{\frac{1}{q}} \tag{2.112}$$

bulunur. Bu ifade her $t \in \Gamma$ ve $r_0 > 0$ için doğru olduğundan ispat tamamlanır.

Teoremin üçüncü kısım ispatı, teoremin birinci ve ikinci kısımlarından çıkar. ■

3. ORLICZ UZAYLARINDA SINIRLILIK

Bu bölümde, Young fonksiyonları ve Orlicz uzaylarının temel tanımları ile maksimal operatörün, maksimal komütatörün ve maksimal operatör komütatörünün Orlicz uzayında sınırlılık kriterlerine yer verilecektir.

Orlicz uzaylarını tanımlamak için Young fonksiyonları hakkında genel bilgiler verilecektir.

$\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu konveks, soldan sürekli, $\lim_{r \rightarrow +0} \Phi(r) = \Phi(0) = 0$ ve $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \infty$ olursa, Young fonksiyonu denir.

ϕ fonksiyonun konveks ve $\Phi(0) = 0$ oluşundan herhangi bir Young fonksiyonun artan olduğu çıkar. $s \in (0, \infty)$ varsa, öyle ki $\Phi(s) = \infty$ iken $r \geq s$ için $\Phi(r) = \infty$ olur.

Φ Young fonksiyonun genelleşmiş tersi, $0 \leq s \leq \infty$, $\Phi^{-1}(s) = \inf \{r \geq 0 : \Phi(r) > s\}$ olarak gösterilir.

Φ Young fonksiyonun tümleyeni $\tilde{\Phi}(r)$

$$\tilde{\Phi}(r) = \begin{cases} \sup \{rs - \Phi(s) : s \in [0, \infty)\}, & r \in [0, \infty) \\ \infty, & r = \infty \end{cases} \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır. $\tilde{\tilde{\Phi}} = \Phi$ olduğundan, $\tilde{\Phi}$ fonksiyonu da Young fonksiyonudur.

$0 < r < \infty$ için $0 < \Phi(r) < \infty$ olmak üzere, Young fonksiyonlar kümesi Y ile belirtilecektir. $\Phi \in Y$ ise, Φ fonksiyonu $[0, \infty)$ da ki her kapalı aralıkta mutlak sürekli ve $[0, \infty)$ dan kendine birebir ve örtendir.

Φ Young fonksiyonu, $C > 1$ için $\Phi(2r) \leq C \Phi(r)$, $r > 0$ olursa, Δ_2 - şartı sağlanır denir ve $\Phi \in \Delta_2$ ile gösterilir. $\Phi \in \Delta_2$ ise, $\Phi \in Y$ olur.

Φ Young fonksiyonu, bazı $C > 1$ için

$$\Phi(r) \leq \frac{1}{2C} \Phi(Cr), \quad r \geq 0 \quad (3.2)$$

şartını sağlarsa, ∇_2 - şartı sağlanır denir ve $\Phi \in \nabla_2$ ile gösterilir.

$\Phi(r) = r$ ise, Δ_2 şartını sağlar ama ∇_2 şartını sağlamaz.

$\Phi(r) = e^r - r - 1$ ise, Δ_2 şartını sağlamaz ama ∇_2 şartını sağlar.

$1 < p < \infty$, $\Phi(r) = r^p$ ise, hem Δ_2 hem ∇_2 şartını sağlar [63].

$$\Phi \in \nabla_2 \leftrightarrow \tilde{\Phi} \in \Delta_2 \quad (3.3)$$

Φ Young fonksiyonu ve onun tümleyeni $\tilde{\Phi}$ olmak üzere, her $r \geq 0$ için

$$r \leq \Phi^{-1}(r) \tilde{\Phi}^{-1}(r) \leq 2r \quad (3.4)$$

Lemma 3.1: [38] $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ Young fonksiyonun kanonik gösterimi

$$\Phi(r) = \int_0^r \varphi(s) ds, \quad r > 0 \quad (3.5)$$

olsun.

- i) Varsayalım ki $\Phi \in \Delta_2$ olsun. Özel halde, bazı $A \geq 2$ için $\Phi(2r) \leq A\Phi(r)$ olsun. $\beta = \log_2 A$ alalım. $p > \beta + 1$ ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir:

$$\int_r^\infty \frac{\varphi(s)}{s^p} ds \lesssim \frac{\Phi(r)}{r^p}, \quad r > 0 \quad (3.6)$$

- ii) Varsayalım ki $\Phi \in \nabla_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir:

$$\int_0^r \frac{\varphi(s)}{s} ds \lesssim \frac{\Phi(r)}{r}, \quad r > 0 \quad (3.7)$$

eşitsizliği elde edilir.

L^Φ Orlicz uzayları, Lebesgue uzaylarının genelleştirilmesi olarak ilk defa Orlicz tarafından ortaya konulmuştur. Bu uzaylar, harmonik analiz ve uygulama alanlarında önemli fonksiyonel yapılardan biridir. Örneğin Hardy-Littlewood maksimal operatör $1 < p < \infty$, L_p de sınırlıdır ama L_1 de sınırlı değildir. L^Φ Orlicz uzayları kullanılarak, özel olarak $p = 1$ de maksimal operatörün sınırlılık kriterlerini araştırılabilir. L_1 uzaylarının çalışmadığı durumlarda Orlicz uzayları, L_1 uzayının uygun bir alternatiftir.

L^Φ Orlicz uzayları olasılık, istatistik, potansiyel teori, kısmi diferansiyel denklemler, harmonik analiz gibi birçok alanda ayrıntılı olarak çalışılmaktadır.

Φ Young fonksiyonu olmak üzere

$$L^\Phi(\Gamma) = \left\{ f \in L_1^{loc}(\Gamma) : \int_{\Gamma} \Phi(k|f(\tau)|) d\nu(\tau) < \infty, \quad \text{bazı } k > 0 \right\} \quad (3.8)$$

kümesine Orlicz uzayı denir. $L^\Phi(\Gamma)$ uzayı

$$\|f\|_{L^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Gamma} \Phi\left(\frac{|f(\tau)|}{\lambda}\right) d\nu(\tau) \leq 1 \right\} < \infty \quad (3.9)$$

şartına sahip olan bir Banach uzayıdır. $1 \leq p < \infty$, $\Phi(r) = r^p$ ise, bu durumda $L^\Phi(\Gamma) = L_p(\Gamma)$ olur.

$WL^\Phi(\Gamma) = \{ f \in L_1^{loc}(\Gamma) : \|f\|_{WL^\Phi} < \infty \}$ zayıf Orlicz uzayı

$$\|f\|_{WL^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sup_{r>0} \Phi(r) m\left(\frac{f}{\lambda}, r\right) \leq 1 \right\} < \infty \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır.

Orlicz uzayları ve zayıf Orlicz uzayları normları arasındaki ilişki şöyledir:

$$\|f\|_{WL^\Phi} \leq \|f\|_{L^\Phi}.$$

$\Gamma_0 \subset \Gamma$ ölçülebilir küme, f ölçülebilir fonksiyon ve $r > 0$ için $m(\Gamma_0, f, r) = |\{t \in \Gamma_0 : |f(t)| > r\}|$ olsun. $\Gamma_0 = \Gamma$ olduğunda kısaca $m(f, r)$ ile gösterilir.

$L_{loc}^\Phi(\Gamma)$ uzayı, $f\chi_\varepsilon \in L^\Phi(\Gamma)$, $\varepsilon \subset \Gamma$ olmak üzere, bütün f fonksiyonları ifade eder.

$$\sup_{r>0} \Phi(r) m(\Gamma_0, f, r) = \sup_{r>0} r m(\Gamma_0, f, \Phi^{-1}(r)) = \sup_{r>0} r m(\Gamma_0, \Phi(|f|), r) \quad (3.11)$$

$\|f\|_{L^\Phi(\Gamma_0)} = \|f\chi_{\Gamma_0}\|_{L^\Phi(\Gamma)}$ ve $\|f\|_{WL^\Phi(\Gamma_0)} = \|f\chi_{\Gamma_0}\|_{WL^\Phi(\Gamma)}$ olmak üzere

$$\int_{\Gamma_0} \Phi\left(\frac{|f(\tau)|}{\|f\|_{L^\Phi(\Gamma_0)}}\right) d\nu(\tau) \leq 1, \quad \sup_{r>0} \Phi(r) m\left(\Gamma_0, \frac{f}{\|f\|_{WL^\Phi(\Gamma_0)}}, r\right) \leq 1 \quad (3.12)$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teorem Hölder eşitsizliğinin bir başka ifadesidir [41].

Teorem 3.1: $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ölçülebilir küme ve Γ_0 üzerinde f ve g ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Φ Young fonksiyon ve tümleyeni $\tilde{\Phi}$ olmak üzere

$$\int_{\Gamma_0} |f(\tau)g(\tau)|d\nu(\tau) \leq 2\|f\|_{L^\Phi(\Gamma_0)}\|g\|_{L^{\tilde{\Phi}}(\Gamma_0)} \quad (3.13)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Lemma 3.2: Φ Young fonksiyon ve Γ içinde bir yuvar $\Gamma(t, r)$ olsun. Bu durumda

$$\|\chi_{\Gamma(t,r)}\|_{L^\Phi(\Gamma)} = \|\chi_{\Gamma(t,r)}\|_{WL^\Phi(\Gamma)} = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\nu(\Gamma(t,r))^{-1}\right)} \quad (3.14)$$

olur.

Teorem 3.1, Lemma 3.2 ve (3.19) den aşağıdaki yaklaşım elde edilir.

Lemma 3.3: Φ Young fonksiyon ve $\Gamma(t, r)$ yuvarları için aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir:

$$\int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|d\nu(\tau) \leq 2\nu(\Gamma(t,r)) \Phi^{-1}(\nu(\Gamma(t,r))^{-1})\|f\|_{L^\Phi(\Gamma(t,r))} \quad (3.15)$$

3.1 Carleson Eğrilerinde Maksimal Operatör

$f \in L_1^{\text{loc}}(\Gamma)$ olsun. M_Γ maksimal fonksiyonu

$$M_{\Gamma}f(t) = \sup_{r>0} \left(v\Gamma(t,r) \right)^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| dv(\tau) , \quad t \in \Gamma \quad (3.16)$$

olarak tanımlanır.

Carleson eğrilerinde tanımlı M_{Γ} maksimal operatörün sınırlılık kriterini $L^{\Phi}(\Gamma)$ Orlicz uzaylarında ifade eden teorem aşağıda verildiği şekildedir:

Teorem 3.2: Φ keyfi bir Young fonksiyon ve Γ Carleson eğrisi olsun. Bu durumda, M_{Γ} maksimal operatör $L^{\Phi}(\Gamma)$ uzayından $WL^{\Phi}(\Gamma)$ uzayına sınırlıdır ve $\Phi \in \nabla_2$ iken $L^{\Phi}(\Gamma)$ uzayında sınırlıdır.

İspat 3.1: İlk önce M_{Γ} maksimal operatör $L^{\Phi}(\Gamma)$ uzayından $WL^{\Phi}(\Gamma)$ uzayına sınırlı olsun. $\|f\|_{L^{\Phi}(\Gamma)} = 1$ öyle ki modülleri

$$\rho_{\phi}(f) = \int_{\Gamma} \phi|f(\tau)g(\tau)| dv(\tau) \leq 1 \quad (3.17)$$

olan $f \in L^{\Phi}(\Gamma)$ alınsın.

Jensen eşitsizliğinden, $\Gamma(t,r)$ yuvarı için

$$\phi \left(\frac{1}{v(\Gamma(t,r))} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| dv(\tau) \right) \leq \frac{1}{v(\Gamma(t,r))} \int_{\Gamma(t,r)} \phi|f(\tau)| dv(\tau) \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.12) ve maksimal operatörün tanımı kullanılarak

$$\phi(M_{\Gamma}f(t)) \leq M_{\Gamma}[(\phi \circ f)(t)] \quad (3.19)$$

yazılır.

$\|f\|_{L^{\Phi}(\Gamma)} = 1$ ve $C \geq 1$ için $\frac{1}{C} \phi(r) \geq \phi\left(\frac{r}{C}\right)$ olmak üzere, (3.18) ve maksimal operatörün (1,1) zayıf sınırlılığından

$$\begin{aligned}
\nu(\{t \in \Gamma: M_\Gamma f(t) > r\}) &= \nu(\{t \in \Gamma: \phi(M_\Gamma f(t)) > \phi(r)\}) \\
&\leq \nu(\{t \in \Gamma: M_\Gamma(\phi \circ f)(t) > \phi(r)\}) \\
&\leq \frac{C}{\phi(r)} \int_\Gamma \phi|f(t)| dv(t) \leq \frac{C}{\phi(r)} \leq \frac{1}{\phi\left(\frac{r}{C \|f\|_{L^\Phi(\Gamma)}}\right)}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

bulunur [5].

$\|\cdot\|_{L^\Phi(\Gamma)}$ normu homojen olduğundan

$$\nu(\{t \in \Gamma: M_\Gamma f(t) > r\}) \leq \frac{1}{\phi\left(\frac{r}{C \|f\|_{L^\Phi(\Gamma)}}\right)} \tag{3.21}$$

eşitsizliği her $f \in L^\Phi(\Gamma)$ için doğrudur.

$\Phi \in \nabla_2$ iken M_Γ maksimal operatörün $L^\Phi(\Gamma)$ da sınırlı olmasını ispatı verilsin.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \Phi\left(\frac{M_\Gamma f(t)}{\Lambda}\right) dv(t) &= \int_\Gamma \int_0^{\frac{M_\Gamma f(t)}{\Lambda}} \varphi(s) ds dv(t) \\
&= \int_\Gamma \int_0^\infty \chi_{\{s \in [0, \infty): \frac{M_\Gamma f(t)}{\Lambda} > s\}} \varphi(s) ds dv(t) \\
&= \int_0^\infty \varphi(s) \int_\Gamma \chi_{\{t \in \Gamma: M_\Gamma f(t) > \Lambda s\}} dv(t) ds \\
&= \frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) \nu(\{t \in \Gamma: M_\Gamma f(t) > \lambda\}) d\lambda \\
&= \frac{2}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \nu(\{t \in \Gamma: M_\Gamma f(t) > 2\lambda\}) d\lambda
\end{aligned} \tag{3.22}$$

bulunur.

Maksimal operatörün $(1,1)$ zayıf sınırlılık olmasından

$$\nu(\{t \in \Gamma: M_\Gamma f(t) > 2\lambda\}) \lesssim \frac{1}{\Lambda} \int_{\{t \in \Gamma: |f(t)| > \lambda\}} |f(t)| d\nu(t) \quad (3.23)$$

ve integral mertebesini deęiřtirerek

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \Phi\left(\frac{M_\Gamma f(t)}{\Lambda}\right) d\nu(t) &\lesssim \frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \left(\int_{\{t \in \Gamma: |f(t)| > \lambda\}} |f(t)| d\nu(t) \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\lesssim \frac{1}{\Lambda} \int_\Gamma |f(t)| \left(\int_0^{|f(t)|} \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \right) d\nu(t) \\ &\lesssim \frac{1}{\Lambda} \int_\Gamma |f(t)| \left(\int_0^{2\Lambda^{-1}|f(t)|} \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \right) d\nu(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Lemma 3.1 kullanılarak $|f(t)| \neq 0$ olursa,

$$\int_0^{2\Lambda^{-1}|f(t)|} \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \lesssim |f(t)|^{-1} \Lambda \Phi\left(\frac{2|f(t)|}{\Lambda}\right) \quad (3.25)$$

elde edilir.

ϕ fonksiyonun konveks kabul edilerek $k \geq 1$ için $k\phi(r) \leq \phi(kr)$ ve $r > 0$ iken

$$\int_\Gamma \Phi\left(\frac{M_\Gamma f(t)}{\Lambda}\right) d\nu(t) \leq c_0 \int_\Gamma \Phi\left(\frac{2|f(t)|}{\Lambda}\right) d\nu(t) \leq \int_\Gamma \Phi\left(\frac{c_0|f(t)|}{\Lambda}\right) d\nu(t) \quad (3.26)$$

olduğu çıkar. Burada c_0 sabittir. $\Lambda = c_0 \|f\|_{L^\Phi(\Gamma)}$ alınırsa,

$$\int_\Gamma \Phi\left(\frac{M_\Gamma f(t)}{\Lambda}\right) d\nu(t) \leq 1 \quad (3.27)$$

elde edilir. Normun tanımından $\|M_\Gamma f\|_{L^\Phi(\Gamma)} \leq \Lambda = c_0 \|f\|_{L^\Phi(\Gamma)}$ bulunur. ■

3.2. Carleson Eğrilerinde Maksimal Komütatör

Bu bölümde, Orlicz uzaylarında maksimal komütatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşulları verilecektir. İntegral operatörlerin komütatörlerin sınırlılık kriterlerini vermek için, ilk defa John ve Nirenberg tarafından ortaya koyulan BMO (bounded mean oscillation) uzaylarından bahsedilecektir [42].

$b \in L_1^{\text{loc}}(\Gamma)$, $\Gamma(t, r) \subset \Gamma$ olsun.

$$b_{\Gamma(t,r)} = \left(\nu \Gamma(t, r) \right)^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} b(\tau) d\nu(\tau)$$

olacak şekilde,

$$\|b\|_* = \sup_{\Gamma(t,r)} \left(\nu \Gamma(t, r) \right)^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |b(\tau) - b_{\Gamma(t,r)}| d\nu(\tau) \quad (3.28)$$

yarı normu sonlu ise, b fonksiyonuna BMO uzayındandır denir.

$\log^+ t = \max(\log t, 0)$, $t > 0$ olmak üzere

$$\int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \log^+ |f(\tau)| d\nu(\tau) < \infty \quad (3.29)$$

şartını sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlar kümesine $L \log L$ Zygmund uzayı denir.

$\nu(\Gamma_0) < \infty$ olacak şekilde keyfi bir $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ölçülebilir küme ve keyfi uygun bir f fonksiyonu için, $\|f\|_{L(\log L), \Gamma_0}$ normu aşağıdaki gibi verilir:

$$\|f\|_{L(\log L), \Gamma_0} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\nu(\Gamma_0)} \int_{\Gamma_0} \frac{|f(t)|}{\lambda} \log \left(2 + \frac{|f(t)|}{\lambda} \right) d\nu(t) \leq 1 \right\} \quad (3.30)$$

$\|f\|_{e^L, \Gamma_0}$ normu ise şöyledir:

$$\|f\|_{e^L, \Gamma_0} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\nu(\Gamma_0)} \int_{\Gamma_0} e^{\frac{|f(t)|}{\lambda}} d\nu(t) \leq 2 \right\} \quad (3.31)$$

Bu durumda, uygun f ve g fonksiyonları için genelleşmiş Hölder eşitsizliği sağlanır [41]:

$$\frac{1}{v(\Gamma_0)} \int_{\Gamma_0} |f(t)| |g(t)| dv(t) \lesssim \|f\|_{e^{L\Gamma_0}} \|g\|_{L(\log L), \Gamma_0} \quad (3.32)$$

Homojen tipi uzaylarda John ve Nirenberg eşitsizliği aşağıda verilmiştir [43]:

Lemma 3.4: $b \in BMO(\Gamma)$ olsun. Bu durumda, $C_1, C_2 > 0$ sabitleri vardır öyle ki her $B \subset \Gamma$ ve her $\alpha > 0$ iken

$$v(\{\tau \in \Gamma(t, r): |b(\tau) - b_{\Gamma(t, r)}| > \alpha\}) \leq C_1 v\Gamma(t, r) e^{-\frac{C_2}{\|b\|_*} \alpha} \quad (3.33)$$

gerçeklenir.

Orlicz uzaylarında Genelleşmiş Hölder eşitsizliği ve John ve Nirenberg eşitsizliğinden

$$\frac{1}{v\Gamma(t, r)} \int_{\Gamma(t, r)} |b(\tau) - b_{\Gamma(t, r)}| |g(\tau)| dv(\tau) \lesssim \|b\|_* \|g\|_{L(\log L), \Gamma(t, r)} \quad (3.34)$$

bulunur.

Γ üzerinde tanımlı b fonksiyonu için,

$$b^-(t) = \begin{cases} 0, & b(t) \geq 0 \\ |b(t)|, & b(t) < 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

ve $b^+(t) = |b(t)| - b^-(t)$ tanımlanır. Açık olarak, $b^+(t) - b^-(t) = b(t)$ elde edilir.

Lemma 3.5: $b \in BMO(\Gamma)$, Φ Young fonksiyonu ve $\Phi \in \Delta_2$ olsun. Böylece

$$\|b\|_* \approx \sup_{\Gamma(t, r)} \phi^{-1}(v\Gamma(t, r))^{-1} \|(b - b_{\Gamma(t, r)})\chi_{\Gamma(t, r)}\|_{L\Phi(\Gamma)} \quad (3.36)$$

gerçeklenir [44].

$b \in L_1^{loc}(\Gamma)$ ve $t \in \Gamma$ olsun. $M_{b,\Gamma}$ maksimal komütatör,

$$M_{b,\Gamma}(f)(t) = \sup_{r>0} \left(\nu\Gamma(t,r) \right)^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |b(t) - b(\tau)| |f(\tau)| d\nu(\tau) \quad (3.37)$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.6: $b \in L_1^{loc}(\Gamma)$, $t_0 \in \Gamma$ ve $r_0 > 0$ olsun. Bu durumda,

$$|b(t) - b_{\Gamma(t,r)}| \leq C M_{b,\Gamma}(\chi_{\Gamma(t_0,r_0)})(t), \quad t \in \Gamma(t_0, r_0) \quad (3.38)$$

eşitsizliği gerçekleşir [45].

Lemma 3.7: $b \in L_1^{loc}(\Gamma)$ ve $t \in \Gamma$ olsun. Bu durumda,

$$M_\Gamma(M_\Gamma f)(t) \approx \sup_{r>0} \|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)} \quad (3.39)$$

gerçeklenir.

İspat 3.2: Γ içinde $\Gamma(t,r)$ bir yuvar olsun. Zayıf tipi yaklaşımlar için; $C > 1$ sabiti vardır öyle ki her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ ve her $t > \left(\nu\Gamma(t,r) \right)^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} f(\tau) d\nu(\tau) = 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{cr} \int_{\{t \in \Gamma(t,r): |f(\tau)| > r\}} |f(\tau)| d\nu(\tau) \\ & \leq \nu(\{\tau \in \Gamma(t,r): M_\Gamma(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) > r\}) \\ & \leq \frac{c}{r} \int_{\{t \in \Gamma(t,r): |f(\tau)| > \frac{r}{2}\}} |f(\tau)| d\nu(\tau) \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(t,r)} M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) d\nu(\tau) &= \int_0^{\infty} \nu(\{\tau \in \Gamma(t,r): M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) > \lambda\}) d\lambda \\
&= \int_0^{|f|_{\Gamma(t,r)}} \nu(\{\tau \in \Gamma(t,r): M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) > \lambda\}) d\lambda \\
&\quad + \int_{|f|_{\Gamma(t,r)}}^{\infty} \nu(\{\tau \in \Gamma(t,r): M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) > \lambda\}) d\lambda \\
&= \nu\Gamma(t,r)|f|_{\Gamma(t,r)} + \int_{|f|_{\Gamma(t,r)}}^{\infty} \nu(\{\tau \in \Gamma(t,r): M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) > \lambda\}) d\lambda \\
&\geq \nu\Gamma(t,r)|f|_{\Gamma(t,r)} + \frac{1}{c} \int_{|f|_{\Gamma(t,r)}}^{\infty} \left(\int_{\{t \in \Gamma(t,r): |f(\tau)| > \lambda\}} |f(\tau)| d\nu(\tau) \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (3.41) \\
&= \nu\Gamma(t,r)|f|_{\Gamma(t,r)} + \frac{1}{c} \int_{\{t \in \Gamma(t,r): |f(\tau)| > |f|_{\Gamma(t,r)}\}} \left(\int_{|f|_{\Gamma(t,r)}}^{|f(\tau)|} \frac{d\lambda}{\lambda} \right) |f(\tau)| d\nu(\tau) \\
&= \nu\Gamma(t,r)|f|_{\Gamma(t,r)} + \frac{1}{c} \int_{\{t \in \Gamma(t,r): |f(\tau)| > |f|_{\Gamma(t,r)}\}} |f(\tau)| \log \frac{|f(\tau)|}{|f|_{\Gamma(t,r)}} d\nu(\tau) \\
&\geq \frac{1}{c} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(\tau)|}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(t,r)} M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) d\nu(\tau) &= \int_0^{\infty} \nu(\{\tau \in \Gamma(t,r): M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) > \lambda\}) d\lambda \\
&\approx \int_0^{\infty} \nu(\{\tau \in \Gamma(t,r): M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) > 2\lambda\}) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{0}{|f|_{\Gamma(t,r)}}}^{|f|_{\Gamma(t,r)}} \nu(\{\tau \in \Gamma(t,r): M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) > 2\lambda\}) d\lambda \\
&+ \int_{|f|_{\Gamma(t,r)}}^{\infty} \nu(\{\tau \in \Gamma(t,r): M_{\Gamma}(f\chi_{\Gamma(t,r)})(\tau) > 2\lambda\}) d\lambda \\
&\leq \nu\Gamma(t,r)|f|_{\Gamma(t,r)} + c \int_{|f|_{\Gamma(t,r)}}^{\infty} \left(\int_{\{t \in \Gamma(t,r): |f(\tau)| > \lambda\}} |f(\tau)| d\nu(\tau) \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \nu\Gamma(t,r)|f|_{\Gamma(t,r)} + c \int_{\{t \in \Gamma(t,r): |f(\tau)| > |f|_{\Gamma(t,r)}\}} |f(\tau)| \log \frac{|f(\tau)|}{|f|_{\Gamma(t,r)}} d\nu(\tau) \\
&\leq c \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(\tau)|}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Bu sebeple, her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ için

$$M_{\Gamma}(M_{\Gamma}f)(t) \approx \sup_{r>0} (\nu\Gamma(t,r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(\tau)|}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau) \tag{3.43}$$

Böylece

$$1 \leq (\nu\Gamma(t,r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(\tau)|}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau) \tag{3.44}$$

olduğundan, $|f|_{\Gamma(t,r)} \leq \|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}$ bulunur.

$\log^+(ab) \leq \log^+ a + \log^+ b$, $a, b > 0$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&(\nu\Gamma(t,r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(\tau)|}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau) = \\
&(\nu\Gamma(t,r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(\tau)|}{\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}} \frac{\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \right) \right) d\nu(\tau)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\nu\Gamma(t,r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(\tau)|}{\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau) \\
&\quad + (\nu\Gamma(t,r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau) \\
&\leq \|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)} + |f|_{\Gamma(t,r)} \log^+ \frac{\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}}{|f|_{\Gamma(t,r)}}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\frac{\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \geq 1 \text{ ve } r \geq 1 \text{ iken } \log r \leq r,$$

$$(\nu\Gamma(t,r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(\tau)|}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau) \leq 2\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)} \tag{3.46}$$

Diğer taraftan, $\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}$

$$= (\nu\Gamma(t,r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(\tau)|}{\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau) \tag{3.47}$$

olduğundan ve $|f|_{\Gamma(t,r)} \leq \|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)}$ kullanarak,

$$\|f\|_{L(1+\log^+ L), \Gamma(t,r)} \lesssim (\nu\Gamma(t,r))^{-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(\tau)|}{|f|_{\Gamma(t,r)}} \right) d\nu(\tau) \tag{3.48}$$

bulunur. (3.43), (3.46) ve (3.48) den (3.39) çıkarılır. ■

Lemma 3.8: Γ Carleson eğrisi ve $b \in BMO(\Gamma)$ olsun. Bu durumda bir C sabiti vardır öyle ki hemen hemen her $t \in \Gamma$ ve her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ için

$$M_{b,\Gamma}f(t) \leq C \|b\|_* M_\Gamma(M_\Gamma f)(t) \tag{3.49}$$

gerçeklenir.

İspat 3.3: $t \in \Gamma$ ve $\Gamma(t, r)$ yuvarı belirlensin. $f_1(\tau) = f(\tau)\chi_{\Gamma(t, 3r)}$ ve $f_2(\tau) = f(\tau)\chi_{c_{\Gamma(t, 3r)}}$ olacak şekilde $f = f_1 + f_2$ olsun. $\chi_{\Gamma(t, 3r)}$ ile $\Gamma(t, 3r)$ yuvarın karakteristik fonksiyonu ifade edilir. Bu durumda, keyfi $\tau \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
M_{b, \Gamma} f(\tau) &= M_{\Gamma} \left((b - b(\tau)) f \right) (\tau) \\
&= M_{\Gamma} \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)} + b_{\Gamma(t, 3r)} - b(\tau)) f \right) (\tau) \\
&\leq M_{\Gamma} \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f \right) (\tau) + M_{\Gamma} \left((b_{\Gamma(t, 3r)} - b(\tau)) f \right) (\tau) \\
&\leq M_{\Gamma} \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_1 \right) (\tau) + M_{\Gamma} \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_2 \right) (\tau) + |b_{\Gamma(t, 3r)} - b(\tau)| M_{\Gamma} f(\tau)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

bulunur. $0 < \delta < 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left((v\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} (M_{b, \Gamma} f(\tau))^{\delta} dv(\tau) \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq \left((v\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} \left(M_{\Gamma} \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_1 \right) (\tau) \right)^{\delta} dv(\tau) \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&+ \left((v\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} \left(M_{\Gamma} \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_2 \right) (\tau) \right)^{\delta} dv(\tau) \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&+ \left((v\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} (|b(\tau) - b_{\Gamma(t, 3r)}| M_{\Gamma} f(\tau))^{\delta} dv(\tau) \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= I_1(t, r) + I_2(t, r) + I_3(t, r)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

ilk önce $I_1(t, r)$ e bakılsın. M_{Γ} operatörünün zayıf tipi yakınsaklığı hatırlanarak [5]

$$I_1^{\delta}(t, r) \leq (v\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} \left(M_{\Gamma} \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_1 \right) (\tau) \right)^{\delta} dv(\tau)$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_0^{\nu\Gamma(t, r)} \left[\left(M_\Gamma \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_1 \right) \right)^* (t) \right]^\delta d(t) \\
&\leq (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \left[\sup_{0 < t < \nu\Gamma(t, r)} t \left(M_\Gamma \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_1 \right) \right)^* (t) \right]^\delta \int_0^{\nu\Gamma(t, r)} t^{-\delta} d(t) \\
&\lesssim (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \| (b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_1 \|_{L_1(\Gamma)}^\delta (\nu\Gamma(t, r))^{-\delta+1} \\
&\lesssim \| (b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f \|_{L_1(\Gamma(t, 3r))}^\delta (\nu\Gamma(t, r))^{-\delta}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Böylece

$$I_1(t, r) \leq (\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, 3r)} |b - b_{\Gamma(t, 3r)}| |f(\tau)| d\nu(\tau) \tag{3.53}$$

elde edilir. Lemma 3.4, Lemma 3.7 ve (3.32) kullanılarak

$$\begin{aligned}
I_1(t, r) &\leq \| (b - b_{\Gamma(t, 3r)}) \|_{e^{L, \Gamma(t, 3r)}} \| f \|_{L(\log L), \Gamma(t, 3r)} \\
&\lesssim \| b \|_* \| f \|_{L(\log L), \Gamma(t, 3r)} \leq \| b \|_* M_\Gamma(M_\Gamma f)(t)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

elde edilir. $I_2(t, r)$ e bakalım. Keyfi $\tau \in \Gamma(t, r)$ noktaları için

$$M_\Gamma \left((b_{\Gamma(t, 3r)} - b(\tau)) f_2 \right) (\tau) \leq C M_\Gamma \left((b_{\Gamma(t, 3r)} - b(\tau)) f_2 \right) (t) \tag{3.55}$$

burada C mutlak sabittir. (3.32) ve Lemma 3.7' den

$$\begin{aligned}
I_2(t, r) &\leq \left((\nu\Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} \left(M_\Gamma \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_2 \right) (\tau) \right)^\delta d\nu(\tau) \right)^\delta = \\
M_\Gamma \left((b - b_{\Gamma(t, 3r)}) f_2 \right) (t) &= \sup_{r_0 > 0} (\nu\Gamma(t, r_0))^{-1} \int_{\Gamma(t, r_0)} |b - b_{\Gamma(t, 3r)}| |f_2(\tau)| d\nu(\tau)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{r_0 > 0} (\nu \Gamma(t, r_0))^{-1} \int_{\Gamma(t, r_0) \setminus c(\Gamma(t, 3r))} |b(\tau) - b_{\Gamma(t, 3r)}| |f(\tau)| d\nu(\tau) \\
&= \sup_{r_0 > 3r} (\nu \Gamma(t, r_0))^{-1} \int_{\Gamma(t, r_0) \setminus \Gamma(t, 3r)} |b(\tau) - b_{\Gamma(t, 3r)}| |f(\tau)| d\nu(\tau) \\
&\leq \sup_{r_0 > 3r} (\nu \Gamma(t, r_0))^{-1} \int_{\Gamma(t, r_0) \setminus \Gamma(t, 3r)} |b(\tau) - b_{\Gamma(t, r_0)}| |f(\tau)| d\nu(\tau) \\
&\quad + \sup_{r_0 > 3r} (\nu \Gamma(t, r_0))^{-1} |b_{\Gamma(t, 3r)} - b_{\Gamma(t, r_0)}| \int_{\Gamma(t, r_0) \setminus \Gamma(t, 3r)} |f(\tau)| d\nu(\tau) \\
&\leq \sup_{r_0 > 3r} \| (b - b_{\Gamma(t, r_0)}) \|_{e^{L, \Gamma(t, r_0)}} \|f\|_{L(\log L), \Gamma(t, r_0)} \\
&\quad + \|b\|_* \sup_{r_0 > 3r} \log \frac{r_0}{r} (\nu \Gamma(t, r_0))^{-1} \|f\|_{L, \Gamma(t, r_0) \setminus \Gamma(t, 3r)} \\
&\leq \|b\|_* \sup_{r_0 > 3r} \|f\|_{L(\log L), \Gamma(t, r_0)} \lesssim \|b\|_* M_\Gamma(M_\Gamma f)(t).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Buradan $I_2(t, r) \lesssim \|b\|_* M_\Gamma(M_\Gamma f)(t)$ elde edilir.

Son olarak, I_3 yaklaşımı için; $0 < \delta < 1$, $a = \frac{1}{\delta}$ olmak üzere Hölder eşitsizliği ve $1 < \alpha < \infty$, $\phi(t) = t^\alpha$ Lemma 3.5 uygulanarak

$$\begin{aligned}
&I_3(t, r) \leq \\
&\left((\nu \Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} (|b(\tau) - b_{\Gamma(t, 3r)}|)^a d\nu(\tau) \right)^{\frac{1}{a}} (\nu \Gamma(t, r))^{-1} \int_{\Gamma(t, r)} (M_\Gamma f)(\tau) d\nu(\tau) \\
&\lesssim \|b\|_* M_\Gamma(M_\Gamma f)(t)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Lemma 3.8, Lebesgue diferansiyellenebilme teoremi ve $I_1(t, r)$, $I_2(t, r)$, $I_3(t, r)$ yaklaşımlarını sağlar. ■

Aşağıdaki teorem, $L^\phi(\Gamma)$ Orlicz uzaylarında $M_{b, \Gamma}$ operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşulları verilmektedir:

Teorem 3.3: $\phi \in Y$ Young fonksiyonu, Γ Carleson eğrisi ve $b \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun.

- i) $\Phi \in \nabla_2$ ise, bu durumda $L^\phi(\Gamma)$ uzayında $M_{b,\Gamma}$ operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO(\Gamma)$ olmasıdır.
- ii) $\Phi \in \Delta_2$ ise, bu durumda $L^\phi(\Gamma)$ uzayında $M_{b,\Gamma}$ operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO(\Gamma)$ olmasıdır.
- iii) $\Phi \in \Delta_2 \cup \nabla_2$ ise, bu durumda $L^\phi(\Gamma)$ uzayında $M_{b,\Gamma}$ operatörün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO(\Gamma)$ olmasıdır.

İspat 3.4: 1. $b \in BMO(\Gamma)$ olsun. Bu durumda, (3.12)'den, her $t \in \Gamma$ için ve her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$

$$M_{b,\Gamma}f(t) \lesssim \|b\|_* M_\Gamma(M_\Gamma f)(t) \quad (3.58)$$

elde edilir. *Teorem 3.2, Lemma 3.8 ve (3.13) 'ten*

$$\|M_{b,\Gamma}f\|_{L^\phi(\Gamma)} \lesssim \|b\|_* \|M_\Gamma(M_\Gamma f)(t)\|_{L^\phi(\Gamma)} \lesssim \|b\|_* \|M_\Gamma f(t)\|_{L^\phi(\Gamma)} \lesssim \|b\|_* \|f\|_{L^\phi(\Gamma)}$$

2. $L^\phi(\Gamma)$ uzayında $M_{b,\Gamma}$ operatörü sınırlı olsun. $\Gamma_0 = \Gamma(t, r)$ yuvarı alınsın, (3.19) yardımıyla

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v(\Gamma_0)} \int_{\Gamma_0} |b(\tau) - b_{\Gamma_0}| dv(\tau) = \\ & \frac{1}{v(\Gamma_0)} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{1}{v(\Gamma_0)} \int_{\Gamma_0} |b(\tau) - b(z)| dv(z) \right| dv(\tau) \leq \\ & \leq \frac{1}{(v(\Gamma_0))^2} \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} |b(\tau) - b(z)| dv(z) dv(\tau) \quad (3.59) \\ & = \frac{1}{v(\Gamma_0)} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{v(\Gamma_0)} \int_{\Gamma_0} |b(\tau) - b(z)| \chi_{\Gamma_0}(z) dv(z) dv(\tau) \\ & \leq \frac{1}{v(\Gamma_0)} \int_{\Gamma_0} M_{b,\Gamma}(\chi_{\Gamma_0})(\tau) dv(\tau) \leq \frac{2}{v(\Gamma_0)} \|M_{b,\Gamma}(\chi_{\Gamma_0})\|_{L^\phi(\Gamma)} \|1\|_{L^\phi(\Gamma)} \end{aligned}$$

Böylece $b \in BMO(\Gamma)$ olur.

Üçüncü kısım, birinci ve ikinci kısımlarından çıkarılır. ■

Teorem 3.3'te $\phi(t) = t^p$ alınırsa aşağıdaki sonuç bulunur:

Sonuç 3.1: Γ Carleson eğrisi, $1 < p < \infty$ ve $b \in L_1^{loc}(\Gamma)$ olsun. Bu durumda, $M_{b,\Gamma}$ operatörü $L_p(\Gamma)$ da sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO(\Gamma)$ olmasıdır.

3.3. Carleson Eğrilerinde Maksimal Operatör Komütatörü

Bu bölümde, $L^\phi(\Gamma)$ Orlicz uzaylarında $[b, M_\Gamma]$ maksimal operatör komütatörünün sınırlı olması için yeter koşulları verilecektir.

b fonksiyonu ve M_Γ operatörün ürettiği komütatör

$$[b, M_\Gamma]f(t) = b(t)M_\Gamma f(t) - M_\Gamma(bf)(t), \quad t \in \Gamma \quad (3.60)$$

olarak tanımlanır.

$[b, M_\Gamma]$ ile $M_{b,\Gamma}$ arasındaki ilişki şöyledir:

b negatif olmayan lokal integrallenebilir fonksiyon olsun. Böylece $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ ve $t \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} |[b, M_\Gamma]f(t)| &= |b(t)M_\Gamma f(t) - M_\Gamma(bf)(t)| \\ &= |M_\Gamma(b(t)f)(t) - M_\Gamma(bf)(t)| \leq M_\Gamma(|b(t) - b|f)(t) \leq M_{b,\Gamma}(f)(t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

sağlanır [46],[47]. Γ üzerinde b keyfi lokal integrallenebilir fonksiyon ise, her $f \in L_1^{loc}(\Gamma)$ için

$$|[b, M_\Gamma]f(t)| \leq M_{b,\Gamma}(f)(t) + 2b^-(t)M_\Gamma(f)(t), \quad t \in \Gamma \quad (3.62)$$

sağlanır. $[b, M_\Gamma]$ ile $M_{b,\Gamma}$ operatörler esasen birbirinden farklıdır. Çünkü $M_{b,\Gamma}$ operatörü pozitif ve alt lineerdir ama $[b, M_\Gamma]$ operatörü ne pozitif ne de alt lineerdir.

Lemma 3.8 ve (3.62) eşitsizliğinden aşağıdaki sonuç çıkarılır:

Sonuç 3.2: $b \in BMO(\Gamma)$ öyle ki $b^- \in L_\infty(\Gamma)$ olsun. Böylece, pozitif C sabiti vardır

$$[b, M_\Gamma]f(t) \leq C(\|b^+\|_* + \|b^-\|_{L_\infty})M_\Gamma(M_\Gamma f)(t) \quad (3.63)$$

İspat 3.5: $M_\Gamma f \leq M_\Gamma(M_\Gamma f)$ olmasından ve Lemma 3.8 ve (3.62) den

$$\begin{aligned} |[b, M_\Gamma]f(t)| &\leq M_{b, \Gamma}(f)(t) + 2b^-(t)M_\Gamma(f)(t) \\ &\lesssim \|b\|_* M_\Gamma(M_\Gamma f)(t) + b^-(t)M_\Gamma(f)(t) \\ &\lesssim (\|b^+\|_* + \|b^-\|_*)M_\Gamma(M_\Gamma f)(t) + \|b^-\|_{L_\infty(\Gamma)}M_\Gamma(M_\Gamma f)(t) \\ &\lesssim (\|b^+\|_* + \|b^-\|_{L_\infty})M_\Gamma(M_\Gamma f)(t) \end{aligned} \quad (3.64)$$

bulunur. ■

Sonuç 3.3: Γ Carleson eğrisi, $b \in BMO(\Gamma)$, $b^- \in L_\infty(\Gamma)$, $\Phi \in \Delta_2 \cup \nabla_2$ olmak üzere, $\phi \in Y$ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda, $L^\phi(\Gamma)$ uzaylarında $[b, M_\Gamma]$ komütatörü sınırlıdır.

4. SONUÇLAR

Harmonik analizde yaygın kullanılan M_I maksimal operatör, I_I^α potansiyel operatör, M_I^α kesirli maksimal operatör çeşitli fonksiyon uzaylarındaki sınırlılık kriterlerini uzun yıllardır araştırılmaktadır. Bu operatörlerin L_p Lebesgue uzaylarındaki sınırlılık kriterleri klasiktir. Bu sonuçlar, son yıllarda L_p Lebesgue uzayının genelleşmesi olan $L_{p,\lambda}$ Morrey ve L^Φ Orlicz uzaylarında çalışılmaktadır. Bu çalışmada ise, $LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları ve $L^\Phi(\Gamma)$ Orlicz uzaylarında araştırma yapılmıştır. Bu çalışmanın farklılıklarından biri kullanılan operatör ve uzayların Carleson eğrileri üzerinden incelenmesidir.

M_I maksimal operatörünün $LM_{p,\varphi_1}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılık kriteri Teorem 2.3'te verilmiştir. Sonuç 2.1 de, $M_{p,\varphi_1}(\Gamma)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında verilmiştir. Sonuç 2.2 de ise, $M_{p,\varphi}(\Gamma)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında verilmiştir. $LM_{p,\varphi}^{\{t_0\}}(\Gamma)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarında, I_I^α potansiyel operatör ve M_I^α kesirli maksimal operatörler için zayıf ve güçlü Spanne-Guliyev tipi sınırlılık kriteri ile zayıf ve güçlü Adams-Guliyev tipi sınırlılık kriteri ispatlanmıştır. M_I^α kesirli maksimal operatörünün Adams-Gunawan tipi sınırlılık kriteri ispatlanmıştır. Bunun yanı sıra, M_I maksimal operatör ve $[b, M_I]$ komütatörünün $L^\Phi(\Gamma)$ da sınırlı olması için gerek ve yeter koşulları verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Adams D. R., (1975), “A note on Riesz potentials”, *Duke Math.* 42 765–778.
- [2] Agarwal R. P., Gala S., Ragusa M. A., (2020), “A regularity criterion in weak spaces to Boussinesq equations”, *Mathematics* 8 (6), 920.
- [3] Akbulut A., Guliyev V. S., Mustafayev R., (2012), “On the boundedness of the maximal operator and singular integral operators in generalized Morrey spaces”, *Math. Bohem.* 137 (1), 27–43.
- [4] Nakai E., (1994), “Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces”, *Math. Nachr.* 95-103.
- [5] Böttcher A., Karlovich Yu. I., (1997), “Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators”, Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 397.
- [6] Böttcher A., Karlovich Yu. I., (1999), “Toeplitz operators with PC symbols on general Carleson Jordan curves with arbitrary Muckenhoupt weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 351, 3143–3196.
- [7] Burenkov V., Gogatishvili A., Guliyev V. S., Mustafayev R., (2010), “Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey type spaces”, *Complex Var. Elliptic Equ.* 55 (8–10), 739–758.
- [8] Eridani A., Kokilashvili V., Meskhi A., (2009), “Morrey spaces and fractional integral operators”, *Expo. Math.* 27 (3), 227–239.
- [9] Eridani, Utoyo M. I., Gunawan H., (2012), “A characterization for fractional integrals on generalized Morrey spaces”, *Anal. Theory Appl.* 28 (3), 263–268.
- [10] Eroglu A., Guliyev V. S., Azizov C. V., (2017), “Characterizations for the fractional integral operators in generalized Morrey spaces on Carnot groups”, *Math. Notes* 102 (5), 127–139.
- [11] Eroglu A., Dadashova I. B., (2018), “Potential operators on Carleson curves in Morrey spaces”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.* 66 (2), 188–194.
- [12] Eroglu A., Azizov J. V., (2017), “A note on the fractional integral operators in generalized Morrey spaces on the Heisenberg group”, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* 37 (1), 86–91.
- [13] Dadashova I. B., Aykol C., Cakir Z., Serbetci A., (2018), “Potential operators in modified Morrey spaces defined on Carleson curves”, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* 172 (1), 15–29.

- [14] Guliyev V. S., (2009), “Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces”, J. Inequal. Appl. Art. ID 503948, 1-20.
- [15] Guliyev V. S., Hasanov J. J., Zeren Y., (2011), “Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in modified Morrey spaces”, J. Math. Inequal. 5 (4), 491–506.
- [16] Guliyev V. S., (2013), “Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel”, J. Math. Sci. (N. Y.) 193 (2), 211–227.
- [17] Guliyev V. S., Omarova M. N., Ragusa M. A., Scapellato A., (2018), “Commutators and generalized local Morrey spaces”, J. Math. Anal. Appl. 457 (2), 1388–1402.
- [18] Guliyev V. S., Guliyev R. V., Omarova M. N., (2018), “Riesz transforms associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces”, Appl. Comput. Math. 17 (1), 56–71.
- [19] Karlovich A. Yu., (2010), “Maximal operators on variable Lebesgue spaces with weights related to oscillations of Carleson curves”, Math. Nachr. 283 (1), 85–93.
- [20] Kokilashvili V., (1990), “Fractional integrals on curves”, (Russian) Trudy Tbliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin, SSR 95, 56–70.
- [21] Kokilashvili V., Meskhi A., (2001), “Fractional integrals on measure spaces”, Frac. Calc. Appl. Anal. 4 (1), 1–24.
- [22] Kokilashvili V., Meskhi A., (2008), “Boundedness of maximal and singular operators in Morrey spaces with variable exponent”, Arm. J. Math. (Electronic) (1), 18–28.
- [23] Kokilashvili V., Samko S., (2008), “Boundedness of maximal operators and potential operators on Carleson curves in Lebesgue spaces with variable exponent”, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 24 (11), 1775–1800.
- [24] Morrey C. B., (1938), “On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations”, Trans. Amer. Math. Soc. 43, 126–166.
- [25] Ragusa M. A., (2012), “Operators in Morrey type spaces and applications”, Eurasian Math. J. 3, (3), 94–109.
- [26] Ragusa M. A., Scapellato A., (2017), “Mixed Morrey spaces and their applications to partial differential equations”, Nonlinear Anal. 151, 51–65.
- [27] Ragusa M. A., Tachikawa A., (2020), “Regularity for minimizers for functionals of double phase with variable exponents”, Adv. Nonlinear Anal. 9 (1), 710–728.

- [28] Samko N., (2009), “Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces”, J. Math. Anal. Appl. 350 (1), 56–72.
- [29] Stein E. M., (1993), “Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals”, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- [30] Stein E.M., (1970), “Singular integrals and differentiability properties of functions”, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [31] Guliyev V.S., Sawano Y., (2013), “Linear and sublinear operators on generalized Morrey spaces with non-doubling measures”, Publ. Math. Debrecen 83 (3), 303-327.
- [32] H. Gunawan, (2003), “A note on the generalized fractional integral operators”, J. Indones.Math. Soc. 9, 39-43.
- [33] Deringoz F., Guliyev V.S., Samko S.G., (2014), “Boundedness of maximal and singular operators on generalized Orlicz-Morrey spaces in Operator Theory”, Operator Algebras and Applications, vol. 242 of Operator Theory : Advances and Applications, 1-24.
- [34] Eroglu A., Azizov J.V., Guliyev V.S., (2018), “Fractional maximal operator and its commutators in generalized Morrey spaces on Heisenberg group”, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 44 (2), 304-317.
- [35] Eroglu A., Abasova G.A., Guliyev V.S., (2019), “Characterization of parabolic fractional integral and its commutators in parabolic generalized Orlicz-Morrey spaces, Azerb. J. Math. 9 (1), 92-107.
- [36] Kokilashvili V., Samko S., (2004), “Sobolev theorem for potentials on Carleson curves in variable Lebesgue spaces”, Mem. Differential Equations Math. Phys. 33, 157-158.
- [37] Guliyev V.S., (1994), “Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in R^n ” (Russian) Doctor's degree dissertation, Moscow, Mat. Inst. Steklov, 1-329.
- [38] Kokilashvili V., Krbeć M. M., (1991) “Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces”. World Scientific, Singapore.
- [39] Orlicz W., (1988), “Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B”, Bull. Acad. Polon. A (1932) 207-220; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa 217-230.
- [40] Orlicz W., (1988), “Über Räume (LM)”, Bull. Acad. Polon. A (1936) 93-107; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, 345-359.
- [41] Rao M.M., Ren Z.D, (1991) “Theory of Orlicz Spaces”, M. Dekker, Inc., New York.

- [42] John, F., Nirenberg, L., (1961), “On functions of bounded mean oscillation”, *Comm. Pure Appl. Math.* 14, 415-426.
- [43] Kronz M., (2001), “Some function spaces on spaces of homogeneous type”, *Manuscripta Math.* 106 (2), 219-248.
- [44] Ho K.P., (2009), “Characterization of BMO in terms of rearrangement invariant Banach function spaces”, *Expo. Math.* 27, 363-372.
- [45] Deringoz F., Dorak K., Guliyev V.S., (2021) “Characterization of the boundedness of fractional maximal operator and its commutators in Orlicz and generalized Orlicz-Morrey spaces on spaces of homogeneous type”, *Anal. Math. Phys.* 11 (2), 63-30.
- [46] Guliyev V.S., (2022), “Some characterizations of BMO spaces via commutators in Orlicz spaces on stratified Lie groups”, *Results Math.* 77 (1), 42.
- [47] Zhang P., Wu J., Sun J., (2018), “Commutators of some maximal functions with Lipschitz function on Orlicz spaces”, *Mediterr. J. Math.* 15 (6), 216, 13.
- [48] Agcayazi M., Gogatishvili A., Koca K., Mustafayev R., (2015), “A note on maximal commutators and commutators of maximal functions”, *J. Math. Soc. Japan* 67 (2), 581-593.
- [49] Akbulut A., Burenkov V.I., Guliyev V.S., (2020), “Anisotropic fractional maximal commutators with BMO functions on anisotropic morrey-type spaces”, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* 40 (4), Mathematics, 13-32.
- [50] Aykol C., Armutcu H., Omarova M.N., (2016), “Maximal commutator and commutator of maximal function on modified Morrey spaces”, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* 36 (1), Mathematics, 29-35.
- [51] Bastero J., Milman M., Ruiz F.J., (2000), “Commutators for the maximal and sharp functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 128, 3329-3334.
- [52] Bonami A., Iwaniec T., Jone P., Zinsmeister M., (2007), “On the product of functions in BMO and H^1 ”, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 57 (5), 1405-1439.
- [53] Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J. L., (1985), “Weighted Norm Inequalities and Related Topics”, *North-Holland Math Studies*, 116, Amsterdam: North Holland.
- [54] Guliyev V.S., Deringoz F., Hasanov S.G., (2017), “Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces”, *J. Inequal. Appl.* 75, 18.
- [55] Guliyev V.S., Deringoz F., Hasanov S.G., (2018), “Commutators of fractional maximal operator on Orlicz spaces”, *Math. Notes* 104 (4), 498-507.

- [56] Guliyev V.S., Deringoz F., Hasanov S.G., (2019), "Fractional maximal function and its commutators on Orlicz spaces", *Anal. Math. Phys.* 9 (1), 165-179.
- [57] Guliyev V.S., Mammadov Y.Y., Muslumova F.A., (2020), "Boundedness characterization of maximal commutators on Orlicz spaces in the Dunkl setting", *J. Math. Study* 53 (1), 45-65.
- [58] Guliyev V.S., (2021), "Commutators of the fractional maximal function in generalized Morrey spaces on Carnot groups", *Complex Var. Elliptic Equ.* 66 (6-7), 893-909.
- [59] Hu G., Yang D., (2009), "Maximal commutators of BMO functions and singular integral operators with non-smooth kernels on spaces of homogeneous type", *J. Math. Anal. Appl.* 354, 249-262.
- [60] Lerner A.K., Ombrosi S., Perez' C., Torres R.H., Trujillo-Gonzalez' R., (2009), "New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderon'-Zygmund theory", *Adv. Math.* 220, 1222-1264.
- [61] Long R., Yang L., (1984), "BMO functions in spaces of homogeneous type", *Sci. Sinica Ser. A* 27 (7), 695-708.
- [62] Mammadov Y.Y., Muslumova F.A., Safarov Z.V., (2020), "Fractional maximal commutator on Orlicz spaces for the Dunkl operator on the real line, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* 40 (4), Mathematics, 130-144.
- [63] Deringoz F., (2015), "Harmonik Analizin Integral Operatörlerinin Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey Uzaylarında Sınırlılığı", *Doktora Tezi, Ahi Evran Üniversitesi.*
- [64] Sawano Y., (2019), "A thought on generalized Morrey spaces", *J. Indonesian Math. Soc.* 3, 210-281.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice ARMUTCU ilk, orta ve lise hayatını İstanbul'da tamamladı. 2000 senesinde Bakü Devlet Üniversitesinin Matematik Bölümünü kazandı. 2005 yılında mekanik-riyaziyat bölümünü, rus dilinde okuyan ilk Türk talebesi olarak mezun oldu. Özel kurumlarda toplamda 8 yıl Matematik-Geometri öğretmenliği yaptı. 2011 yılında lise müfredatında Geometri soru yazarlığında bulundu. 2012 yılında evlendi. 2014 Ocak ayında ilk evladı Mehmed Mahsun (Agâh) dünyaya geldi. 2016'da Yıldız Teknik Üniversitesinde Matematik tezli Yüksek Lisansını bitirdi. Aynı yıl Yeditepe Üniversitesi İngilizce Hazırlığı okudu. 2017'de Gebze Teknik Üniversitesi'nde Doktora başladı. 2018 de TÜBİTAK-BİDEB'den 2211-A yurt içi doktora bursunu almaya hak kazandı. 2019 Aralık ayında kızı Zeyneb dünyaya gözünü açtı.

EKLER

Ek A: Tez Çalışması Kapsamında Yapılan Yayınlar

Guliyev V.S., Armutcu H., Azeroglu T., (2020), “Characterizations for the potential operators on Carleson curves in local generalized Morrey spaces”, Open Mathematics. 18 (1), 1317-1331.

Armutcu H., Eroglu A., Isayev F., (2020), “Characterizations for the fractional maximal operators on Carleson curves in local generalized Morrey spaces”, Tbilisi Mathematical Journal, vol 13(1, 23–38.

Armutcu H., Omarova M.N., (2022), “Some characterizations of BMO spaces via maximal commutators in Orlicz spaces over Carleson curves ”, Transactions Issue Mathematics, Series of Physical-Technical & Mathematics Science, Mathematics, 42 (1), 1-14.